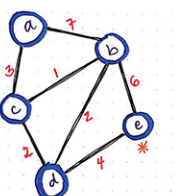


From theory to practice:  
Representing Graphs



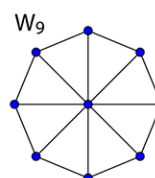
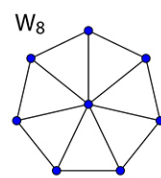
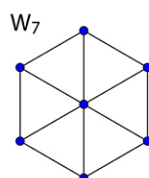
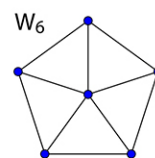
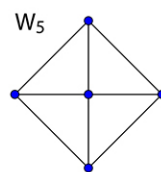
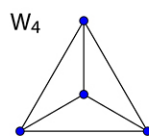
| VERTEX | SHORTEST DIST. FROM (a) | PREVIOUS VERTEX |
|--------|-------------------------|-----------------|
| a      | 0                       |                 |
| b      | ∞ / 7                   | 4               |
| c      | ∞ / 3                   | a               |
| d      | ∞ / 5                   | a               |
| e      | ∞ / 1                   | b               |

Visited = [a, c, b, d]

Unvisited = [e]

current vertex

\*The only node left to visit is 'e'. However, all of its neighbors have already been visited, so there's nothing for us to examine or update here!



# DISCRETE MATHEMATICS

# ریاضیات گسسته

سال دوازدهم  
رشته ریاضی و فیزیک

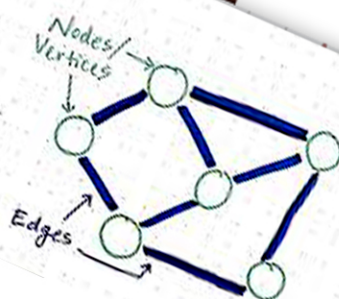
$$2A = gh$$

$$a/b = \tan x \quad 30^\circ$$

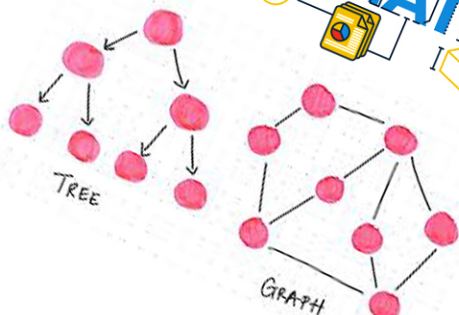
$$a/c = \sin y \quad 90^\circ$$

$$S = 2\pi r^2$$

Edges can connect nodes in any possible way! No rules!



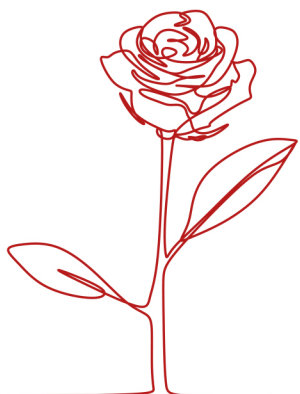
**MATHEMATICS**



Bahram Jalali

سلام!

حال همه ما خوب است  
ملالی نیست جز گم شدن گاه به گاه خیالی دور،  
که مردم به آن شادمانی بی سبب می گویند  
با این همه عمری اگر باقی بود  
طوری از کنار زندگی می گذرم  
که نه زانوی آهوی بی جفت بلرزد  
و نه این دل ناماندگار بی درمان!  
تا یادم نرفته است بنویسم  
حوالی خواب های ما سال پربارانی بود  
می دانم همیشه حیاط آنجا  
پراز هوای تازه باز نیامدن است  
اما تو لا اقل، حتی هر وهله، گاهی، هراز گاهی  
ببین انعکاس تبسم رویا  
شبیه شمایل شقایق نیست؟  
راستی خبرت بدهم  
خواب دیده ام خانه ای خریده ام  
بی پرده، بی پنجره، بی در، بی دیوار... هی بخند!  
بی پرده بگویمت چیزی نمانده است،  
من چهل ساله خواهم شد  
فردا را به فال نیک خواهم گرفت  
دارد همین لحظه يك فوج كبوتر سپید  
از فراز كوچه ما می گذرد  
باد بوی نامهای کسان من می دهد  
یادت می آید رفته بودی خبر از آرامش آسمان بیاوری؟!  
نامه ام بایسد کوتاه باشد  
ساده باشد بی حرفی از ابهام و آینه،  
از نو برایت مینویسم:  
**حال همه ما خوب است، اما تو باور نکن!**



# نظریہ اعداد

✓ فصل اول

## استدلال ریاضی

## استدلال استنتاجی

اگر برای دستی یا نادرستی یک گزاره، از حقایق استفاده کنیم که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم از نوعی استدلال به نام **استدلال استنتاجی** استفاده کرده‌ایم.

## انواع استدلال استنتاجی

۱- مثال نقض      ۲- اثبات مستقیم      ۳- روش اشباع      ۴- برهان خلف      ۵- اثبات بازگشتی

حال هرکدام از این موارد را به ترتیب مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم:

## ۱) مثال نقض:

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است مثال نقض گویند.

**تست:** کدام عدد  $n$  مثال نقضی برای گزاره‌ی «باقی‌مانده  $2^n$  بر ۷ همواره مربع کامل است» است؟

۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

**تست:** کدام حکم مثال نقض ندارد؟

(۱) مجموع هر دو عدد اول، عددی مرکب است.

(۲) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

(۳) حاصل ضرب هر دو عدد فرد، عددی فرد است.

(۴) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.





**تست:** اعداد کدام گزینه مثال نقض مناسبی برای گزاره‌ی «حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است» هستند؟

(۱)  $\sqrt{6}$  و  $\sqrt{216}$

(۲)  $\sqrt{6}$  و  $\sqrt{12}$

(۳)  $\sqrt{18}$  و  $\sqrt{216}$

(۴)  $\sqrt{12}$  و  $\sqrt{18}$

**تست:** کدام گزاره را نمی‌توان با مثال نقض رد کرد؟

(۱) مجموع هر دو عدد فرد متوالی همواره بر ۴ بخش پذیر است.

(۲) برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$ ،  $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ .

(۳) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک، عدد  $2^n - 1$  اول است.

(۴) میانگین ۴ عدد متمایز حقیقی همواره بزرگ‌تر مساوی دوتای آن‌ها است.

**تست:** کدام گزاره برای هر عدد صحیح  $n$  درست است؟

(۱)  $n^2$  عددی زوج است. ← **نادرست است** مثال نقض: ۱

(۲)  $n^2 + n$  عددی زوج است. ← **درست است زیرا**  $n^2 + n = n(n+1)$  ضرب دو عدد متوالی است.

(۳)  $n^2 - 1$  عددی زوج است. ← **نادرست زیرا** اگر  $n=2$  باشد  $n^2 - 1$  فرد است.

(۴)  $n + 6$  عددی زوج است. ← **نادرست زیرا** اگر  $n=1$  باشد  $n+6$  فرد است.

**تست:** کدام گزینه مثال نقض، برای گزاره‌ی «اگر  $x$  گنگ باشد آن گاه  $x^2 + 4x + 5$  هم گنگ است» به حساب می‌آید؟

(۱)  $\sqrt{4} - 1$

(۲)  $\sqrt{2} + 1$

(۳)  $\sqrt{2} - 2$

(۴)  $\sqrt{2} - 1$

## ۲) اثبات مستقیم:

در اثبات مستقیم سعی می‌کنیم به صورت مستقیم از فرض به حکم برسیم.  
در اثبات یک گزاره به روش اثبات مستقیم باید گزاره داده شده را به زبان ریاضی بنویسیم. به موارد زیر توجه کنید:  
هر وقت گفتند:

- ☉ عدد زوج  $\leftarrow 2K$
- ☉ عدد فرد  $\leftarrow 2K + 1$  و  $2K - 1$
- ☉ عدد فرد  $\leftarrow 2K + 1$  و  $2K + 2$  متوالی
- ☉ دو عدد زوج متوالی  $\leftarrow 2K$  و  $2K + 2$
- ☉ عدد مضرب ۳  $\leftarrow 3K$
- ☉ سه عدد متوالی  $\leftarrow K - 1$  و  $K$ ،  $K + 1$
- ☉ عدد مربع کامل  $\leftarrow K^2$
- ☉ عدد گویا  $\leftarrow \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$
- ☉ عدد فرد مربع کامل  $\leftarrow (2K + 1)^2$
- ☉ وارون عدد  $\leftarrow \frac{1}{a}$
- ☉ دو عدد فرد  $\leftarrow 2K + 1$  و  $2K' + 1$
- ☉ دو عدد زوج  $\leftarrow 2K$  و  $2K'$

مثلاً می‌خواهیم ثابت کنیم مربع عددی فرد، عددی فردی است. به این صورت عمل می‌کنیم:

$$n \rightarrow n = 2k + 1 \text{ فرد است}$$

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$n^2 = 2(\dots) + 1 \rightarrow n^2 \text{ فرد است.}$$

**مثال:** هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید. (عملیات کتاب درسی)

**الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.**

**ب) برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  :  $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$**

**پ) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.**

**ت) برای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱، عدد  $2^n - 1$  اول است.**

ث) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

ج) اگر برای هر سه مجموع  $A$ ،  $B$  و  $C$  داشته باشیم  $A \cup B = A \cup C$  آنگاه  $B = C$

ج) اگر  $k$  حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه  $4k + 1$  مربع کامل است.

**تست:** کدام گزینه را نمی‌توان به صورت مستقیم اثبات کرد؟

(۱) مجموع دو عدد متوالی فرد است.

(۲) مجموع سه عدد متوالی مضرب ۳ است.

(۳) ✓ مجموع چهار عدد متوالی مضرب ۴ است.

(۴) مجموع پنج عدد متوالی مضرب ۵ است.

$$۱) (n) + (n+1) = 2n+1 = \text{مرد}$$

$$۲) (n) + (n+1) + (n+2) = 3n+3 = \text{مفرد} - ۳$$

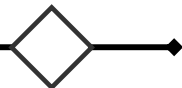
$$۳) (n) + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n+6 \neq 4k$$

$$۴) (n) + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n+10 = \text{مفرد} - ۵$$

### ۳) اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها (روش اشباع):

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است که همه حالت‌های ممکن در مورد مسأله را در نظر بگیریم که به این روش اثبات روش اشباع گفته می‌شود.

**مثال:** ثابت کنید برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $n^2 - 5n + 7$  عددی فرد است؟ (مثال صفحه ۴ کتاب دسی)



**مثال:** ثابت کنید مربع هر عدد در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر صفر یا یک دارد؟

## ۴) اثبات غیر مستقیم (برهان خلف):

در این روش فرض می‌کنیم که حکم نادرست، باشد سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و استدلال به یک نتیجه غیر ممکن یا متضاد با فرض می‌رسیم.

**مثال:** ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (مثال صفحه ۵ کتاب درسی)

فرض کنیم  $A$  یک عدد گویا و  $B$  یک عدد گنگ باشد. نشان می‌دهیم  $A+B$  گنگ است.  
 برهان خلف: فرض می‌کنیم  $A+B$  گنگ نباشد پس گویاست. می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا هم گویاست پس تفاضل  $A+B$  و  $A$  باید گویا باشد که با فرض در تناقض است زیرا  
 $A+B - A = B$  می‌شود که  $B$  گنگ است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌گردد.

**مثال:** حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (مثال صفحه ۵ کتاب درسی)

فرض می‌کنیم  $A$  یک عدد گویای ناصفر باشد و  $B$  عددی گنگ. نشان می‌دهیم  $AB$  گنگ است.  
 برهان خلف: فرض می‌کنیم  $AB$  گویا باشد. می‌دانیم ضرب هر عدد گویا گویاست و معکوس هر عدد گویای ناصفر هم گویاست پس:  $\frac{1}{A} \times AB = B$  باید گویا باشد که نیست. این تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌گردد.

**تست:** برای اثبات حکم «حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است». به روش ..... فرض

می‌کنیم  $a$  گویا و  $b$  گنگ باشد. در این صورت باید نشان دهیم اگر  $a + b$  ..... باشد، آنگاه به تناقض می‌رسیم.

(۱) اشباع - گویا

(۲) اشباع - گنگ

(۳) برهان خلف - گویا

(۴) برهان خلف - گنگ



## ۵) اثبات بازگشتی

گاهی برای اثبات بعضی قضیه‌ها، مخصوصاً در مورد تساوی‌ها و نامساوی‌ها با فرض درستی حکم به یک رابطه بدیهی یا فرض قضیه می‌رسیم. در چنین حالتی، برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده، بازگشت پذیر هستند وگرنه درستی اثبات تأیید نمی‌شود. این روش اثبات را اثبات بازگشتی می‌نامند.

