



بسم الله الرحمن الرحيم

منطق

کلیات

منطق ریاضی ابزاری برای استدلال و نتیجه گیری صحیح و همچنین ابزاری برای ارزیابی استدلال‌هاست.

گزاره

هر جمله خبری که قابلیت ارزش‌گذاری داشته باشد را یک گزاره می‌نامیم. مانند «هوا بارانی است».

معمولا گزاره‌ها را با حروف کوچک انگلیسی مثل p , q و r نامگذاری می‌کنند.

ارزش گزاره

هر گزاره می‌تواند دارای یکی از دو ارزش درست (True) یا نادرست (False) باشد. معمولا ارزش گزاره درست را با «د» یا «T» و گزاره نادرست را با «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

نکته

ممکنست ما ارزش یک گزاره را ندانیم یا ارزش آن در آینده معلوم شود ولی مهم اینست که یک گزاره باید قابلیت ارزش‌گذاری داشته باشد یعنی باید به هر حال یا درست باشد یا نادرست و اگر گاهی درست و گاهی نادرست باشد، گزاره نخواهد بود.

مثال

جمله «دمای سطح روشن کره بیش از ۲۰۰ درجه سانتی گراد است» یک گزاره است اگرچه ممکنست ما درستی آن را ندانیم.

نکته

جملات زیر گزاره نیستند:

جملات پرسشی مانند: «چرا عدد ۲ اول است؟»

جملات شامل امر و نهی و خواهش مانند: «کتابم را بیاور» یا «دزدی نکن» یا «لطفا در اینجا بنشینید»

جملات دعایی مانند: «خدایا ما را ببخش»

جملات مبهم مانند: «علی دارای قد بلند است» چون معیار بلندی قد مشخص نشده است.

جملات بی معنی مانند: «قرنکبایی هنتله هن است»

تمرین ۱

کدام جملات گزاره هستند؟

تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در نقطه $x=0$ ناپیوسته است.

گزاره‌نما

عبارتی شامل حداقل یک متغیر که با مقداردهی به متغیر تبدیل به گزاره شود را یک گزاره‌نما می‌نامیم.

مثال ۲

عبارت $x=1$ یک گزاره نیست چون قابلیت ارزش‌گذاری ندارد. اما اگر به x مقدار داده شود تبدیل به یک گزاره که ممکنست درست یا نادرست باشد می‌شود.

هم‌ارزی دو گزاره

دو گزاره p و q را هم‌ارز می‌نامیم و به صورت $p \equiv q$ نمایش می‌دهیم اگر و تنها اگر همواره دارای ارزش درستی یکسانی باشند.

جدول ارزش

جدول ارزش هر گزاره، جدولیست که ارزش یک گزاره ساخته‌شده از گزاره‌های ساده (اتمیک) را بر حسب مقادیر مختلف ارزش گزاره‌های سازنده‌اش نمایش می‌دهد.

نکته

جدول ارزش گزاره‌ای که از k گزاره اتمیک ساخته شده است 2^k سطر دارد چرا که هر یک از گزاره‌های اتمیک می‌توانند دو حالت «True» یا «False» داشته باشند.

نکته

در مورد تعداد ستونهای جدول ارزش حداقل به تعداد گزاره‌های اتمیک سازنده و گزاره نهایی باید ستون وجود داشته باشد ولی معمولا باید به ازاء هر گزاره‌ی موجود در عبارت نهایی که از روی گزاره‌های اتمیک ساخته شده‌است نیز یک ستون اضافه کنیم که در ادامه این نکته را با مثال توضیح خواهیم داد.

عملگرهای منطقی

در منطق سه عملگر اصلی وجود دارد که تمام عملگرهای دیگر را می‌توان بر حسب این سه عملگر نوشت.

