



بسم الله الرحمن الرحيم

استدلال

کلیات

منظور از استدلال انواع شیوه‌های اثبات درستی یا نادرستی یک قضیه است. و یک قضیه در واقع یک ترکیب شرطی بین فرضیات (p) و حکم (q) است که به صورت $p \Rightarrow q$ نوشته می‌شود و از منطق می‌دانیم که این گزاره شرطی زمانی درست است که یا p «نادرست» باشد یا q «درست» باشد و البته از آنجا که معمولاً فرضیات (p) «درست» هستند در اینجا برای اثبات درستی این ترکیب شرطی باید نشان دهیم که حکم (q) «درست» است.

انواع روش‌های اثبات

روش‌های اثبات را می‌توان به روش‌های اثبات درستی و اثبات نادرستی تقسیم کرد. و روش‌های اثبات درستی نیز به روش‌های مستقیم و روش‌های غیرمستقیم تقسیم می‌شوند.

روش‌های اثبات	اثبات درستی	مستقیم	مستقیم (استنتاجی)
		غیرمستقیم	بررسی تمام حالات
			برهان خلف
			بازگشتی (گزاره‌های هم ارز)
	اثبات نادرستی	مثال نقض	

روش اثبات مستقیم (استنتاجی)

در این روش از فرضیات مساله شروع می‌کنیم و با استفاده از ویژگی‌ها و قوانین ریاضی که از قبل می‌دانیم مرحله به مرحله جلو رفته تا به حکم برسیم.

در واقع در این روش به صورت زنجیره‌وار ابتدا نشان می‌دهیم که از درستی فرض (p) می‌توان گزاره (p_1) و از گزاره (p_1) می‌توان گزاره (p_2) و ... و از گزاره (p_k) می‌توان حکم (q) را نتیجه گرفت. پس در نهایت می‌توان گفته که گزاره شرطی $(p \Rightarrow q)$ درست است.

$$((p \Rightarrow p_1) \wedge (p_1 \Rightarrow p_2) \wedge \dots \wedge (p_{k-1} \Rightarrow p_k) \wedge (p_k \Rightarrow q)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

مثال

نشان دهید مجموع هر سه عدد متوالی مضربی از ۳ است.

اگر عدد اول را n بنامیم داریم:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3 \times (n + 1)$$

تمرین

گزاره‌های زیر را با اثبات مستقیم ثابت کنید:

- مجموع هر دو عدد گویا عددی گویاست

- مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است

- میانگین پنج عدد متوالی، برابر عدد وسطی است.

روش اثبات با بررسی تمامی حالات

در این روش ابتدا تمام حالاتی که در فرض برقرار است را می‌نویسیم و سپس در هر حالت با روش قبل نشان می‌دهیم که حکم قابل نتیجه‌گیری است. سپس از مجموعه این نتیجه‌گیری‌ها می‌توان نتیجه گرفت که حکم همیشه قابل نتیجه‌گیری است.

در واقع در این روش فرض (p) از حالت‌های مختلفی تشکیل شده است یعنی داریم $(p \equiv p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_k)$. حال برای اثبات $(p \Rightarrow q)$ کفایت ابتدا تک تک این عبارات را $(p_1 \Rightarrow q)$ ، $(p_2 \Rightarrow q)$ ، ... و $(p_k \Rightarrow q)$ را اثبات و از همه آنها نتیجه بگیریم که $(p \Rightarrow q)$. یعنی داریم:

$$(p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_k \Rightarrow q) \equiv (p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_k) \Rightarrow q \equiv p \Rightarrow q$$

مثال

ثابت کنید حاصل ضرب هر دو، عدد متوالی زوج است.