**تست:** فرض کنید  $x$  و  $y$  عددهایی حقیقی باشند. در اثبات حکم « $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ » به روش بازگشتی

از درستی کدام گزاره حکم را نتیجه می‌گیریم؟

$$(1) \quad (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$$

$$(2) \quad (x - y)^2 + (x + y)^2 \geq 0$$

$$(3) \quad x^2 + y^2 \geq 0$$

$$(4) \quad (x + y)^2 + (x + 1)^2 + (y + 1)^2 \geq 0$$

**مثال:** ثابت کنید اگر  $a > 0$  باشد  $a + \frac{1}{a} \geq 2$  است؟ (مثال صفحه ۷ کتاب درسی)

**مثال:** ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کم‌تر نیست؟ (مثال صفحه ۷ کتاب درسی)

**تمرین:** گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی ثابت کنید. (مثال صفحه ۷ کتاب درسی)

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

## بخش پذیری (تقسیم پذیری)

**تعریف:** عدد صحیح  $a$  بر عدد صحیح  $b \neq 0$  بخش پذیر (تقسیم پذیر) است هرگاه عددی صحیح مانند  $q$  یافت

شود که :  $a = b \cdot q$  مثلاً وقتی می‌گوییم ۶ بر ۳ بخش پذیر است یعنی عددی مانند ۲ وجود دارد که  $۲ \times ۳ = ۶$

### نماد بخش پذیری:

$$b \mid a \xrightarrow{b \neq 0} |a| \leq |b|$$



### ویژگی‌های بخش پذیری:

۱) صفر بر هر عدد صحیح بخش پذیر است. به عبارت دیگر:  $a \mid 0$

۲) هر عدد صحیح بر ۱ و  $-1$  بخش پذیر است. به عبارت دیگر:  $1 \mid a, -1 \mid a$

۳) هر عدد صحیح بر خودش و قرینه‌اش بخش پذیر است. به عبارت دیگر:  $a \mid a, -a \mid a$

۴) علامت در بخش پذیری تأثیر ندارد یعنی اگر  $a \mid b$  آنگاه:  $-a \mid b, a \mid -b, -a \mid -b$

۵)  $a \mid b$  و  $b \mid a$  اگر و تنها اگر  $|a| = |b|$ .

۶) اگر  $a \mid b$  و  $b \mid c$  آنگاه الزاماً  $a \mid c$ .

مثلاً:  $۲ \mid ۴, ۴ \mid ۸ \longrightarrow ۲ \mid ۸$

۷) سمت راست بخش پذیری را می‌توان در هر عددی ضرب کرد یا به توان هر عددی رساند. به عبارتی دیگر:

$$a \mid b \longrightarrow a \mid kb, a \mid b^n$$

چاق، چاق‌تر می‌شود.

مثلاً:  $۳ \mid ۶ \longrightarrow ۳ \mid ۶ \times \square, ۳ \mid ۶^{\square}$

توجه شود که عکس ویژگی ۷ لزوماً درست نیست، به عبارت دیگر:

$$۸ \mid ۴ \times ۶ \longrightarrow ۸ \nmid ۶$$

$$۸ \mid ۴^۲ \longrightarrow ۸ \nmid ۴$$

$$a \mid kb \nrightarrow a \mid b$$

$$a \mid b^n \nrightarrow a \mid b$$

۸) سمت چپ بخش پذیری را می‌توان بر مقسوم‌علیه‌هایش تقسیم کرد (لاغر با تبدیل شدن به یک عدد صحیح لاغرتر می‌شود) مثلاً اگر داشته باشیم  $12 \mid 6$  آنگاه می‌توان به جای ۶ هر یک از مقسوم‌علیه‌هایش یعنی ۱ و ۲ و ۳ و ۶ را قرار داد.

۹) دو طرف بخش‌پذیری را می‌توان در هر عدد صحیح ضرب کرد یا به توان هر عدد طبیعی رساند. به عبارت دیگر:

$$a \mid b \rightarrow ka \mid kb, a^n \mid b^n$$

توجه شود که عکس ویژگی ۹ نیز صحیح می‌باشد یعنی می‌توان عوامل مشترک یا توان‌های مشترک را از طرفین بخش‌پذیری حذف کرد.

۱۰) دو طرف دو یا چند رابطه بخش‌پذیری را می‌توان نظیر به نظیر در هم ضرب کرد اما جمع و تفریق مجاز نیست. به عبارت

$$\begin{array}{l} a \mid b \\ c \mid d \end{array} \rightarrow ac \mid bd$$

دیگر:

$$\text{مثلاً: } \begin{cases} 3 \mid 6 \\ 4 \mid 12 \end{cases} \rightarrow 3 \times 4 \mid 6 \times 12$$

۱۱) اگر عددی بر حاصلضرب چند عدد صحیح بخش پذیر باشد آنگاه بر تک تک آن‌ها بخش پذیر است به عبارت دیگر:

$$abc \mid m \rightarrow a \mid m, b \mid m, c \mid m$$

$$\text{مثلاً: } 2 \times 3 \times 4 \mid 48 \rightarrow 2 \mid 48, 3 \mid 48, 4 \mid 48$$

۱۲) اگر عددی دو عدد صحیح را عاد کند آنگاه مجموع، تفاضل و حاصلضرب آن‌ها را نیز عاد می‌کند. به عبارت دیگر:

$$\begin{array}{l} a \mid b \\ a \mid c \end{array} \rightarrow a \mid b \pm c, a \mid bc$$

$$\text{مثلاً: } \begin{cases} 2 \mid 4 \\ 2 \mid 8 \end{cases} \rightarrow 2 \mid 4 \times 8, 2 \mid 4 \pm 8$$

نتیجه: اگر  $a \mid b$  و  $a \mid c$  آنگاه به ازای هر دو عدد صحیح  $x, y$ ،  $a \mid bx + cy$  (به عبارت دیگر اگر عددی دو عدد صحیح را عاد کند ترکیبات خطی آن دو عدد را نیز عاد می‌کند).



**تست:** کدام نتیجه گیری الزاماً درست نیست؟

(۱)  $a \mid b \rightarrow a \mid bc$

(۲)  $ac \mid b \rightarrow a \mid b$

(۳)  $ac \mid b \rightarrow a \mid b$

(۴)  $a \mid bc \rightarrow ac \mid b$

**مثال:** اگر  $a \mid b$  آیا  $a^2 \mid b^3$  ؟

**مثال:** اگر  $a^2 \mid b^3$  آیا  $a \mid b$  ؟

**نتیجه:**

**مثال:** اگر  $a \mid b$  آیا  $a^3 \mid b^2$  ؟



**مثال:** اگر  $a^3 | b^2$  آیا  $a | b$  ؟

$$a^n | b^m \xrightarrow{n \geq m} a | b$$

**نتیجه:**

حالا به جای همه مطالب گفته شده این نکته زیبا را مطرح می‌کنیم:

**نکته مهم:**

**تست:** کدام یک نتیجه‌گیری‌های زیر درست است؟

(۱)  $a | b \rightarrow a^2 | b^3$

(۲)  $a | b \rightarrow a^4 | b^3$

(۳)  $a^2 | b^3 \rightarrow a | b$

(۴)  $a^3 | b^4 \rightarrow a | b$

**تست:** اگر  $a^3 | b^4$  کدام نتیجه‌گیری به ازای همه مقادیر دلخواه  $a$  و  $b$  صحیح است؟

(۱)  $a^4 | b^5$

(۲)  $a^5 | b^6$

(۳)  $a^2 | b^3$

(۴)  $a | b$

**تست:** از رابطه  $2a^2 | b^3$  کدام نتیجه‌گیری ممکن است درست نباشد؟

(۱)  $a^2 | b^3$

(۲)  $2a^2 | 5b^3$

(۳)  $a^2 | b^4$

(۴)  $a | b$

اکنون به چند مثال مهم از بخش پذیری می‌پردازیم:

**تست:** به ازای چند عدد صحیح مانند  $x$ ، رابطه  $x^4 - 4x^2 + 3 \mid x^4 - 4x^2 + 3$  برقرار است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

**تست:** چند عدد صحیح مانند  $a$  وجود دارد که عدد  $-4$  را می‌شمارد؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۶

**تست:** به ازای چند عدد صحیح مانند  $a$ ، دو عدد  $8m + 3$  و  $11m + 4$  همواره بر  $a$  بخش پذیرند؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) بیش از ۴

**تست:** اگر  $4k + 1 \mid 5$  و  $5k - 1 \mid 3$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱)  $15 \mid 5k^2 + k + 1$

(۲)  $15 \mid 5k^2 - k + 1$

(۳)  $15 \mid 5k^2 + k - 1$

(۴)  $15 \mid 5k^2 - k - 1$

**تست:** چند عدد صحیح مانند  $a$  وجود دارد به طوری که  $a \mid 20$  و  $a \mid 300$ ؟

(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۰

**مثال:** اگر  $a \mid 3n + 2$  و  $a \mid 5n - 3$ ، آنگاه  $a$  را بیابید.

**تست:** فرض کنید  $a$  و  $m$  عددهایی صحیح باشند.  $a \mid 5m + 7$  و  $a \mid 3m - 1$  کدام رابطه درست است؟

(۱)  $a \mid 26$ (۲)  $a \mid 22$ (۳)  $a \mid 16$ (۴)  $a \mid 14$ 

**مثال:** اگر  $a \mid n^2 + 2$  و  $a \mid 3n - 2$ ، آنگاه  $a$  را بیابید.

**تست:** اگر  $13 \mid 2a - 3b + 1$  و  $13 \mid a + 5b + k$ ، آنگاه کوچکترین مقدار طبیعی  $k$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۸

**تست:** اگر  $a - b \mid a$ ، آنگاه:

(۱)  $a \mid a - b$

(۲)  $b \mid a - b$

(۳)  $b \mid a$

(۴)  $a - b \mid b$

**تذکر:**

**تست:** به ازای چند مقدار طبیعی  $a$ ، عد  $a^2 + 2$  بر  $a + 2$  بخش پذیر است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) هیچ

**تست:** اگر  $a^2 - 2a + 1 \mid a - 2$ ، آنگاه برای  $a$  چند جواب طبیعی وجود دارد؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

**تست:** منحنی  $y = \frac{x^3 - 3}{x - 3}$  از چند نقطه با مختصات صحیح می‌گذرد؟

(۱) ۸

(۲) ۶

(۳) ۱۶

(۴) ۱۲

## یادآوری:

استفاده از برخی اتحادها در حل مسائل بخش‌پذیری:

(الف)

مثلاً:

(ب)

مثلاً:

(ج)

مثلاً:

---

جمع‌بندی مطالب گفته شده:

**تست:** عدد  $9^7 - 2^7$  بر کدام یک همواره بخش پذیر است؟

۹ (۱)

۷ (۲)

۱۱ (۳)

۵ (۴)

**تست:** عدد  $4^{2n+1} + 1$  بر کدام یک همواره بخش پذیر است؟

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

**تست:** عدد  $a^{12} + 1$  بر کدام یک همواره بخش پذیر است؟

$a^2 + 1$  (۱)

$a^3 + 1$  (۲)

$a^4 + 1$  (۳)

$a^6 + 1$  (۴)

**تست:** عدد  $a^{36} - 1$  بر کدام یک همواره بخش پذیر نیست؟

$a^9 - 1$  (۱)

$a^9 + 1$  (۲)

$a^4 - 1$  (۳)

$a^4 + 1$  (۴)

**تست:** تعداد عضوهای مجموعه  $\{n : 65 \mid 2^n + 1\}$  در مجموعه ی اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰ کدام است؟

۶ (۱)

۷ (۲)

۸ (۳)

۹ (۴)

**تست:** عدد  $25^{34} - 14^{34}$  بر کدام عدد بخش پذیر نیست؟

۳ (۱)

۱۱ (۲)

۱۳ (۳)

۱۷ (۴)



## قضیه تقسیم:

اگر  $a$  عددی صحیح و  $b$  عددی طبیعی باشد، آنگاه اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند  $r$  و  $q$  همواره وجود دارند بطوری که:

$a \rightarrow$  مقسوم

$b \rightarrow$  مقسوم علیه

$q \rightarrow$  خارج قسمت

$r \rightarrow$  باقی مانده

$$a = bq + r$$

و شرط تقسیم این است که :

$$0 \leq r < b \rightarrow 0 \leq r \leq b - 1$$

به عبارت دیگر:

یکی کمتر از مقسوم علیه  $\leq$  باقی مانده  $\leq 0$

تذکر:

توجه:

در قضیه تقسیم همواره داریم:  $q = \left[ \frac{a}{b} \right]$

نتیجه:

تعداد مضرب‌های مثبت عدد طبیعی  $b$  بین ۱ تا  $a$  برابر است با:  $\left[ \frac{a}{b} \right]$

مثال: تعداد مضرب‌های ۷ بین ۱ تا ۱۰۰ برابر است با؟

تست: چند عدد سه رقمی مضرب ۳۷ وجود دارد؟

(۱) ۲۷

(۲) ۲۶

(۳) ۲۵

(۴) ۲۴

## اکنون به حل چند مسأله مهم در تقسیم می پردازیم:

**مثال:** در یک تقسیم ۸۸ واحد به مقسوم و ۶ واحد به مقسوم علیه افزوده ایم، خارج قسمت تغییری نکرده است ولی باقیمانده ۲ واحد کم شده است. خارج قسمت این تقسیم را بیابید.

**مثال:** چند عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰ وجود دارد که در تقسیم بر عدد ۴ باقی مانده ی ۳ داشته باشد؟

**تست:** در تقسیم عدد طبیعی  $a$  بر ۳۷ باقی مانده تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کمتر است. بزرگترین مقدار  $a$  مضرب کدام است؟

(۱) ۹

(۲) ۱۲

(۳) ۱۴

(۴) ۱۶

**تست:** در تقسیم عدد  $a$  بر ۶۳ باقی مانده ۱۷ است. اگر ۶۰ واحد به  $a$  اضافه کنیم باقی مانده و خارج قسمت چه تغییری می کند؟

(۱) سه واحد کم می شود - یک واحد اضافه می شود.

(۲) سه واحد اضافه می شود - یک واحد اضافه می شود.

(۳) سه واحد اضافه می شود - تغییر نمی کند.

(۴) سه واحد کم می شود - دو واحد اضافه می شود.