در ادامه با نام و نماد و نحوه عملکرد هرکدام از این سه عملگر آشنا می‌شویم:

نام فارسی عملگر	نقیض	«و» - ترکیب عطفی	«یا» - ترکیب فصلی																																				
نام انگلیسی عملگر	not	and	Or																																				
نماد اصلی	~	∧	∨																																				
نماد فرعی	—	•	+																																				
توصیف عملکرد	نقیض یک گزاره ارزشش خلاف ارزش خود آن گزاره است. یعنی اگر گزاره درست باشد نقیضش نادرست و اگر نادرست باشد، نقیضش درست است.	ترکیب عطفی دو گزاره فقط زمانی درست است که هر دو گزاره درست باشند و زمانی نادرست است که حداقل یکی از دو گزاره نادرست باشند.	ترکیب فصلی دو گزاره زمانی درست است که حداقل یکی از دو گزاره درست باشد و فقط زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.																																				
جدول ارزش	<table><tr><td>p</td><td>~ p</td></tr><tr><td>د</td><td>ن</td></tr><tr><td>ن</td><td>د</td></tr></table>	p	~ p	د	ن	ن	د	<table><tr><td>p</td><td>q</td><td>p ∧ q</td></tr><tr><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>د</td><td>ن</td><td>ن</td></tr><tr><td>ن</td><td>د</td><td>ن</td></tr><tr><td>ن</td><td>ن</td><td>ن</td></tr></table>	p	q	p ∧ q	د	د	د	د	ن	ن	ن	د	ن	ن	ن	ن	<table><tr><td>p</td><td>q</td><td>p ∨ q</td></tr><tr><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>د</td><td>ن</td><td>د</td></tr><tr><td>ن</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>ن</td><td>ن</td><td>ن</td></tr></table>	p	q	p ∨ q	د	د	د	د	ن	د	ن	د	د	ن	ن	ن
p	~ p																																						
د	ن																																						
ن	د																																						
p	q	p ∧ q																																					
د	د	د																																					
د	ن	ن																																					
ن	د	ن																																					
ن	ن	ن																																					
p	q	p ∨ q																																					
د	د	د																																					
د	ن	د																																					
ن	د	د																																					
ن	ن	ن																																					

مثال ۳

جدول ارزش گزاره $(p \wedge \sim q) \vee \sim r$ را رسم کنید.

همانطور که در دو نکته قبلی اشاره شده با توجه به اینکه این گزاره از ۳ گزاره اتمیک p ، q و r تشکیل شده پس جدول

ارزش آن $2^3 = 8$ سطر و با توجه به ۳ گزاره اتمیک و ۳ گزاره میانی $\sim q$ ، $\sim r$ ، $p \wedge \sim q$ و گزاره نهایی یعنی

$(p \wedge \sim q) \vee \sim r$ مجموعاً ۷ ستون خواهد داشت. بنابراین داریم:

گزاره‌های ساده			گزاره‌های میانی			گزاره نهایی
p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \vee \sim r$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	د	ن	ن	د	ن	د
د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	ن	د

ساختن یک گزاره از روی جدول ارزش

برای ساختن یک گزاره با استفاده از گزاره‌های سازنده و عملگرهای اصلی با معلوم بودن جدول ارزش آن گزاره به صورت زیر عمل می‌کنیم:

- سطرهایی که در آن‌ها گزاره نهایی ارزش «درست» دارد را مشخص می‌کنیم.
- به تعداد سطرهای مشخص شده پرانتز قرار می‌دهیم و آنها را با هم $\vee$ می‌کنیم.

- در داخل هر پرانتز گزاره‌های اتمیک آن سطر را اگر درست باشند خودشان و اگر نادرست باشند نقیضشان را قرار داده و با هم $\wedge$ می‌کنیم.

