



آشنایی با نظریه اعداد

بخش ۱



درس ۱ اعداد اول

اعداد اول : هر عدد طبیعی و بزرگتر از یک که هیچ

شمارنده مثبتی جز یک و خودش ندارد.

* اگر p عددی اول باشد و $a \mid p$ در نتیجه $a = p$ ای $a = 1$

* ۲ تنها عدد اول زوج است و ۳، ۲ تنها اعداد اول متوالی



سوال ۱ :

اگر a ، b و c سه عدد اول متمایز باشند و $a^2 = b^2 + c$ ، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

۱۲ (۴

۱۰ (۳

۱۴ (۲

۱۵ (۱

پاسخ : گزینه ۳

$$a^2 - b^2 = c \Rightarrow (a - b)(a + b) = 1 \times c$$

$$\rightarrow a - b = 1, a + b = c$$

$$\xrightarrow[\text{م. تنوّل}]{a, b \text{ صحیح}} a = 3, b = 2 \Rightarrow c = 5$$

$$\rightarrow a + b + c = 10$$



درس ۲ بزرگترین مقسوم علیه مشترک

ب.م.م :

عدد طبیعی d را ب m و n دو عدد صحیح a و b می نامیم $(a, b) = d$ و b هر دو با هم صفر نیستند) و می نویسیم $(a, b) = d$ ، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد و اگر دو شرط زیر برقرار باشد آنگاه $(a, b) = d$

الف $d \mid a, d \mid b$

ب $\forall m > 0; m \mid a, m \mid b \Rightarrow m \leq d$

* اگر $(a, b) = 1$ در این صورت می گوییم ، a و b نسبت به هم اول اند



سوال ۲ :

به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n ، دو عدد $۷n + ۲,۵n - ۱$ نسبت به هم اولند؟

۷ (۴

۱۷ (۳

۸۵ (۲

۹۰ (۱

پاسخ : گزینه ۲

$$d \mid 7n + 2, d \mid 5n - 1 \rightarrow d \mid (2 \times 5) - (7 \times (-1))$$

$$\Rightarrow d \mid 17 \Rightarrow d = 17 \quad \text{چون } 17$$

$$17 \mid 5n - 1 \Rightarrow 5n - 1 = 17k \Rightarrow 5n = 17(k - 2) + 17 \times 2 + 1$$

$$\Rightarrow 5n = 17k' + 35$$

$$5n = 17k' + 35$$

$$\xrightarrow{k'=5q} 5n = 5 \times 17q + 5 \times 7$$

$$n = 17q + 7$$

q	۱	۲	۳	۴	۵
n	۲۴	۴۱	۵۸	۷۵	۹۲

۵N و ۳۵، هر دو مضرب ۵ هستند،

پس $17k'$ و در نتیجه k' باید مضرب ۵ باشد:

به ازای این پنج عدد مقدار n دورقمی میشود و برای $90 - 5 = 85$

مقدار دیگر ب.م.م مورد نظر برابر ۱ است.



سوال ۳ :

به ازای چند عدد طبیعی n ، هر دو عدد $7n+5$ و $n+2$ ۱۱ مقسوم علیه مشترکی برابر ۳ دارند؟

- (۱) هیچ عدد (۲) یک عدد (۳) دو عدد (۴) بی شمار عدد

پاسخ : گزینه ۱

$$\begin{aligned}(7n + 5, 11n + 2) &= d \\ \Rightarrow d \mid (5 \times 11) - (7 \times 2) &\Rightarrow d \mid 41 \\ d &= 1 \text{ یا } 41\end{aligned}$$

پس هیچ گاه مقسوم علیه مشترک این دو عدد برابر با ۳ نخواهد شد.



درس ۳ کوچکترین مضرب مشترک

ک م م: عدد طبیعی c را ک م م دو عدد صحیح ناصفر a و

b می نامیم و می نویسیم $c = [a, b]$ ، هرگاه دو شرط

(الف) و (ب) برقرار باشد و اگر دو شرط زیر برقرار باشد آنگاه

$[a, b] = c$.

(الف) $a \mid c, b \mid c$

(ب) $\forall m > 0; a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \leq m$



درس ۴ ویژگی های ب م م و ک م م

$$a \mid b \rightarrow \begin{cases} (a, b) = |a| \\ [a, b] = |b| \end{cases}$$

$$[a, b] = m, (a, b) = d$$

$$a' = \frac{a}{d}, b' = \frac{b}{d}$$

$$\Rightarrow m = \frac{a \times b}{d} = a b d$$

* اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ ، $(p, a) = 1$ ،

$$(a, b) = d \Leftrightarrow (\pm a^n, \pm b^n) = d^n$$

$$[a, b] = c \Leftrightarrow [\pm a^n, \pm b^n] = c^n$$

$$(a, b) = d \Leftrightarrow (k a, k b) = |k| d$$

$$[a, b] = c \Leftrightarrow [k a, k b] = |k| c$$



سوال ۴ :

اگر $[a, b] = (a, b) + ۸$ باشد، کدام عدد زیر نمی تواند باشد؟

۲۴ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ : گزینه ۳

$$[a, b] = m, (a, b) = d$$

$$a' = \frac{a}{d}, \quad b' = \frac{b}{d}$$

$$\Rightarrow m = \frac{a \times b}{d} = a b d$$



$$m = d + 8 \rightarrow a'b'd = d + 8 \Rightarrow (a'b' - 1) \times d = 8$$

$$d = 1 \rightarrow a'b' = 9 \rightarrow a' = 9, b' = 1 \rightarrow a = 9, b = 1 \rightarrow a + b = 10$$

$$d = 2 \rightarrow a'b' = 5 \rightarrow a' = 5, b' = 1 \rightarrow a = 10, b = 2 \rightarrow a + b = 12$$

$$d = 4 \rightarrow a'b' = 3 \rightarrow a' = 3, b' = 1 \rightarrow a = 12, b = 4 \rightarrow a + b = 16$$

$$d = 8 \rightarrow a'b' = 2 \rightarrow a' = 2, b' = 1 \rightarrow a = 16, b = 8 \rightarrow a + b = 24$$

[



سوال ۵ :

اگر $۱۵ = (n^۳ - n, n^۴ - ۱)$ ، آن گاه حاصل $[۲n, ۲ + n]$ کدام است؟ $(n \in \mathbb{N})$

$$۲n (n + ۲) (۲$$

$$۲n^۲ + ۲n (۱$$

$$۶n (۴$$

$$۲n (۳$$

پاسخ : گزینه ۴

$$n^3 - n = n(n^2 - 1); n^2 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1)$$

داریم:

$$(n^3 - n, n^2 - 1) = (n^2 - 1), (n, n^2 + 1)$$

ولی $(n, n^2 + 1) = 1$ ، زیرا اگر $(n, n^2 + 1) = d$ ، آن گاه:

$$\begin{aligned} d \mid n &\Rightarrow d \mid n^2 \\ &\quad d \mid n^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{-} d \mid 1 \rightarrow d = 1$$

$$* \quad d \in \mathbb{N}$$

$$(n^3 - n, n^2 - 1) = n^2 - 1 = 15$$

$$\rightarrow n^2 = 16 \Rightarrow n = 4$$

$$[6, 8] = 24 = 6n$$