**مثال:** در یک تقسیم مقسوم علیه  $53$  و باقی مانده  $18$  است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد به طوری که خارج قسمت تغییری نکند؟

---

**مثال:** اگر باقی‌مانده تقسیم  $a$  بر دو عدد  $7$  و  $8$  به ترتیب  $5$  و  $7$  باشد، باقی‌مانده تقسیم  $a$  را بر  $56$  بیابید؟  
(تمرین ۹ صفحه ۱۶ کتاب درسی)

---

**مثال:** باقی مانده تقسیم عدد صحیح  $a$  بر  $6$  و  $8$  به ترتیب  $3$  و  $5$  است. باقی مانده تقسیم  $a$  بر  $24$  چقدر است؟

**تست:** اگر باقی‌مانده تقسیم عددی بر ۶ و ۱۱ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۶۶، کدام است؟

(داخل ۹۸)

(۱) ۲۹

(۲) ۳۲

(۳) ۴۰

(۴) ۴۱

**مثال:** اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد  $m$  و  $n$  بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم

عدد  $(2m - 5n)$  بر ۱۷ را بدست آورید؟ (مثال صفحه ۱۴ کتاب درسی)

اگر روی پارامتر مساله محدودیت داشته باشیم (محدودیت‌ها نظیر زوج و فرد بودن، مضرب عددی بودن یا

نبودن، مربع کامل، عددی اول و ....) می‌توان از **مقدار دهی** استفاده کرد.

**تذکر:**

**مثال:** باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح  $a$  بر ۱۷ برابر ۱۱ است. اگر  $a$  مضرب ۳ باشد، باقی‌مانده ی تقسیم  $\frac{a}{3}$  بر ۱۷ چقدر

است؟

**مثال:** در تقسیم عدد  $a$  بر عدد طبیعی  $b$ ، باقی مانده ۱۷ و خارج قسمت ۲۵ می باشد. اگر  $a$  مضرب ۶ باشد، رقم دهگان کوچک‌ترین عدد طبیعی  $a$  کدام است؟

## بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد (ب.م.م)

مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های دو عدد ۱۲ و ۱۸ را در نظر بگیرید:

$$۱۲ \text{ مقسوم‌علیه‌های } = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

$$۱۸ \text{ مقسوم‌علیه‌های } = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$$

مجموعه‌ی شمارنده‌های مشترک دو عدد ۱۲ و ۱۸ برابر است با:

$$۱۲ \text{ و } ۱۸ \text{ مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد } = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

در میان این عددها، عدد ۶ از همه بزرگ‌تر است. می‌گوییم بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۱۲ و ۱۸ برابر ۶ بوده و آن را به صورت  $(۱۸, ۱۲) = ۶$  نشان می‌دهیم.

**تعریف:** عدد طبیعی  $d$  را ب.م.م دو عدد صحیح  $a$  و  $b$  می‌نامیم (  $a$  و  $b$  هر دو با هم صفر نیستند و می‌نویسیم  $(a, b) = d$  )، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

(الف)  $d \mid a, d \mid b$  (یعنی  $d$  مقسوم‌علیه هر دو تا باشد)

(ب)  $\forall m > 0; m \mid a, m \mid b \Rightarrow m \leq d$  (  $d$  کوچک‌تر باشند )؛  $m \mid a, m \mid b \Rightarrow m \leq d$

دو عدد  $a$  و  $b$  را نسبت به هم اول یا متباین می‌گوییم، هرگاه:  $(a, b) = 1$   
یا به بیان دیگر، دو عدد، عامل مشترک بزرگ‌تر از ۱ نداشته باشند.

**تذکر:**

پیدا کردن ب.م.م  $f(n)$  و  $g(n)$ :

ابتدا ب.م.م را  $d$  فرض می‌کنیم و می‌نویسیم  $d \mid f(n)$  و  $d \mid g(n)$  سپس با استفاده از کوچک‌ترین ترکیب خطی ممکن توجه کنید  $f(n)$  و  $g(n)$  را به توان نمی‌رسانیم  $n$  را از بین آن دو حذف می‌کنیم تا یک عدد معلوم در طرف راست بماند. در این صورت  $d$  مقسوم علیه‌های آن عدد معلوم است.

**تذکر:** ممکن است همه‌ی جواب‌های به دست آمده برای  $d$ ، قابل قبول نباشد باید کنترل شود.

**مثال:** اگر  $a \in \mathbb{Z}$ ، حاصل  $(5a + 2, 3a - 1)$  ؟

**مثال:** اگر  $a \in \mathbb{Z}$ ، حاصل  $(2a - 1, 2a + 5)$  ؟

**نکته مهم:**

**تست:** اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی  $n$ ، دو عدد  $12n + 7$  و  $5n - 2$  دارای مقسوم علیه مشترک غیر ۱ باشند، آنگاه بزرگترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

۵۹ (۱)

۶۷ (۲)

۸۳ (۳)

۸۹ (۴)

**تست:** اگر عدد طبیعی  $n$  مضرب ۷ نباشد، بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد  $n^2 + 9n + 21$  و  $n + 7$  کدام

است؟

۱ (۱)

۱۰۳ (۲)

۱۰۵ (۳)

۷ (۴)

**تست:** اگر  $n$  عدد طبیعی و دو عدد  $9n - 5$  و  $n + 4$  دارای مقسوم علیه مشترک غیر ۱ باشند، تعداد اعداد دو رقمی  $n$

کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

**تست:** به ازای چند عدد طبیعی  $n$  هر دو عدد  $7n + 5$  و  $11n + 2$  مقسوم علیه مشترکی برابر ۳ دارند؟

(۱) هیچ عدد

(۲) یک عدد

(۳) دو عدد

(۴) بی شمار عدد

**تست:** به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی  $n$ ، دو عدد به صورت های  $25n + 9$  و  $11n + 4$  نسبت به هم اولند؟

۸۶ (۱)

۸۷ (۲)

۸۹ (۳)

۹۰ (۴)

## چگونه ب.م.م دو عدد را پیدا کنیم؟

**مثال:** ب.م.م ۶۸ و ۷۲ را بیابید؟

## پیدا کردن ب.م.م به روش نردبانی:

اگر تجزیه ی اعداد سخت بود بهترین کار، روش نردبانی است مثلاً محاسبه ی  $(۱۶۱, ۲۵۳)$

| q   | ۱   | ۱  | ۱  | ۳                       |
|-----|-----|----|----|-------------------------|
| ۲۵۳ | ۱۶۱ | ۹۲ | ۶۹ | ۲۳ $\Rightarrow d = ۲۳$ |
| r   | ۹۲  | ۶۹ | ۲۳ | (۰) stop                |

و اما روش کار به این صورت است که عدد بزرگ را بر عدد کوچک تقسیم می کنیم و باقی مانده را پیدا می کنیم. سپس عدد کوچک را بر این باقی مانده تقسیم می کنیم و همین طور کار را ادامه می دهیم. آخرین باقی مانده ی غیر صفر، جواب است.

## نکات مهم ب.م.م

دو طرف ب.م.م را می توان "در هر عدد صحیح (غیر صفر) ضرب کرد یا به توان هر عدد طبیعی رساند."

$$\text{الف) } (a, b) = d \xrightarrow[k \neq 0]{k \in \mathbb{Z}} (ka, kb) = |k| d$$

$$\text{ب) } (a, b) = d \xrightarrow{\forall n \in \mathbb{N}} (a^n, b^n) = d^n$$

## مثال عددی:

$$(۴۹) = ۷ \begin{cases} \xrightarrow{\times ۳} (۴ \times ۳, ۹ \times ۳) = ۱۲ \times ۳ \\ \xrightarrow{\text{توان ۲}} (۴^۲, ۹^۲) = ۱۶ \times ۹ \end{cases}$$



**مثال:** اگر  $(a^3, b^3) - (-4a, -4b) = 0$  آنگاه  $(a, b)$  کدام است؟

**نتیجه:** عمل فاکتورگیری در محاسبه ی ب.م.م مجاز است.

**تست:** اگر  $b$  عددی فرد باشد و  $a | b$ ، آنگاه بزرگترین مقسوم علیه مشترک  $ab$  و  $12a^2$  کدام است؟

(۱)  $6a$

(۲)  $6a^2$

(۳)  $6ab$

(۴)  $12ab$

**مهم:**  $a | b \Leftrightarrow (ab) = |a|$

اگر  $a = bq + r$  ( $0 \leq r < b$ )، آنگاه:

به عبارت دیگر در قضیه تقسیم همواره داریم:

**مثال عددی:**

**تست:** اگر دو عدد  $a-1$  و  $a^2 + 3a + 1$  نسبت به هم اول باشند، کدام نتیجه گیری همواره درست است؟

$$(1) a = 5k$$

$$(2) a = 5k + 1$$

$$(3) a \neq 5k$$

$$(4) a \neq 5k + 1$$

## کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد (ک.م.م)

مضرب‌های طبیعی دو عدد ۱۲ و ۱۸ را در نظر بگیرید:

$$12 \text{ مضارب طبیعی } = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, \dots\}$$

$$18 \text{ مضارب طبیعی } = \{18, 36, 54, 72, \dots\}$$

$$\text{مضارب مشترک} = \{36, 72, \dots\}$$

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد برابر ۳۶ می‌شود. می‌گوییم ک.م.م دو عدد ۱۸ و ۱۲ برابر ۳۶ می‌شود و می‌نویسیم:  $[12, 18] = 36$

پس یادتان باشد که ب.م.م، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک است، اما ک.م.م کوچک‌ترین مضرب مشترک.

**تعریف:** عدد طبیعی  $c$  را ک.م.م دو عدد ناصفر  $a$  و  $b$  می‌نامیم و می‌نویسیم  $[a, b] = c$  هرگاه دو شرط زیر برقرار

باشد:

(الف)  $a | c, b | c$  (یعنی  $c$  مضرب هر دو عدد  $a$  و  $b$  باشد)

(ب) اگر  $m$ ، مضرب دیگری از  $a$  و  $b$  باشد،  $c \leq m$  (حتماً از آن کوچکتر باشد)  $a | m, b | m \Rightarrow c \leq m$   $\forall m > 0$

یک نکته‌ی خیلی مهم، این‌جا داریم: اگر  $a | b$ ، آن‌گاه ب.م.م دو عدد، برابر  $|a|$  (کوچک‌تره) و ک.م.م، برابر  $|b|$  (بزرگ‌تره)

$$a | b \Rightarrow \begin{cases} (a, b) = |a| \\ [a, b] = |b| \end{cases} \text{ می‌شود، یعنی:}$$

مثلاً  $(3, 6) = 3$ ، اما  $[3, 6] = 6$  یا  $(11, 33) = 11$ ، ولی  $[11, 33] = 33$  می‌شود.



محاسبه ک.م.م.:

چگونه ک.م.م. دو عدد را پیدا کنیم؟

**تست:** ک.م.م. ۹۰ و ۱۲۵ را محاسبه کنید؟

**تست:** حاصل  $((4a^2, 8a^3], (2a, 24a^2))$  کدام است؟

(۱)  $8 | a^3 |$

(۲)  $2a$

(۳)  $2 | a |$

(۴)  $4a^2$

**تست:** کدام گزینه نادرست است؟

$$(n, n+1) = 1 \quad (۱)$$

$$[n, n+1] = n^2 + n \quad (۲)$$

$$(2n+1, 2n+3) = 2 \quad (۳)$$

$$(2n, 2n+2) = 2 \quad (۴)$$

**تست:** با توجه به نمادهای «بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک» عدد

$$[ (627, 429), 154 ]$$

کدام است؟ (فراہ ۹۸)

$$462 \quad (۱)$$

$$478 \quad (۲)$$

$$506 \quad (۳)$$

$$924 \quad (۴)$$

## افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

می‌دانیم در تقسیم بر ۲، باقی‌مانده ممکن است ۱ یا صفر بشود، پس عددها یا فردند و یا زوج؛ از این‌جا مجموعه عددهای صحیح را می‌توانیم به دو دسته افراز کنیم؛ عددهای فرد که آن را به صورت  $2k+1$  نشان می‌دهیم و عددهای زوج که آن را با  $2k$  نمایش می‌دهیم.

$$\mathbb{Z}$$

|      |        |
|------|--------|
| $2k$ | $2k+1$ |
|------|--------|

به همین ترتیب در تقسیم به ۳، مجموعه‌ی  $\mathbb{Z}$  به سه دسته افراز می‌شود:

$3k$  : عددهای مضرب ۳

$3k+1$  : عددهایی که در تقسیم به ۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند.

$3k+2$  : عددهایی که در تقسیم به ۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند.

|      |        |        |
|------|--------|--------|
| $3k$ | $3k+1$ | $3k+2$ |
|------|--------|--------|

و به همین ترتیب در تقسیم به  $m$ ، مجموعه‌ی  $\mathbb{Z}$  به  $m$  دسته افراز می‌شود.

| $mk$            | $mk+1$                                                    | $mk+2$                                                   | ... | $mk+(m-1)$                                                    |
|-----------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----|---------------------------------------------------------------|
| عددهای مضرب $m$ | عددهایی که در تقسیم به $m$ ، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند. | عددهای که در تقسیم به $m$ ، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند. |     | عددهایی که در تقسیم به $m$ ، باقی‌مانده‌ای برابر $m-1$ دارند. |

**تست:** اگر  $P$  یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد که در تقسیم به ۶، باقی‌مانده‌اش برابر ۱ نباشد، باقی‌مانده‌ی آن در

تقسیم به ۶ کدام است؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

## همنهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

وقتی می‌نویسیم  $a \equiv b^m$  می‌گوییم  $a$  به پیمانه (سنج)  $m$  با  $b$  همنهشت است.