مثال ۴

گزاره متناظر با جدول ارزش زیر را بنویسید.

p	q	r	?
د	د	د	ن
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	د
ن	د	ن	د
ن	ن	د	ن
ن	ن	ن	د

گزاره مورد نظر در ۴ سطر ارزش «درست» دارد. پس چهار پرانتز را با هم $\vee$ می‌کنیم:

$$(\quad) \vee (\quad) \vee (\quad) \vee (\quad)$$

در اولین سطر گزاره p و r «درست» و q «نادرست» است. پس خود p و r و نقیض q را در پرانتز اول با هم $\wedge$ می‌کنیم. برای بقیه پرانتزها هم به همین ترتیب عمل می‌کنیم. پس داریم:

$$(p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$$

تمرین ۲

گزاره معادل با جدول ارزش روبرو را بنویسید:

p	q	r	?
د	د	د	د
د	د	ن	د
د	ن	د	ن
د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن
ن	ن	ن	د

ویژگیهای عملگرهای اصلی

دسته اول ویژگیهای مربوط به یک عملگر به تنهاییست:

ویژگیهای نقیض	ویژگیهای ترکیب عطفی	ویژگیهای ترکیب فصلی
$\sim T \equiv F$	$p \wedge T \equiv p$	$p \vee T \equiv T$
$\sim F \equiv T$	$p \wedge F \equiv F$	$p \vee F \equiv p$
$\sim(\sim p) \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
	$p \wedge \sim p \equiv F$	$p \vee \sim p \equiv T$
	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

دسته دوم مربوط به ویژگیهای ترکیبی عملگرهای اصلی است:

توزیع پذیری	$\{ \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	دمورگان
قانون جذب	$\{ p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$	قانون جذب

اثبات هم ارزی دو گزاره

برای اثبات هم‌ارزی دو گزاره دو روش وجود دارد:

- روش اول: جدول ارزش هر دو گزاره را کشیده و نشان می‌دهیم در سطور متناظر (سطرهایی که ارزش گزاره‌های اتمیک آن‌ها با هم یکسان است) دارای ارزش یکسانی هستند.
- روش دوم: با استفاده از ویژگیهای گفته شده سعی می‌کنیم یک گزاره را به شکل گزاره دیگر در آوریم یا هر دو گزاره را به یک شکل یکسان در آوریم.

مثال

نشان دهید: $(p \wedge \sim q) \vee (\sim(q \wedge r) \wedge (\sim q \vee p) \wedge \sim q) \equiv \sim q$

روش اول: رسم جدول ارزش

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$q \wedge r$	$\sim(q \wedge r)$	$\sim q \vee p$	$\sim(q \wedge r) \wedge (\sim q \vee p) \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \vee (\sim(q \wedge r) \wedge (\sim q \vee p) \wedge \sim q)$
د	د	د	ن	ن	د	ن	د	ن	ن
د	د	ن	ن	ن	ن	د	د	ن	ن
د	ن	د	د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	د	د	د	د
ن	ن	ن	د	ن	ن	د	د	د	د

چنانچه مشاهده می‌کنید ارزش دو دو ستون نیره تر در تمام سطرها با هم یکیست و در نتیجه این دو گزاره هم ارز هم هستند.

روش دوم: استفاده از جبر منطقی

مرحله اول، قانون جذب و مرحله دوم، دمورگان و مرحله سوم و چهارم هم قانون جذب را استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (p \wedge \sim q) \vee (\sim(q \wedge r) \wedge (\sim q \vee p) \wedge \sim q) &\equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim(q \wedge r) \wedge \sim q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee ((\sim q \vee \sim r) \wedge \sim q) \\ &\equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim q) \equiv \sim q \end{aligned}$$

تمرین ۳

هم ارزی گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

$$\sim[p \wedge (\sim p \vee q)] \wedge [\sim p \vee (p \wedge q)] \equiv \sim q$$

$$[(p \vee \sim q) \vee r] \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p$$

$$p \vee [p \wedge (q \vee \sim r) \wedge r] \equiv p \vee q$$

تکلیف شرطی دو گزاره

یک گزاره شرطی به شکل $p \Rightarrow q$ است که به p شرط و به q نتیجه می‌گوییم و ارزش این گزاره فقط زمانی «نادرست» است که شرط آن «درست» و نتیجه آن «نادرست» باشد و در غیر اینصورت یعنی زمانی که شرط و نتیجه هر دو «درست» یا شرط «نادرست» است ارزش آن «درست» خواهد بود.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

اصطلاحاً زمانی که شرط یک گزاره شرطی «نادرست» می‌گوییم این گزاره شرطی بنابر «انتفاء مقدم» یعنی نفی مقدم «درست» است.