اگر عدد اول را n بنامیم عدد بعدی آن $n + 1$ خواهد بود. و می‌دانیم برای n دو حالت داریم:

$$n = 2k \Rightarrow n \times (n + 1) = 2k \times (2k + 1) = 2 \times (k \times (2k + 1)) = 2t$$

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n \times (n + 1) = (2k + 1) \times (2k + 1 + 1) = (2k + 1) \times (2k + 2) = 2 \times ((2k + 1) \times (k + 1)) = 2t$$

تمرین

به روش بررسی تمام حالات گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

- اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $(a = 0 \vee b = 0)$

- $A = \{3, 4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است و $n \in S$ ، اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{\epsilon}$ زوج باشد، ثابت کنید $n \in A$

برهان خلف

در این روش ابتدا فرض می‌کنیم که حکم («نادرست» باشد که آن را فرض خلف می‌نامیم و سپس نشان می‌دهیم که در این صورت به تناقض، یعنی یک گزاره «نادرست» می‌رسیم.

می‌دانیم که ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$ زمانی نادرست است که فرض (p) «درست» و حکم (q) «نادرست» باشد. پس اگر بتوانیم نشان دهیم که ترکیب عطفی فرض (p) و نقیض حکم (q) معادل گزاره همیشه «نادرست» است، می‌توان نتیجه گرفت که هیچ موقع فرض (p) «درست» و حکم (q) «نادرست» نمی‌شود پس گزاره $(p \Rightarrow q)$ همواره «درست» است.

$$(p \wedge \sim q \equiv F) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

بیان دیگر اینست که باید نشان دهیم نقیض ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$ نادرست است:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

تمرین

a_1, a_2, a_3 و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1) \times (a_2 - b_2) \times (a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

تمرین

اگر تابع f در $x = a$ پیوسته و تابع g در $x = a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

اثبات بازگشتی

در این روش نشان می‌دهیم حکم (q) هم‌ارز با گزاره‌ایست مثل (p_1) که آن هم هم‌ارز با گزاره‌ایست مثل (p_2) و ... و آن هم هم‌ارز با گزاره‌ایست مثل (p_k) و گزاره (p_k) هم هم‌ارز با فرض (p) است و از آنجا که فرض هم «درست» است پس حکم (q) نیز درست خواهد بود.

بنابراین می‌توان نوشت:

$$q \equiv p_1 \equiv p_2 \equiv \dots \equiv p_k \equiv p \equiv T$$

نکته

توجه کنید که در اثبات بازگشتی برخلاف روشهای قبل به جای اثبات $(p \Rightarrow q)$ گزاره $(p \Leftrightarrow q)$ را اثبات می‌کنیم یعنی ثابت می‌کنیم $(p \equiv q)$ که در صورت درستی این گزاره حتما گزاره $(p \Rightarrow q)$ هم «درست» خواهد بود.

مثال

اگر $a > 0$ ثابت کنید: $a + \frac{1}{a} \geq 2$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0 \equiv \text{True}$$

تمرین

به روش اثبات بازگشتی درستی روابط زیر را ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \quad \bullet$$

$$xy > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad \bullet$$

مثال نقض

این روش بر خلاف تمام روش‌های پیشین برای اثبات نادرستی یک حکم استفاده می‌شود. در این روش کفایت یک مثال نقض برای $(p \Rightarrow q)$ پیدا کنیم. یعنی یک مثال پیدا کنیم که برای آن فرض (p) «درست» باشد ولی حکم (q) «نادرست» باشد. در اینصورت می‌توان نتیجه گرفت که ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$ نادرست است.

$$(\exists x; (p \wedge \sim q)) \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)$$

مثال

عدد $1 + 2^n$ به ازاء همه مقادیر طبیعی n اول است.

به ازاء $n = 5$ این گزاره نادرست است چرا که $2^{2^5} = 2^{32} = 4294967296 = 261 \times 16459644$

تمرین

نادرستی گزاره‌های زیر را با مثال نقض نشان دهید:

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} : y, x \text{ حقیقی} \quad \bullet$$

• اگر برای سه مجموعه A ، B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$