وقتی می‌گوییم  $a$  به پیمانه  $m$  با  $b$  همنهشت است یعنی:

وقتی می‌گوییم  $a$  به پیمانه‌ی  $m$  با  $b$  همنهشت است یعنی:

وقتی می‌گوییم  $a$  به پیمانه‌ی  $m$  با  $b$  همنهشت است یعنی:

**توجه:** پیمانه همیشه عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ است.

۱۲

**تست:** کدام دو عدد در هم نهشتی  $a \equiv b$  صادق است؟

(۱) ۶۳ و ۲۰

(۲) ۱۲ و ۲۳

(۳) ۵۹ و ۲۳

(۴) ۲۴ و ۵۹

۶

**تست:** از رابطه  $x \equiv ۸$  کدام رابطه نتیجه می‌شود؟

(۱)  $۶ \mid x - ۱$

(۲)  $۶ \mid x - ۲$

(۳)  $۶ \mid x - ۳$

(۴)  $۶ \mid x - ۴$

**ویژگی‌های هم‌نهشتی:****ویژگی (۱):** دو طرف رابطه هم‌نهشتی را می‌توان با یک عدد صحیح جمع یا تفریق کرد:

$$a \equiv b \xrightarrow{m} \begin{cases} a + c \equiv b + c \\ a - c \equiv b - c \end{cases}$$

**مثال عددی:**

$$۵ \equiv ۷ \xrightarrow{۲} \begin{cases} ۵ + ۹ \equiv ۷ + ۹ \\ ۵ - ۳ \equiv ۷ - ۳ \end{cases}$$

**ویژگی (۲):** دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان در یک عدد صحیح ضرب کرد.

$$a \equiv b \xrightarrow{m} ac \equiv bc$$

**مثال عددی:**

$$۵ \equiv ۷ \xrightarrow{۲} ۵ \times ۵ \equiv ۷ \times ۵$$

**ویژگی (۳):** دو طرف یک رابطه همنهشتی را می‌توان به توان هر عدد طبیعی رساند.

$$a \equiv b \rightarrow a^m \equiv b^m$$

**مثال عددی:**

$$5 \equiv 3 \rightarrow 5^2 \equiv 3^2$$

**ویژگی (۴):** دو طرف دو یا چند رابطه همنهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند را می‌توان باهم جمع، تفریق یا ضرب کرد.

$$a \equiv b \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d \\ a - c \equiv b - d \\ ac \equiv bd \end{cases}$$

**مثال عددی:**

$$5 \equiv 7 \Rightarrow \begin{cases} 5 + 9 \equiv 7 + 11 \\ 5 - 9 \equiv 7 - 11 \\ 5 \times 9 \equiv 7 \times 11 \end{cases}$$

**ویژگی (۵):** همواره می‌توان به دو طرف یا یک طرف رابطه همنهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.

$$a \equiv b \rightarrow \begin{cases} a + mk \equiv b + mt \\ a - mk \equiv b - mt \end{cases}$$

**مثال عددی:**

$$5 \equiv 7 \xrightarrow{2 \text{ برابر پیمانه به راست اضافه}} 5^2 \equiv 7^2$$

$$5 \equiv 7 \xrightarrow{-3 \text{ برابر پیمانه به چپ}} -1 \equiv 7$$

در حل مسائل همنهشتی همواره می‌توان به جای هر جزء، باقی‌مانده تقسیم آن بر پیمانه (یا عدد همنهشت آن، چه مثبت، چه منفی) را قرار داد نتیجه می‌شود که همواره می‌توانیم مضارب پیمانه را حذف کنیم.

**توجه مهم:**

**مثال:**

$$2 + 3 + 259500 + 11 + 125 + 13^5 \equiv$$

**تست:** دو عدد ۶۸ و ۱۴۵ در تقسیم بر عدد طبیعی  $m \neq 1$  باقی مانده ی یکسان دارند. باقی مانده ی تقسیم ۱۶۰ بر  $m$  ؟

۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

**مثال:** باقی مانده ی تقسیم  $a$  بر ۱۳ برابر ۹ است. باقی مانده ی تقسیم  $a^2 - 2a$  بر ۱۳ کدام است؟

**مثال:** اگر  $a = 5k + 3$ ، آنگاه باقی مانده ی تقسیم  $a + a^2 + a^3 + a^4$  بر ۵ کدام است ؟

**مثال:** باقی مانده تقسیم  $\sum_{n=1}^{100} n!$  بر ۱۲ ؟



**تست:** باقی مانده‌ی تقسیم  $1! + 2! + 3! + \dots + 1390!$  بر ۹۰ کدام است؟

۶۳ (۱)

۲۷ (۲)

۰ (۳)

۱۰ (۴)

**تست:** اگر باقی مانده  $a$  بر ۱۷ برابر ۲ باشد، باقی مانده  $1 + 3a^3$  بر ۱۷ کدام است؟

۲ (۱)

۴ (۲)

۸ (۳)

۲۵ (۴)

**استراتژی کلی بدست آوردن باقی مانده تقسیم اعداد توان دار**

**مثال:** باقی مانده تقسیم عدد  $3^{62}$  بر ۱۳ ؟

**مثال:** باقی مانده تقسیم  $2^{41}$  بر ۲۱ ؟

**مثال:** باقی مانده تقسیم  $3^{48}$  بر ۱۱ ؟

**مثال:** باقی مانده تقسیم  $3^{51}$  بر ۸۰ ؟

**مثال:** باقی مانده تقسیم  $3^{57}$  بر ۷ ؟

**مثال:** باقی مانده تقسیم  $2^{500}$  بر ۱۳ ؟

**تست:** باقی مانده تقسیم  $2^{243}$  بر ۳۱ کدام است ؟

۲ (۱)

۴ (۲)

۸ (۳)

۱۶ (۴)

**مثال:** باقی مانده تقسیم  $16(185)$  بر ۷ ؟

**تست:** باقی مانده تقسیم عدد  $5^{20}$  بر ۴۱. کدام است؟ (۹۸ هـ)

۱ (۱)

۴ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

**مثال:** اگر عدد  $a$  مضرب ۱۶ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم

$$(17a+1)^F + (17a+2)^F + (17a+3)^F + (17a+4)^F + (17a+5)^F$$

بر ۴ ؟

**تست:** به ازای کدام مقادیر  $n$  از عدد طبیعی، عبارت  $1 + 5^{3n+2} + 5^{6n+4}$ ، بر عدد ۳۱ بخش پذیر است؟ (دافل ۹۶)

۱) فقط اعداد فرد

۲) فقط اعداد زوج

۳) فقط اعداد مضرب ۵

۴) تمام اعداد

**تست:** باقی مانده  $23 + 35^{17} = A$  بر ۱۷ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۵

(۴) ۷

**تست:** باقی مانده  $23 + 15 \times 1000^{99} = A$  بر ۱۳ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۸

**تست:** باقی مانده ی تقسیم  $(a + 1386)^3 + (a + 1382)^3 + \dots + (a + 1381)^3$  بر ۶؟

**ویژگی (۶):** اگر عدد پیمانه را بشمارد، می تواند به جای پیمانه قرار گیرد.

$$a \equiv b \xrightarrow[n|m]{m} a \equiv b$$

**نتیجه:**

**مثال:** باقی مانده ی تقسیم  $a$  بر ۸ برابر ۷ است. باقی مانده تقسیم  $(2a + 1)$  بر ۴؟

۳۶

**تست:** اگر رابطه  $x \equiv 25$  درست باشد، کدام گزینه درست نیست؟

۱۸  
 $x \equiv 7 \ (1)$

۱۲  
 $x \equiv 1 \ (2)$

۹  
 $x \equiv 7 \ (3)$

۱۸  
 $x \equiv 1 \ (4)$

**ویژگی (۷):** (ارتباط همنهشتی و ب.م.م.)

$$a \equiv b \pmod{m} \iff (a, m) = (b, m)$$

۳۰

**مثال:** اگر  $(b, 15) = 3$  و  $a \equiv 2b$ ، آنگاه  $a$  کدام عدد می‌تواند باشد؟

۳۰ (۱)

۳۹ (۲)

۴۵ (۳)

۴۸ (۴)

**ویژگی (۸):** پیمانه‌های مرکب

$$\left\{ \begin{array}{l} m \\ a \equiv b \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n \\ a \equiv b \end{array} \right\}$$

**نتیجه:** در محاسبه‌ی باقی مانده‌ی تقسیم اعداد تواندار بر  $m$ ، اگر  $m$  مرکب بود به جای  $m$  یک مقسوم علیه آن را قرار دهید ( $m$  را لاغر کنید) فقط باید آن مقسوم علیه را طوری انتخاب کنید که گزینه‌ها در پیمانه‌ی جدید، متفاوت شوند.

**تست:** باقی مانده تقسیم عدد  $7^{100}$  بر ۱۵ کدام است؟

۱۴ (۱)

۴ (۲)

۱۱ (۳)

۱ (۴)

**تست:** باقی مانده تقسیم  $a$  بر ۱۲ برابر ۸ و بر ۱۱ برابر ۳ است. باقی مانده تقسیم  $a$  بر ۳۳ کدام است؟

(۱) ۲۴

(۲) ۹

(۳) ۱۹

(۴) ۱۴

### چند پیمانه‌ای‌ها:

اگر بیش از دو پیمانه در مسأله وجود داشت اما طرف دوم همنهشتی‌ها برابر نبود معمولاً با اضافه کردن قرینه‌ی پیمانه یا مضارب مناسب پیمانه به طرف دوم همنهشتی‌ها، طرف دوم‌ها یکسان می‌شوند و آن وقت می‌توانید از پیمانه‌ها ک.م.م بگیرید.

**تست:** باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد  $a$  بر ۱۲ و ۱۵ و ۳۲ به ترتیب ۵ و ۸ و ۲۵ است. مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد  $a$  کدام

است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۱۳

(۳) ۱۴

(۴) ۱۵

**تست:** باقی مانده‌ی تقسیم عددی بر اعداد ۱۱ و ۱۴ و ۱۵ به ترتیب ۵ و ۸ و ۹ می‌باشد، کوچک‌ترین مقدار ممکن برای این

عدد، مضرب کدام عدد است؟ (۸۹ هـ)

(۱) ۳۶

(۲) ۳۸

(۳) ۴۲

(۴) ۴۵

ویژگی (۹): تقسیم دو طرف همنهشتی بر یک عدد صحیح

مثال عددی:

$$48 \equiv 30 \pmod{9} \xrightarrow{\div 6}$$

اثبات

$$\left\{ \begin{array}{l} ac \equiv bc \pmod{m} \Rightarrow m \mid ac - bc \rightarrow m \mid c(a - b) \rightarrow \frac{m}{d} \mid \frac{c}{d}(a - b) \\ (m, c) = d \rightarrow \left( \frac{m}{d}, \frac{c}{d} \right) = 1 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} \frac{m}{d} \mid (a - b) \rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

با توجه به آنچه گفته شد می‌فهمیم که:

**تست:** از رابطه‌ی هم نهشتی  $15a \equiv 20b \pmod{30}$  کدام نتیجه‌گیری همواره درست نیست؟

(۱)  $3a \equiv 4b \pmod{30}$

(۲)  $3a \equiv 4b \pmod{6}$

(۳)  $b \equiv 0 \pmod{3}$

(۴)  $a \equiv 0 \pmod{2}$

**تست:** از رابطه‌ی هم نهشتی  $8a \equiv 64 \pmod{12}$  کدام تساوی حاصل می‌شود؟

(۱)  $a + 8 = 3k$

(۲)  $a + 5 = 3k$

(۳)  $a + 2 = 3k$

(۴)  $a + 1 = 3k$

**تست:** اگر  $(a^2 - 1, m) = 1$  و  $a^2 - 1 \equiv a^m - 1$ ، آنگاه:

$$m \mid a - 1 \quad (۱)$$

$$m \mid a + 1 \quad (۲)$$

$$m \mid a - 2 \quad (۳)$$

$$m \mid a + 2 \quad (۴)$$

**تست:** از رابطه هم‌نهشتی  $۷۲x \equiv ۴۸$  کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

$$۹x \equiv ۶ \quad (۱)$$

$$۳x \equiv ۲ \quad (۲)$$

$$x \equiv -۱ \quad (۳)$$

$$۹x \equiv ۶ \quad (۴)$$

### بسط دو جمله‌ای خیام

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

با توجه به بسط دو جمله‌ای خیام ثابت می‌شود که:

$$(a + b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$$

**تست:** عدد  $۲^{۲n} \times ۳^n - ۲^{۲n} - ۲^{۳n}$  بر کدام یک از عددهای زیر همواره بخش‌پذیر است؟

$$۳۰ \quad (۱)$$

$$۳۱ \quad (۲)$$

$$۳۲ \quad (۳)$$

$$۳۳ \quad (۴)$$



**تست:** ثابت کنید عدد  $11^{51} - 11^{51} - 11^{51}$  بر  $132$  بخش پذیر است؟ (تمرین صفحه ۲۹ کتاب درسی)

## کلاس های هم نهشتی

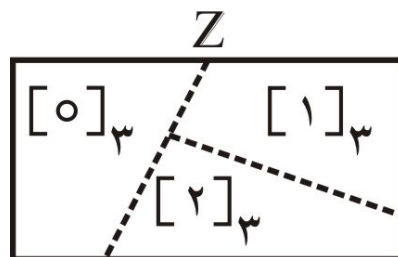
می دانیم هر رابطه ی هم ارزی مجموعه ای را که روی آن تعریف شده است به کلاس های هم ارزی افراز می کند و چون هم نهشتی یک رابطه ی ارزی است و روی  $\mathbb{Z}$  تعریف شده است، لذا مجموعه ی  $\mathbb{Z}$  را به کلاس های هم ارزی افراز می کند که به آنها کلاس های هم نهشتی نیز گفته می شود به طور کلی داریم:

قضیه:

تعریف کلاس هم نهشتی:

**مثال عددی:** رابطه ی هم نهشتی به پیمانه ی ۳ را در نظر می گیریم. داریم:

$$\text{کلاس } 3 \left\{ \begin{array}{l} [0]_3 = \left\{ x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod{3} \right\} \rightarrow 3k \\ [1]_3 = \left\{ x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1 \pmod{3} \right\} \rightarrow 3k + 1 \\ [2]_3 = \left\{ x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2 \pmod{3} \right\} \rightarrow 3k + 2 \end{array} \right.$$



$$a \in [b]_m \leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

**نکته ۱:** «مفهوم تعلق به یک کلاس هم نهشتی»

**تست:** عدد ۲۰۹- به کدام کلاس هم نهشتی به پیمانه ۱۲ تعلق دارد؟

(۱) [۷]

(۲) [-۷]

(۳) [۹]

(۴) [-۹]

**تست:** کدام عدد، عضوی از  $[۹]_{۱۳}$  است؟

(۱) ۹۷

(۲) ۹۸

(۳) ۹۹

(۴) ۱۰۰

**نکته:**

$$a, b, c, \dots, E \in [k]_m \leftrightarrow a \equiv b \equiv c \equiv \dots$$

چند عدد متعلق به یک کلاس هم نهشتی، یعنی همگی به پیمانه‌ی داده شده هم نهشت‌اند.