نکته

همانطور که قبلاً نیز اشاره شد هر عملگر غیراصولی را می‌شود بر حسب عملگرهای اصلی نوشت و در مورد عملگر $\Rightarrow$ نیز می‌توان نوشت:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

تمرین ۴

نشان دهید گزاره روبرو یک گزاره همواره درست است: $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

تمرین ۵

هم ارزی گزاره‌های زیر را بررسی نمایید

$$[(q \Rightarrow p) \Rightarrow q] \wedge [p \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \equiv q$$

$$(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (p \Rightarrow (q \vee \sim r)) \equiv p \Rightarrow q$$

عکس یک گزاره شرطی

عکس گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $q \Rightarrow p$ است که درستی یا نادرستی آن با درستی یا نادرستی خود گزاره شرطی ارتباطی ندارد.

عکس نقیض گزاره شرطی

عکس نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $\sim q \Rightarrow \sim p$ است که با خود گزاره شرط هم ارز است بنابراین می‌توان نوشت:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

ترکیب دو شرطی دو گزاره

ترکیب دو شرطی دو گزاره را به صورت $p \Leftrightarrow q$ نمایش می‌دهیم و به معنی $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ است و بنابراین می‌توان نوشت:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

بنابراین ترکیب دو شرطی دو گزاره زمانی درست است که هر دو گزاره «درست» یا هر دو گزاره «نادرست» باشند.

به عبارت دیگر اگر ترکیب دو شرطی دو گزاره درست باشد به معنی هم ارز بودن آن دو گزاره است.

نکته

هم ارز یک گزاره دوشروطی برحسب عملگرهای اصلی منطق به صورت زیر خواهد بود:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv ((\sim p \vee q) \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee q) \wedge p) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \equiv \sim(p \vee q) \vee (p \wedge q)$$

تمرین ۶

هم ارزی گزاره‌های زیر را ثابت کنید

$$[p \Rightarrow (r \vee p)] \Leftrightarrow [\sim p \wedge (p \Rightarrow q)] \equiv \sim p$$

$$\sim[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$$

سورهای منطقی

سورهای منطقی یکی از دو عبارت «به ازاء هر - به ازاء همه مقادیر» یا «وجود دارد - به ازاء بعضی از مقادیر» هستند که در ابتدای گزاره‌نماها قرار می‌گیرند و آنها را به یک گزاره با ارزش «درست» یا «نادرست» تبدیل می‌کنند.

سور عمومی «به ازاء هر - به ازاء همه مقادیر» را با نماد « $\forall$ » نمایش می‌دهیم

سور وجودی «وجود دارد - به ازاء بعضی از مقادیر» را با نماد « $\exists$ » نمایش می‌دهیم.

برای نشان دادن به «وجود ندارد - به ازاء هیچ مقدار» از نماد « $\nexists$ » استفاده می‌کنیم.

نکته

گزاره‌نمای شامل متغیر x به همراه سور عمومی زمانی دارای ارزش «درست» خواهد بود که به ازاء همه مقادیر دامنه گزاره‌نما تبدیل به یک گزاره «درست» شود و به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد

نکته

گزاره نمای شامل متغیر x به همراه سور وجودی زمانی دارای ارزش «درست» خواهد بود که بتوان حداقل یک مقدار در دامنه پیدا کرد که به ازاء آن گزاره نما تبدیل به یک گزاره «درست» شود.