**تست:** دو عدد ۲۴ و ۱۸۵ در یک دسته‌ی هم ارزی به پیمانه‌ی  $m$  هم نهشت‌اند. اگر  $(m, ۷) = ۱$ ، باقی مانده تقسیم عدد

$m^m$  بر ۷ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

**تست:** اگر سه عدد ۱۱، ۱۹ و ۳۱، عضو یک کلاس هم نهشتی به پیمانه  $m$  باشند، بزرگ‌ترین مقدار  $m$  کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۸

(۳) ۱۲

(۴) ۲۰

**تست:** رابطه‌ی هم‌ارزی  $R = \{ (x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, m \mid x - y \}$  مجموعه‌ی  $\mathbb{Z}$  را به ۵ کلاس هم‌ارزی افراز کرده است. کدام دو عدد در یک کلاس قرار دارند؟

- (۱) ۱۵ و ۱۲
- (۲) ۱۲ و ۳۷
- (۳) ۲۵ و ۱
- (۴) ۳۷ و ۱

**تست:** در رابطه هم‌باقی مانده بر ۱۱ عدد  $5^{10}$  به کدام دسته هم‌ارزی تعلق دارد؟ (داخل ۹۱)

- (۱) [۱]
- (۲) [۳]
- (۳) [۵]
- (۴) [۷]

**تست:** در همنهشتی به پیمانه‌ی  $m$  سه عدد  $a, ۴۱$  و  $۱۳۲$  در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند، کوچک‌ترین عدد سه رقمی  $a$  بطوری که مجموعه‌ی  $\mathbb{Z}$  به تعداد کم‌تری کلاس هم‌ارزی افراز شود، کدام است؟

- (۱) ۱۰۲
- (۲) ۱۰۳
- (۳) ۱۰۴
- (۴) ۱۰۶

**تست:** همه عددهای صحیح به فرم  $۲۸k + ۵۷$ ، عضو کدام کلاس هم‌نهشتی بر پیمانه ۷ هستند؟

- (۱) [۱]
- (۲) [۲]
- (۳) [۴]
- (۴) [۵]

## کاربردهای همنهشتی

**کاربرد ۱:** پیدا کردن باقی‌مانده بر بعضی اعداد خاص بدون عمل تقسیم.

بخش پذیری بر اعداد خاص  $[10^n - 1]$ :

(۱) **قانون ۹ و ۳:** عددی بر ۹ (یا ۳) بخش پذیر است که مجموع ارقامش بر این اعداد بخش پذیر باشد.

(۲) **قانون ۹۹ و ۳۳:** برای پیدا کردن باقی مانده ی یک عدد بر ۹۹ (یا ۳۳) ارقام عدد را از سمت راست دوتا دوتا جدا کرده و با هم جمع می کنیم. (در این مورد بهتر است اعداد را زیر هم به صورت ستونی بنویسید.)

(۳) **قانون ۹۹۹ و ۲۷ و ۳۷:** برای پیدا کردن باقی مانده ی یک عدد بر ۹۹۹ و مقسوم علیه های آن از جمله ۲۷ و ۳۷، ارقام عدد را از سمت راست سه تا سه تا جدا کرده و جمع می کنیم.

**تست:** عدد شش رقمی  $\overline{a62b29}$  بر عدد ۹۹ بخش پذیر است. رقم  $a$  کدام است؟

- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)

**تست:** اگر عدد طبیعی پنج رقمی  $\overline{5abb6}$  به عدد ۹۹ بخش پذیر باشد، رقم  $b$  کدام است؟

- ۴ (۱)
- ۶ (۲)
- ۷ (۳)
- ۸ (۴)

بخش پذیری بر اعداد خاص  $[10^n + 1]$ :

**(۱) قانون ۱۱:** برای پیدا کردن باقی مانده‌ی یک عدد بر ۱۱، ارقام آن را از سمت راست یک در میان مثبت و منفی

$$\overset{11}{25432} \equiv 2 - 3 + 4 - 5 + 2 \equiv 0$$

می‌نویسیم:

**(۲) قانون ۱۰۱:** برای پیدا کردن باقی مانده‌ی یک عدد بر ۱۰۱، ارقام آن را از سمت راست دوتادوتا جدا کرده و یک در

$$\overset{101}{25342} \equiv 42 - 53 + 2 \equiv -9 \equiv 92$$

میان مثبت و منفی می‌نویسیم:

**(۳) قانون ۱۰۰۱ و ۷ و ۱۳:** برای پیدا کردن باقی مانده‌ی یک عدد بر ۱۰۰۱ و مقسوم علیه‌های آن مخصوصاً ۷ و ۱۳، ارقام

ارقام عدد را از سمت راست سه تا سه تا جدا کرده و یک در میان مثبت و منفی می‌نویسیم.

**تست:** عدد پنج رقمی  $\overline{alaba}$  بر ۷ بخش پذیر است. رقم  $b$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۸

بخش پذیری بر اعداد خاص  $[10^n]$ :

**(۱) قانون ۱۰ و ۲ و ۵:** عددی بر ۱۰ و ۲ و ۵ بخش پذیر است که رقم سمت راست بر این اعداد بخش پذیر باشد.

**(۲) قانون ۱۰۰ و ۴ و ۲۵:** عددی بر ۱۰۰ و ۴ و ۲۵ بخش پذیر است که دو رقم سمت راست آن بر این اعداد بخش پذیر باشد.

**(۳) قانون ۱۰۰۰ و ۸ و ۱۲۵:** عددی بر ۱۰۰۰ و ۸ و ۱۲۵ بخش پذیر است که سه رقم سمت راست آن بر این اعداد بخش پذیر باشد.

**نکته:** اعدادی که قانون بخش پذیری ندارند مثل ۴۴ یا ۳۶ و ... را به حاصلضرب دو عدد نسبت به هم اول تجزیه می‌کنیم.

**تست:** اگر یک عدد چهار رقمی به صورت  $a\overline{7}b$  مضرب ۴۴ باشد ولی مضرب ۵۵ نباشد، آنگاه  $a + b$  کدام است؟

(۱) ۱۱

(۲) ۱۲

(۳) ۱۳

(۴) ۱۴

**تست:** عدد شش رقمی  $\overline{ababab}$  ممکن است مضرب کدام عدد نباشد؟

(۱) ۷

(۲) ۱۳

(۳) ۳۱

(۴) ۳۷

**چگونه رقم یکان یک عدد را به دست آوریم؟**

قضیه نیوتن:

مثال عددی:

به طور کلی داریم:

$$a^r \equiv a^{k+r} \pmod{m}$$

**تست:** رقم یکان هر عدد طبیعی با رقم یکان کدام یک از توان های خودش همواره برابر است؟

(۱) توان سوم

(۲) توان چهارم

(۳) توان پنجم

(۴) توان ششم

**تست:** اگر  $a^p = 10k + 7$ ، آنگاه رقم یکان عدد  $a^{p+4}$ ؟

(۱) ۱

(۲) ۳

(۳) ۶

(۴) ۷

## نتیجه مهم از قانون نیوتن:

برای پیدا کردن رقم یکان:

(۱) پایه هر چند رقمی که باشد فقط یکان آن را در نظر می‌گیریم

(۲) توان هر چه باشد بر ۴ تقسیم کرده و باقی مانده حاصل را به جای توان قرار می‌دهیم و اگر باقی مانده صفر شد به جای آن ۴ می‌گذاریم.

تمرین: رقم یکان هر یک از اعداد زیر را بیابید.

$$۷^{۱۷} \times ۴ \text{ (الف)}$$

$$۱ + ۲^{۱۰۱} + ۳^{۱۰۲} + ۴^{۱۰۳} \text{ (ب)}$$

$$۱۳^{۱۵} \text{ (ج)}$$

$$(۸۴۸۷۲۹۷)^{۱۲۳۴۷} \text{ (د)}$$

$$۱۸^{۲۰} \text{ (ه)}$$





**مثال:** اگر دو عدد  $(3a - 5)$  ,  $(4a - 7)$  رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد  $(9a + 6)$  را بدست آورید؟

(تمرین ۱۰ صفحه ۲۹ کتاب درسی)

**مثال:**  $A = 1! + 2! + 3! + \dots + 500!$  بر ۱۰ را بدست آورید؟ (تمرین ۱۱ صفحه ۲۹ کتاب درسی)

## کاربرد ۲: تقویم نگاری

فرض کنید که بدانیم یکی از روزهای سال، چند شنبه است. با هم‌نهشتی می‌توانیم تعیین کنیم که هر تاریخ دیگری، چند شنبه می‌شود. دلیل خیلی ساده است؛ مثلاً فرض کنید ۳ فروردین، شنبه باشد. خب اگر ۷ روز برویم جلو، یعنی ۱۰ فروردین باز هم شنبه می‌شود یا ۱۷ فروردین هم شنبه است. واضح است که این اعداد به پیمانه ۷، هم‌نهشت هستند.

**تست:** اگر شانزدهم آذر سالی، سه شنبه باشد، چهاردهم اسفند همان سال چند شنبه است؟

(۱) شنبه

(۲) یک‌شنبه

(۳) دوشنبه

(۴) سه‌شنبه

**مثال:** اگر اول مهرماه یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفند در همان سال چه روزی از هفته است؟

**مثال:** اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد در همان سال چه روزی از هفته است؟

### کاربرد ۳: معادله هم‌نهشتی:

به شکل کلی روبرو مطرح است:

$$\begin{matrix} m \\ ax \equiv b \end{matrix}$$

$$(a, b \in \mathbb{Z})$$

$\xrightarrow{\text{تعریف}} ax \equiv b^m$

**نتیجه:**

**مثال عددی:**

معادله هم‌نهشتی  $4x \equiv 3^2$  جواب ندارد، زیرا:

معادله هم‌نهشتی  $4x \equiv 2^3$  جواب دارد، زیرا:

## روش حل معادله‌ی هم‌نهشتی

**تست:** معادله‌های هم‌نهشتی زیر را حل کنید.

$$۷ \\ ۲x \equiv ۱ \text{ (الف)}$$

$$۱۳ \\ ۵x \equiv ۳ \text{ (ب)}$$

$$۹ \\ ۶x \equiv ۱۵ \text{ (ج)}$$

$$۱۱ \\ ۴۲۳x \equiv ۷۹ \text{ (د)}$$

$$۱۲ \\ ۸x \equiv ۲۰ \text{ (هـ)}$$

$$۶ \\ ۵۱x \equiv ۱۱ \text{ (و)}$$

**تست:** معادله ی همنهشتی  $۷۲x \equiv ۱ \pmod{۳۱}$  در مجموعه ی اعداد طبیعی سه رقمی چند جواب دارد؟ (۹۰ه)

(۱) ۲۹

(۲) ۳۰

(۳) ۳۲

(۴) ۳۳

**تست:** به ازای برخی از اعداد طبیعی  $n$  دو عدد به صورت های  $۱۱n + ۷$  و  $۹n + ۲$  نسبت به هم اول نیستند. کوچک ترین مقدار  $n$  در این حالت مضرب کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۸

**تست:** به ازای چند عدد دو رقمی  $n$ ، دو عدد طبیعی  $9n + 2$  و  $11n - 5$  نسبت به هم غیر اولند؟ (۹۲)

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

**تست:** به ازای بعضی از مقادیر  $n \in \mathbb{N}$ ، اگر  $13n + 3 \mid \alpha$  و  $7n + 4 \mid \alpha$  و  $a \neq 1$  باشد، آنگاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد  $n$ ، کدام است؟ (دافل ۹۸)

۷ (۱)

۸ (۲)

۹ (۳)

۱۰ (۴)

**تست:** اگر عدد  $a + 7^{13}$  بر  $23$  بخش پذیر باشد، کوچک ترین عدد طبیعی  $a$ ، کدام است؟ (دافل ۹۸)

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

### کاربرد ۴: معادله سیاله:

هر معادله ای که مجموعه جواب آن از  $\mathbb{Z}$  انتخاب شده را معادله سیاله گویند.

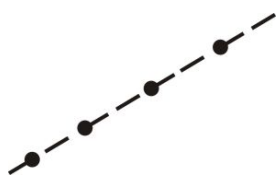
### معادله سیاله دو متغیری خطی:

به شکل کلی روبرو مطرح است:

$$ax + by = c$$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$  ضرایب

**مثلاً:** معادله سیاله  $3x + 4y = 8$  دو متغیری خطی است.



### شرط وجود جواب:

### مثال عددی:

معادله سیاله  $6x + 15y = 21$  جواب دارد، زیرا:

معادله سیاله  $8x + 12y = 22$  جواب ندارد، زیرا:

**تست:** به ازای کدام مقدار  $b$  معادله  $y = 20 - (b + 15)x + by$  در مجموعه‌ی اعداد صحیح جواب دارد؟

(۱) ۳

(۲) ۵

(۳) ۱۵

(۴) ۳۰

### تبدیل سیاله به هم‌نهشتی:

هر دو چیز مساوی در پیمانه‌ی دلخواه  $m$  هم‌نهشت هستند. پس در معادله‌ی  $ax + by = c$  مثلاً اگر  $x$  را بخواهیم طرفین را در پیمانه‌ی  $b$  هم‌نهشت قرار می‌دهیم، آن را به صورت یک معادله‌ی هم‌نهشتی درمی‌آوریم و مثل آن حل می‌کنیم.

**تست:** اعداد صحیح  $a$  و  $b$  در معادله‌ی  $12 = 23b + 15a$  صدق می‌کنند. باقی مانده‌ی تقسیم  $b$  بر ۱۵ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۹

**تست:** مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد سه رقمی  $x$  که در معادله‌ی  $342 = 87y - 57x$  صدق کند، کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۸

## حل معادله‌ی سیاله‌ی خطی:

**۱- راه اول:** اگر بتوانیم یکی از جواب‌های خصوصی معادله  $(x = x_0 \text{ و } y = y_0 \text{ که در معادله صدق می‌کنند})$  را حدس بزنیم، جواب‌های عمومی به صورت زیر به دست می‌آید. البته در صورتی که معادله، ساده شده باشد و ضرایب  $x$  و  $y$  با هم فاکتوری نداشته باشند.

$$ax + by = c \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + bk \\ y = y_0 - ak \end{cases}$$

جای  $+$  و  $-$  را برعکس هم می‌توان گذاشت و هیچ فرقی نمی‌کند.

**نکته:** اگر  $a|c$  یا  $b|c$  یعنی عدد ثابت بر  $a$  یا  $b$  بخش پذیر باشد، یک جواب خصوصی به راحتی قابل پیدا کردن است. کافی است به متغیر دیگر صفر بدهیم و ...

**۲- راه دوم:** اگر نتوانیم یکی از جواب‌های خصوصی را حدس بزنیم طرفین را در پیمانه  $a$  یا  $b$  (هرکدام کوچک‌تر است) همنهشت قرار می‌دهیم و آن را تبدیل به یک معادله‌ی همنهشتی می‌کنیم. حالا یکی از جواب‌های  $x$  یا  $y$  را پیدا می‌کنیم و آن را در معادله‌ی اصلی می‌گذاریم تا دیگری به دست آید. در نهایت دوباره از راه بالا استفاده می‌کنیم.

**توصیه بسیار مهم:** همیشه اولین اقدام در حل معادله‌ی سیاله، ساده کردن آن است یعنی اول کنترل کنیم که ضرایب  $x$  و  $y$  فاکتور نداشته باشند بعد اقدام به حل کنیم.

**تست:** معادله‌ی سیاله‌ی خطی  $7x + 5y = 130$  در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

**تست:** معادله‌ی سیاله‌ی خطی  $15x + 14y = 1050$  در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)



**تست:** معادله ی  $۲۵x + ۱۲y = ۱۱۱۰$  بر روی مجموعه اعداد طبیعی ( $\mathbb{N}$ ) چند جواب دارد؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

**تست:** اگر  $۳۵۷x + ۶۲۹y = (۳۵۷,۶۲۹)$  آنگاه کوچک‌ترین عدد مثبت  $x + y$  کدام است؟

(۱) ۱۳

(۲) ۱۱

(۳) ۱۲

(۴) ۱۰

### مسائل کاربردی سیاله:

مسائلی که معادله ی سیاله ی خطی را به زندگی روزمره گره می‌زنه باید  $x \geq 0$  و  $y \geq 0$  باشند چون تعداد اشیاء دور و بر ما، هرگز منفی نمی‌شود مثلاً تعداد تمبرها، تعداد بُنها و ...

**تست:** کم‌ترین تعداد تمبر لازم برای بسته‌ای که نیاز به ۸۵۰ ریال تمبر دارد، با تمبرهای ۹۰ و ۵۰ ریالی کدام است؟

(۱) ۱۱

(۲) ۱۲

(۳) ۱۳

(۴) ۱۴

**مثال:** به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟ (تمرین ۱۳ صفحه ۲۹ کتاب)

**مثال:** به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟ (تمرین ۱۸ صفحه ۳۰ کتاب)

**تست:** قیمت هر واحد از دو نوع کالای متمایز به ترتیب ۲۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با مبلغ ۱۹۰۰۰ تومان، به چند طریق می‌توان از این دو نوع کالا، خریداری کرد؟ (دافل ۹۸)

۱۰ (۱)

۱۱ (۲)

۱۲ (۳)

۱۳ (۴)

کار در منزل

نظریه اعداد

**تست:** به ازای کدام مقدار  $p$  گزاره‌ی «اگر  $3p + 2$  اول باشد،  $p$  نیز اول است.» نقض می‌شود؟

قانون: مثال نقض باید در فرض درست باشد ولی حکم را رد کند زیرا ترتیب شرطی وقتی

غلط می‌شود به صورت  $(n \rightarrow \text{غلط})$  باشد.

برای  $p=9$  عدد  $3p+2=29$  می‌شود که اول است (فرض درست) ولی  $p$  اول نیست.

**مثال:**  $a_1, a_2, a_3$  و  $b_1, b_2, b_3$  هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت

کنید  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$  عددی زوج است. (مثال صفحه ۶ کتاب دسی)

برای درک بهتر من به شالی ارائه می‌کنم:  $a_1, a_2, a_3$  را به ترتیب ۵، ۸ و ۱ در نظری گسیریم و  $b_1, b_2, b_3$

۱، ۸ و ۵ در نظری گسیریم. داریم:  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) = (5-1)(8-1)(1-5) = 84$

اثبت: به خلف  $\leftarrow$  اگر  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$  زوج نباشد پس فرد است. پس هست عامل

$a_1 - b_1$ ،  $a_2 - b_2$ ،  $a_3 - b_3$  باید فرد باشند پس مجموع آنها هم باید فرد باشد اما مجموع

این سه عبارت صفری شود که فرد نیست. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌گردد.

**تست:** به ازای اعداد طبیعی  $1 \leq n \leq 50$  در چند حالت دو عدد  $4n + 7$  و  $5n + 9$  نسبت به هم اولند؟

$$(5n+9, 4n+7) = d$$

$$d \mid 5n+9 \xrightarrow{\times 4} d \mid 20n+36$$

$$d \mid 4n+7 \xrightarrow{\times 5} d \mid 20n+35$$

$$\frac{20n+36}{20n+35} \rightarrow d \mid 1 \rightarrow d=1$$

این دو عدد ذاتاً متباین اند

و به ازای هر  $n$  عدد بین ۱ تا ۵۰ نسبت به هم اولند

۴۷ (۱)

۴۸ (۲)

۴۹ (۳)

۵۰ (۴) ✓

**تست:** باقی مانده تقسیم  $100$  بر  $35$  کدام است؟

۵ (۱)

۱۰ (۲)

۲۵ (۳)

۳۰ (۴) ✓

$$100 \div 35 = 2 \text{ remainder } 30$$

$$100 \div 35 = 2 \text{ remainder } 30$$

$$100 \div 35 = 2 \text{ remainder } 30 \rightarrow 100 - 70 = 30$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 100 \div 35 = 2 \text{ remainder } 30 \\ 100 \div 35 = 2 \text{ remainder } 30 \end{array} \right\} \rightarrow 100 \div 35 = 2 \text{ remainder } 30$$

**تست:** به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی  $n$ ، دو عدد به صورت های  $5n-2$  و  $7n+3$ ، نسبت به هم غیر اول اند؟ (داخل ۹۳)

$$(7n+3, 5n-2)=d$$

۳ (۱)

$$\begin{aligned} d \mid 7n+3 &\xrightarrow{+5} d \mid 12n+15 \\ d \mid 5n-2 &\xrightarrow{+7} d \mid 12n-12 \end{aligned} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 27 \rightarrow d = 3 \text{ یا } 27 \rightarrow \boxed{d=27}$$

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

$$5n-2 \equiv 0 \pmod{27} \rightarrow 5n \equiv 2 \pmod{27} \xrightarrow{\times 5} 25n \equiv 10 \pmod{27} \xrightarrow{\times 10} n \equiv 1 \pmod{27}$$

$$n \equiv 1 \pmod{27} \rightarrow \boxed{n = 27k + 1} \begin{cases} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \\ k=3 \end{cases}$$

**تست:** برای خرید کتاب به قیمت ۷۵۵۰ تومان به تعداد  $A$  بن دویست تومانی و  $B$  بن یکصد و پنجاه تومانی پرداخت

نموده ایم. حداقل  $B+A$  کدام است؟

$$200A + 150B = 7550 \xrightarrow{\div 50} \boxed{4A + 3B = 151}$$

۳۵ (۱)

۳۶ (۲)

۳۷ (۳)

۳۸ (۴)

$$4A + 3B \equiv 151 \pmod{7} \rightarrow 4A + 3B \equiv 1 \pmod{7} \rightarrow \boxed{A=1} \rightarrow \boxed{B=49}$$

$$\begin{cases} A = 1 + 3k \\ B = 49 - 4k \end{cases} \xrightarrow{+} A+B = 50 - k \xrightarrow{0 \leq k \leq 12} \min(A+B) = 38$$

**تست:** به چند طریق می توان با ۳۷۰۰ ریال تمبرهای ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی خرید؟ (داخل ۹۱)

$$150x + 250y = 3700 \xrightarrow{\div 50} 3x + 5y = 74 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 14 \end{cases}$$

۴ (۱)

۵ (۲) ✓

۳ (۳)

۶ (۴)

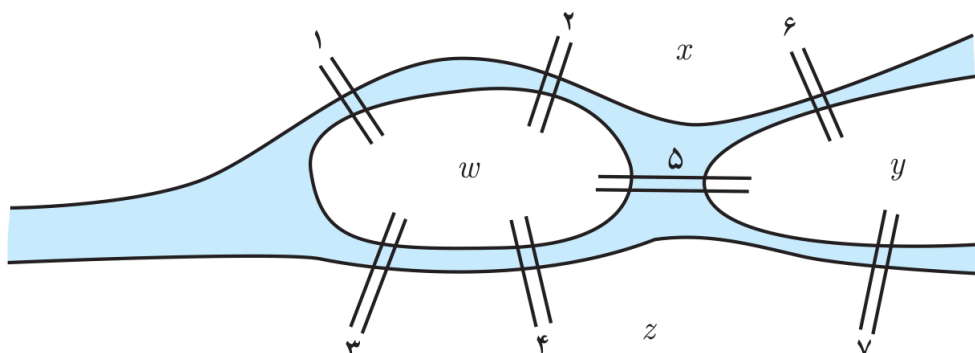
$$\begin{cases} x = -2 + 5k \geq 0 \rightarrow k \geq \frac{2}{5} \\ y = 14 - 3k \geq 0 \rightarrow k \leq \frac{14}{3} \end{cases} \rightarrow \boxed{1 \leq k \leq 4} \rightarrow k = 1, 2, 3, 4$$

# گراف و مدلسازی

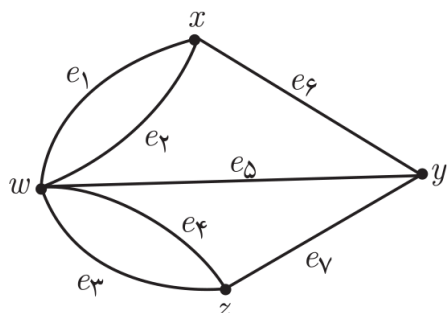
✓ فصل دوم

## تاریخچه گراف

در اوایل قرن هجدهم، معمایی فکر برخی از اهالی شهر کونیگسبرگ (در حال حاضر در روسیه) را به خود مشغول کرده بود. رودخانه این شهر که از میان شهر عبور می کرد مانند آنچه در شکل زیر می بینید، شهر را به چند قسمت تقسیم می کرد و ۷ پل منطقه خشکی را به هم مرتبط می کردند. برخی از مردم این شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می توان با حرکت از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور از هر کدام از پل ها، به نقطه شروع حرکت بازگشت؟



لئونارد اویلر (۱۷۸۳ - ۱۷۰۷) ریاضی دان برجسته سوئیسی، برای حل این مسئله از شکل زیر، که امروزه به آن «گراف» می گوئیم، کمک گرفت و با استفاده از استدلال ثابت کرد که این کار امکان پذیر نیست. و با این شیوه نظریه گراف ها را بنیان نهاد.

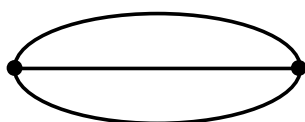


اگر چهار ناحیه  $x$  و  $y$  و  $z$  و  $w$  را با ۴ نقطه نمایش دهیم و به ازای هر پل که بین دو ناحیه قرار دارد نقاط متناظر با آن ناحیه ها را به هم وصل نماییم شکل مقابل به دست می آید که گراف حاصل از مدل سازی مسئله مذکور است.

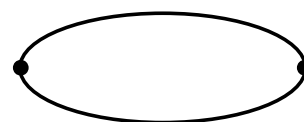
مدل سازی بسیاری از مسائل با گراف، دسته بندی منظم و تفکر منطقی درباره آن ها را آسان تر می نماید.

## چند تعریف:

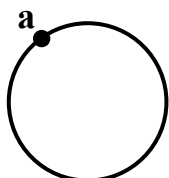
**یال های موازی:** هرگاه در یک گراف بین هر ۲ رأس بیش از یک یال موجود باشد به آن یال های موازی گویند. و به این گراف ها، گراف های چند گانه می گویند.