مثال ۶

گزاره $(\forall x \in R; x^2 + 1 > 0)$ به معنی اینست که به ازاء همه مقادیر x عبارت $x^2 + 1$ مثبت است به عبارت دیگر یعنی عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است.

گزاره $(\exists x \in R; x^2 + 3x - 5 = 0)$ به معنی اینست که به ازاء برخی از مقادیر x حاصل $x^2 + 3x - 5$ صفر می‌شود به عبارت دیگر مقداری از x وجود دارند که عبارت $x^2 + 3x - 5$ را صفر می‌کنند.

گزاره $(\nexists n \in N; n + 1 | n)$ به معنی اینست که به ازاء هیچ مقدار طبیعی n عبارت n بر $n + 1$ بخشپذیر نیست به عبارت دیگر یعنی عددی طبیعی مانند n نمی‌توان یافت طوریکه n بر $n + 1$ بخشپذیر باشد.

مفهوم گزاره‌نمایی که با دو سور همراه می‌شوند

مفهوم مثال	مثال	مفهوم	نماد
برای هر مقدار x و y جمع x و y خاصیت جابجایی دارد	$\forall x \forall y; x + y = y + x$	به ازاء هر x و y گزاره‌نمای $P(x, y)$ درست خواهد بود.	$\forall x \forall y; P(x, y)$
برای x مخالف صفر می‌توان عددی پیدا کرد که با ضرب شدن در x حاصل ۱ شود. به عبارت دیگر هر عدد مخالف صفر معکوس دارد.	$\forall x \neq 0 \exists y; x \times y = 1$	برای هر مقدار x می‌توان حداقل یک مقدار برای y پیدا کرد طوریکه گزاره‌نمای $P(x, y)$ درست باشد.	$\forall x \exists y; P(x, y)$
حداقل یک مقدار مثل ۰ برای x وجود دارد که مربع همه اعداد بزرگتر یا مساوی آن هستند.	$\exists x \forall y; y^2 \geq x$	حداقل یک مقدار برای x وجود دارد که به ازاء همه مقادیر y گزاره‌نمای $P(x, y)$ ارزش «درست» دارد.	$\exists x \forall y; P(x, y)$

$\exists x \exists y; P(x,y)$	حداقل یک مقدار برای x و y وجود دارد که ارزش گزاره $P(x,y)$ «درست» می‌شود.	$\exists x \exists y; (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$	حداقل یک مقدار برای x و y مثل ۱ و ۲ وجود دارد که حاصل $(x - 1)^2 + (y + 2)^2$ را صفر می‌کند.
-------------------------------	---	--	--

نقیض گزاره‌های صوری

برای نقیض کردن یک گزاره‌نما که با یک سور همراه شده است ابتدا سور عمومی را به سور وجودی و سور وجودی را به سور عمومی تبدیل کرده و سپس گزاره‌نما را هم نقیض می‌کنیم بنابراین نقیض گزاره‌های صوری به صورت زیر خواهد بود:

$$\sim(\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

$$\sim(\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

مثال ۷

نقیض عبارت (همه اعداد اول فرد هستند) به صورت (وجود دارد عدد اولی که فرد نیست) خواهد بود.

نقیض عبارت (باقیمانده بعضی از مربع‌های کامل بر ۳ برابر ۲ است) به صورت (باقیمانده هر مربع کاملی بر ۳ مخالف ۲ است) خواهد بود.

تمرین

کدام گزاره‌ها درستند؟

$$\forall x \in R, \exists y \in R; x + y = 0$$

$$\exists x \in R, \forall y \in R; x + y = 0$$

$$\exists x \in R, \forall y \in R; x \leq y$$

تمرین ۷

نقیض گزاره (شهری وجود دارد که در آن شهر مدرسه‌ای وجود دارد که در آن مدرسه بعضی از دانش آموزان نامنظم‌اند) را بنویسید.