۳ یال موازی

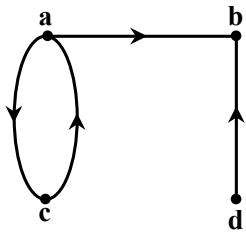


۲ یال موازی



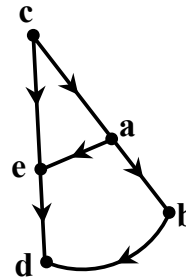
**طوقه:** هرگاه یالی یک رأس را به خودش وصل کند به آن طوقه گویند.

**یال جهت دار:** هرگاه در یک گراف روی یال ها جهت وجود داشته باشد به آن یال جهت دار گویند. و گرافی که یال جهت دار داشته باشد گراف جهت دار نامیده می شود. مانند گراف های زیر:



$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{ab, db, ac, ca\}$$



$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

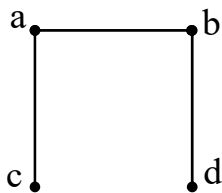
$$E = \{ca, ab, bd, ed, ce, ae\}$$

توجه شود که گراف های شامل موارد فوق (طوقه - یال موازی - یال جهت دار) گراف های ساده نمی باشند. و ما در این بخش فقط با گراف های ساده کار داریم.

## گراف (گراف ساده)

عبارت است از تعدادی نقطه که بعضی یا تمام آن ها توسط خطوطی به هم وصل شده اند. به نقاط رأس و به خطوط یال می گویند.

**مثال:** فرض کنید a, b, c و d چهار تیم ورزشی می باشند و اعلام شده است که تیم a با تیم های b و c و تیم b با تیم d بازی کرده است. اگر هر تیم را با یک نقطه (رأس) و بازی انجام شده بین دو تیم را با یک خط (یال) نشان دهیم شکلی به وجود می آید که به آن گراف گویند.



## پس هر گراف از دو جزء تشکیل شده است:

۱- **رأس ها:** نقاطی که می خواهیم روابط بین آنها را مشخص کنیم و در یک مجموعه قرار می دهیم به نام مجموعه رأسی  $V(G)$ .

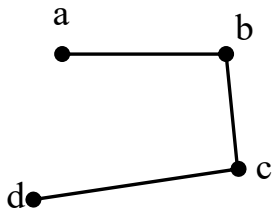
۲- **یال ها:** خطوطی که روابط بین نقاط را مشخص می کنند و در یک مجموعه قرار می دهیم به نام مجموعه یالی  $E(G)$ .

$$V(G) = \{a, b, c, d\}, E(G) = \{ab, ac, bd\}$$

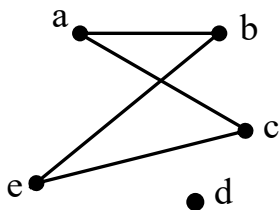
**مثلاً در مثال بالا:**



**پس**  $\Leftarrow$  گراف ساده  $G$  زوج مرتب  $(V, E)$  که در آن  $V$  مجموعه‌ای ناتهی و متناهی متشکل از رأس‌هاست و  $E$  مجموعه‌ای شامل برخی یا تمام زیر مجموعه‌های ۲ عضوی  $V$  (یال‌ها) است.



**مثال:** گراف  $G = (\{a, b, c, d\}, \{ab, bc, cd\})$  را رسم کنید.

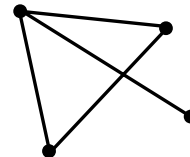
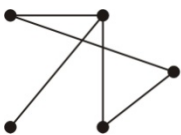


**مثال:** گراف  $G = (\{a, b, c, d, e\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, e\}, \{c, e\})$  را رسم کنید.

**مرتبه گراف:** به تعداد رئوس گراف گویند و آن را با  $p$  نشان می‌دهیم.

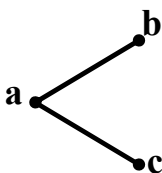
**اندازه گراف:** به تعداد یال‌های گراف گویند و آن را با  $q$  نشان می‌دهیم.

**مثال:**



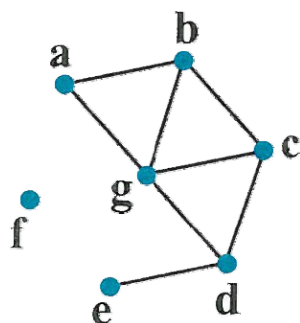
**دو رأس مجاور (همسایه):** دو رأس را مجاور گویند هرگاه توسط یک یال به هم وصل شوند.

**دو یال مجاور:** دو یال را مجاور گوئیم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها به آن متصل باشند. مثلاً یال‌های  $ab$  و  $ac$  مجاورند.



## مجموعه همسایه های یک رأس:

مجموعه همسایه های رأس  $V$ ، مجموعه تمام رأس های از گراف هستند که با آن رأس مجاورند و آن را با  $N_G(V)$  نمایش داده و همسایگی باز رأس  $V$  می گوئیم و چنانچه خود رأس  $V$  هم عضو این مجموعه باشد آن را با  $N_G[V]$  نمایش داده و همسایگی بسته رأس  $V$  می گویند.



مثال:

$$N_G(a) = \{b, g\}$$

$$N_G[a] = \{a, b, g\}$$

$$N_G(c) = \{b, d, g\}$$

$$N_G[c] = \{b, c, d, g\}$$

$$N_G(f) = \emptyset$$

$$N_G[f] = \{f\}$$

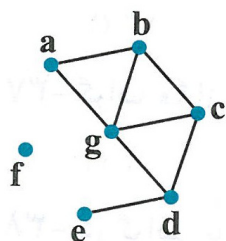
**تست:** در گراف شکل مقابل، کدام نتیجه گیری درست است؟

$$n\{N_G[f]\} = 0 \quad (1)$$

$$n(N_G(g)) = 5 \quad (2)$$

$$n(N_G(a)) = n(N_G(b)) \quad (3)$$

$$n(N_G[c]) = n(N_G(g)) \quad (4)$$



**تست:** در گراف  $G$ ،  $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$  و  $E(G) = \{ab, bc, ce, cd, de, ea, af\}$  می باشند. اگر  $N_G(x) = \{a, c\}$

باشد،  $x$  کدام است؟

b (1)

d (2)

e (3)

f (4)

**تست:** در گراف  $G$ ،  $V(G) = \{V_1, V_2, \dots, V_6\}$  و  $E(G) = \{V_1V_3, V_2V_5, V_2V_4, V_3V_4, V_1V_6\}$  مجموعه

چند عضو دارد؟

3 (1)

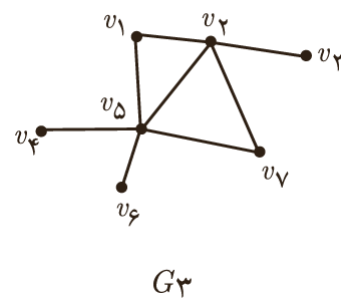
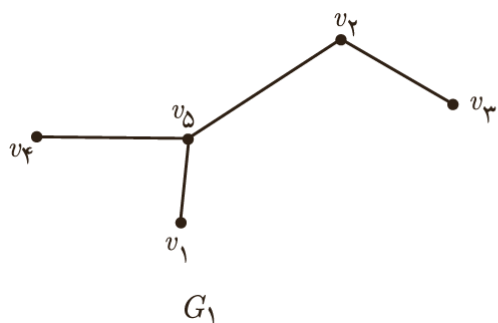
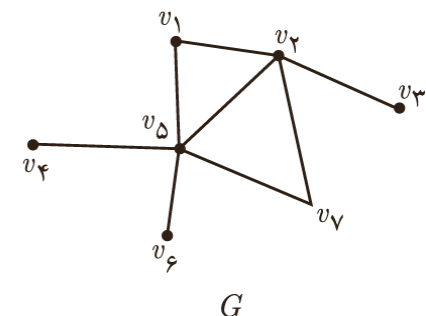
4 (2)

5 (3)

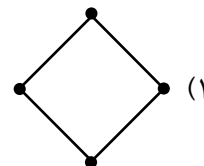
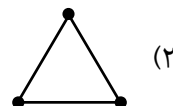
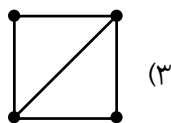
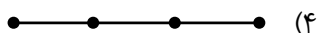
2 (4)

## زیر گراف:

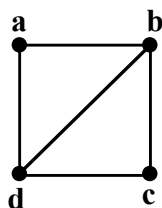
یک زیر گراف از گراف  $G$  گرافی است که مجموعه رئوس آن زیر مجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف  $G$ ، و مجموعه یال‌های آن زیر مجموعه‌ای از مجموعه یال‌های  $G$  باشد. به طور مثال گراف‌های  $G_1$  و  $G_2$  و  $G_3$  زیر گراف‌هایی از گراف  $G$  هستند.



**تست:** کدام گزینه یک زیر گراف  $G$  با  $V = \{a, b, c, d, e\}$  و  $E = \{ab, ac, bd, bc, de, ce\}$  نمی‌باشد؟



**تست:** گراف شکل مقابل، چند زیر گراف از مرتبه ۳ و اندازه ۲ دارد؟



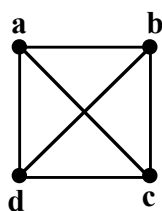
(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

**تست:** گراف شکل مقابل، چند زیر گراف از مرتبه فرد دارد؟



(۱) ۱۶

(۲) ۳۲

(۳) ۳۰

(۴) ۳۶

**مثال:** گرافی با مجموعه رأسی  $V = \{a, b, c, d, e\}$  حداکثر چند یال دارد؟

**نتیجه:**

**محدوده تعداد یال:**

در هر گراف ساده از مرتبه  $p$  و اندازه  $q$  همواره داریم:

**تست:** گرافی دارای ۱۶ یال است این گراف حداقل چند رأس دارد؟

(۱) ۵

(۲) ۶

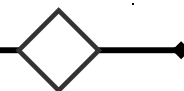
(۳) ۷

(۴) ۸

**شمارش تعداد گراف‌ها (مربوط به زمانی است که رئوس اسم داشته باشند)**

**توجه شود که:**

**مثال:** با مجموعه رأسی  $V = \{a, b, c, d, e\}$  چند گراف ساده با دقیقاً ۱ یال - ۲ یال - ۳ یال وجود دارد؟



**مثال:** گرافی ۷ رأس متمایز دارد با این ۷ رأس چند گراف می توان ساخت که دارای ۵ یال باشد؟

پس می شود نتیجه گرفت برای بدست آوردن تعداد گراف هایی که تعداد یال های آن ها مشخص است .....  
.....

**مثال:** با مجموعه رأسی  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$  چند گراف ساده با دقیقاً ۴ یال وجود دارد به طوریکه:

الف) همگی فاقد یال  $ab$  باشند.

ب) همگی شامل یال  $ab$  باشند.

ج) همگی شامل یال  $ab$  و فاقد  $cd$  و  $be$  باشند.

**مثال:** با مجموعه رأسی  $V = \{a, b, c, d, e\}$  چند گراف ساده وجود دارد؟

**مثال:** با مجموعه رأسی  $V = \{a, b, c, d, e\}$  چند گراف ساده وجود دارد به طوریکه:

الف) همگی فاقد یال  $ab$  باشند.

ب) همگی شامل یال  $ab$  باشند.



**مثال:** با ۱۰ رأس متمایز چند گراف دارای ۷ یال می توان ساخت که ۳ یال را نداشته باشد ؟

**مثال:** با ۹ رأس برچسب گذاری شده چند گراف با ۴ یال می توان ساخت که هر کدام ۲ یال خاص را نداشته باشند؟

**مثال:** با ۱۱ رأس کلاً چند گراف موجود است؟

**مثال:** چند گراف ۷ راسی با رئوس متمایز وجود دارد به طوریکه :

الف) دارای ۳ یال

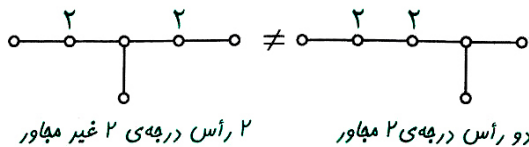
ب) دارای ۵ یال فاقد یال  $ab$

ج) دارای ۶ یال شامل یال  $cd$

## شمارش تعداد گراف ها: (مربوط به زمانی است که رئوس اسم نداشته باشند)

منظور از تعداد گراف ها در کنکور سراسری تعداد گراف های متفاوت (ناهم ریخت) است.

**توجه:** در دو گراف هم ریخت همه ی خاصیت ها یکسان است از جمله :

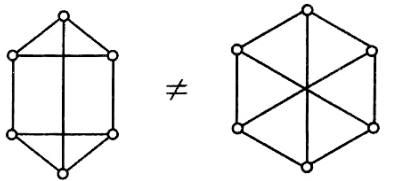


۱- درجه ی رأس ها

۲- تعداد دورها

۳- نحوه ی مجاورت رأس ها

۴- طول دورها



دور به طول ۳ دارد.

دور به طول ۳ ندارد.

**تذکر:** در مسائل پیدا کردن تعداد گراف ها معمولاً یا  $pq$  را می دهند یا  $p + q$  که در حالت  $pq$  از تجزیه به حالت های مختلف استفاده می کنیم و در حالت  $p + q$  از یک جدول صلیبی. در اکثر این مسائل صفت همبند بودن هم مطرح است که با توجه به آن حالت های مورد قبول را پیدا می کنیم. و اگر صفت های دیگری هم برای گراف ذکر شد به آن دقت می کنیم.

**تست:** چند گراف متفاوت از مرتبه ۳ وجود دارد؟ (رئوس نامگذاری نشده اند)

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۸ (۴)

**مثال:** با ۵ رأس و ۳ یال چند گراف ساده وجود دارد؟ (رئوس نام گذاری نشده اند)

**تست:** چند گراف ساده از مرتبه ۴ اندازه ۳ وجود دارد؟ (رئوس نام گذاری نشده اند)

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

**تست:** چند نوع گراف ساده از مرتبه ۶ می توان ساخت که هر یک از آن ها فقط ۳ یال داشته باشند؟

۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

**تست:** چند گراف ساده و همبند وجود دارد که مجموع مرتبه و اندازه آن ها ۸ باشد؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

**تست:** چند گراف ساده وجود دارد که همبند بوده و حاصلضرب مرتبه و اندازه ی آن ۲۰ باشد، (مجموع مرتبه و اندازه

آن ۹ باشد) (۹۳)

۱ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)



**تست:** چند گراف ساده و همبند و نامنتظم وجود دارد که مجموع اندازه و مرتبه‌ی آنها ۱۰ باشد؟

۳ (۱)

۴ (۲)

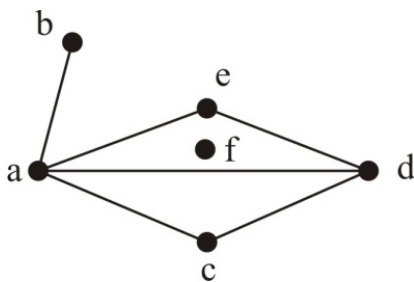
۵ (۳)

۶ (۴)

## درجه رأس:

تعداد یال‌های گذرنده از هر رأس را درجه آن رأس گویند و درجه رأس  $a$  را با  $\deg(a)$  نشان می‌دهند.

**مثال:** در گراف مقابل درجه رئوس را بیابید و سپس مجموع آن‌ها را حساب کنید.



$$\deg(a) =$$

$$\deg(b) =$$

$$\deg(c) =$$

$$\deg(d) =$$

$$\deg(e) =$$

$$\deg(f) =$$

**قضیه:**

زیرا.....

به عبارت دیگر اگر  $V = \{V_1, V_2, \dots, V_p\}$  مجموعه راسی یک گراف از مرتبه  $p$  و اندازه  $q$  باشد آنگاه:

$$\deg(V_1) + \deg(V_2) + \dots + \deg(V_p) = 2q$$

$$\sum \deg(V_i) = 2q$$

۱- **رأس فرد**: رأسی که درجه اش فرد باشد مانند b و d

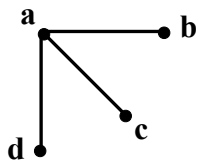
۲- **رأس زوج**: رأسی که درجه اش زوج باشد مانند a و e و c

۳- **رأس تنها (ایزوله)**: رأسی که درجه اش صفر باشد مانند f (توجه شود که رأس ایزوله راس زوج است)

۴- **رأس max**: رأسی که در بین تمام رؤوس بیشترین درجه را دارد مانند a و درجه آن را با  $\Delta$  نشان می دهند مثلاً در شکل بالا  $\Delta = 4$

۵- **رأس min**: رأسی که در بین تمام رؤوس کمترین درجه را دارد مانند f و درجه آن را با  $\delta$  نشان می دهند. مثلاً در شکل بالا  $\delta = 0$

۶- **رأس Full**: رأسی که درجه اش  $p - 1$  باشد یا رأسی که به تمام رؤوس دیگر وصل می باشد مثلاً در گراف مقابل رأس a راس Full است.



تذکر : .....

**مثال**: در یک گراف با ۱۴ یال، دو رأس با درجه ۴، سه رأس با درجه ۳ و چهار رأس با درجه ۲ وجود دارد، اگر درجه سایر رؤوس ۱ باشد این گراف چند رأس دارد؟

**تست**: گرافی دارای ۸ رأس از درجه ۲ و ۳ رأس از درجه ۴ و تعدادی رأس از درجه ۱۱ است. اگر اندازه این گراف ۲۵ باشد مرتبه گراف کدام است؟

- (۱) ۱۳
- (۲) ۱۴
- (۳) ۱۵
- (۴) ۱۶

**تست:** در گراف  $G$  از مرتبه ۱۰، اندازه گراف برابر ۱۸ است. اگر درجه رئوس گراف ۳ یا ۴ باشد تعداد رئوس از درجه ۳ کدام است؟

- (۱) ۴
- (۲) ۵
- (۳) ۶
- (۴) ۷

**تست:** در یک گراف از مرتبه ۲۰ و اندازه ۳۰، ۴ رأس از درجه ۳ و  $x$  رأس از درجه ۲ و بقیه رئوس از درجه ۴ هستند. تعداد رئوس درجه ۴ چند واحد از تعداد رئوس درجه ۲ بیشتر است؟

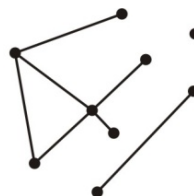
- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

### دنباله درجه‌ها (دنباله گرافی): (توجه شود که کلمه دنباله در کتاب درسی نیامده)

دنباله ای است که در آن درجات رئوس گراف ساده به ترتیب نزولی مرتب شده اند. (یعنی از بزرگ به کوچک)



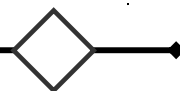
S:



S:

**بدانید که:**

**مثال:** در یک گراف دنباله درجه‌ها به صورت ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ می باشد. مرتبه و اندازه این گراف را بیابید.



**مثال:** آیا گرافی با دنباله درجه های ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۴ وجود دارد؟

**نتیجه:**

**اثبات:**

**سؤال:** پس تکلیف تعداد رئوس زوج چی میشه؟

**تست:** گرافی ۱۶ رأس دارد. تعداد رئوس فرد عددی ..... و تعداد رئوس زوج عددی ..... است.

(۱) فرد ، فرد

(۲) فرد ، زوج

(۳) زوج ، فرد

(۴) زوج ، زوج

**مثال:** گرافی ۱۵ رأس دارد و تعداد رئوس فرد عددی ..... و تعداد رئوس زوج عددی ..... است.

**تست:** در یک گراف از مرتبه ۳۵ تعداد رئوس زوج گراف:

- (۱) زوج است.
- (۲) فرد است.
- (۳) هر عدد دلخواهی می تواند باشد.
- (۴) مضرب ۳ است.

## تکنیک های تشخیص دنباله گرافی: (.....)

۱- جمله های صفر در تشخیص بی تأثیرند آن ها را از صورت مسأله پاک کنید.

۲- تعداد رئوس فرد همواره باید زوج باشد و نیاز به کنترل رئوس زوج نیست.

۳- شرط اساسی  $0 \leq p-1 \leq$  درجه هر رأس را کنترل کنید که هیچ رأسی درجه بالاتر از  $p-1$  نداشته باشد. مثلاً اگر گرافی ۶ راس داشت حق ندارد راسی با درجه ۶ داشته باشد. نتیجه می شود که دنباله گرافی باید حداقل دو جمله مساوی داشته باشد.

۴- تعداد رئوس Full حداکثر به اندازه  $\delta$  است. مثلاً اگر در یک گراف  $\delta = 2$  باشد گراف حداکثر می تواند ۲ رأس Full داشته باشد. (بعبارت دیگر اگر تعداد  $k$  راس Full داشته باشیم  $k \leq \delta$ )

۵- اگر در گرافی از مرتبه  $p$  یک راس درجه  $p-1$  (Full) و یک راس درجه  $p-2$  (نیمه Full) وجود داشت آنگاه گراف حداکثر یک رأس درجه ۱ می تواند داشته باشد.

**تست:** کدامیک از دنباله های زیر گرافی است؟

- (۱) ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۴ و ۴
- (۲) ۰ و ۰ و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۳ و ۵ و ۶
- (۳) ۱ و ۱ و ۳ و ۳ و ۵ و ۵
- (۴) ۰ و ۰ و ۱ و ۱ و ۱ و ۳ و ۳ و ۳

## الگوریتم هاول: (.....)

در این روش بزرگترین جمله دنباله را حذف می کنیم (مثلاً جمله با درجه  $k$ ). سپس از  $k$  رأس بعدی هر کدام یک واحد کم می کنیم و دنباله حاصل را به صورت نزولی مرتب می نمائیم و این عمل را دوباره تکرار می کنیم اگر این کار ممکن نشد و یا جمله منفی ایجاد شد گراف ساده نیست و اگر پس از چند تکرار تمامی جملات صفر شد گراف ساده است.

|                   |             |              |             |
|-------------------|-------------|--------------|-------------|
| ۱۰۱۰۱۰۱۰۲۰۳۰۴۰۶۰۶ | ۲۰۳۰۴۰۴۰۴۰۵ | ۲۰۲۰۳۰۴۰۴۰۴  | ۱۰۱۰۲۰۳۰۴۰۵ |
|                   |             |              |             |
|                   |             |              |             |
|                   |             |              |             |
| ۲۰۲۰۲۰۳۰۵         | ۱۰۲۰۳۰۳۰۴۰۵ | ۰۱۰۳۰۳۰۴۰۴۰۵ | ۲۰۳۰۴۰۴۰۵۰۶ |
|                   |             |              |             |
|                   |             |              |             |
|                   |             |              |             |

**تست:** در یک گراف ساده از مرتبه ۶ دنباله درجه رؤس آن به کدام صورت می تواند باشد؟

- (۱) ۰۱۰۲۰۳۰۴۰۵
- (۲) ۱۰۲۰۲۰۳۰۴۰۵
- (۳) ۱۰۱۰۲۰۳۰۴۰۵
- (۴) ۱۰۲۰۳۰۳۰۴۰۵

**تست:** گرافی شامل ۵ رأس است. کدام گزینه نمی تواند نشان دهنده دنباله درجات رؤس آن باشد؟

- (۱) ۰۱۰۲۰۳۰۴
- (۲) ۴۰۴۰۴۰۴
- (۳) ۰۱۰۱۰۱۰۱
- (۴) ۲۰۲۰۲۰۲۰۲

**تست:** کدام یک از دنباله های زیر می تواند مربوط به یک گراف ساده باشد؟

(۱) ۵ و ۵ و ۴ و ۴ و ۳ و ۲ و ۲ و ۲

(۲) ۱ و ۱ و ۴ و ۴ و ۶ و ۶

(۳) ۴ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳ و ۲ و ۲ و ۲

(۴) ۳ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳

**تست:** کدام دنباله گرافی است؟

(۱) ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۰

(۲) ۳ و ۳ و ۲ و ۲ و ۰

(۳) ۴ و ۳ و ۲ و ۲ و ۰

(۴) ۵ و ۳ و ۳ و ۲ و ۰

**تست:** کدام دنباله گرافی است؟

(۱) ۸ و ۸ و ۸ و ۷ و ۷ و ۵ و ۵ و ۳ و ۳

(۲) ۷ و ۷ و ۷ و ۵ و ۵ و ۳ و ۲ و ۲

(۳) ۴ و ۴ و ۴ و ۲ و ۲ و ۲

(۴) ۳ و ۳ و ۳ و ۳ و ۲ و ۲ و ۲ و ۰ و ۰ و ۰ و ۰

**تست:** کدام دنباله گرافی است؟

(۱) ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱

(۲) ۴ و ۴ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱

(۳) ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۲ و ۰

(۴) ۵ و ۵ و ۳ و ۳ و ۱ و ۱

**تست:** کدام دنباله ، دنباله درجه های گراف ساده نیست؟

(۱) ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳

(۲) ۲ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳

(۳) ۲ و ۲ و ۴ و ۴ و ۴

(۴) ۱ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳

**تست:** دنباله نزولی درجات رئوس یک گراف به صورت  $x$  و ۵ و ۶ و ۶ و ۶ و ۷ و ۷ و ۷ است.  $S$  کدام می تواند

باشد؟

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) ۵

**تست:** اگر درجه رئوس یک گراف ساده به صورت ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳ و  $x$  باشد  $x$  کدام می تواند باشد؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۸

**تست:** در یک گراف ساده دنباله درجات رئوس به صورت  $y$  و  $x$  و ۳ و ۳ و ۵ و ۵ است. حداقل  $x + y$  کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶



**تست:** در گرافی با درجه رئوس  $a$  و  $b$  و  $2$  و  $2$  و  $4$  و  $4$  حداکثر  $a + b$  کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۹

(۳) ۸

(۴) ۷

**تست:** در گرافی با دنباله درجه های  $4$  و  $y$  و  $x$  و  $6$  و  $6$  و  $6$  و  $6$  :  $S$  حداکثر مقدار  $x$  ؟

(۱) ۶

(۲) ۵

(۳) ۴

(۴) چنین گرافی وجود ندارد.

**تست:** درجه رئوس یک گراف ساده و همبند اعداد  $c$  و  $b$  و  $a$  و  $1$  و  $3$  و  $4$  هستند اگر  $P$  تعداد رأس های یک گراف و

$q$  تعداد یال های گراف و  $q = \frac{3}{4}P$  باشد تعداد جواب های مجموعه  $\{a, b, c\}$  کدام است؟ (داخل ۹۳)

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

## تشخیص درجه‌ها از روی حاصلضرب آن‌ها :

اگر حاصلضرب درجه‌ی راس‌ها را دادند آن عدد را به اعداد اول تجزیه می‌کنیم که سه حالت عمده رخ می‌دهد :

- ۱- تعداد اعداد اول موجود در حاصل ضرب کمتر از مرتبه گراف است. که در این حالت بقیه درجه‌ها را (۱) در نظر می‌گیریم.
- ۲- تعداد اعداد اول موجود در حاصل ضرب بیشتر از مرتبه گراف است که در این حالت ۲ تا از کوچکترینها (معمولاً دو تا از ۲ها را) در هم ضرب کرده و یک درجه در نظر می‌گیریم.
- ۳- تعداد اعداد اول موجود در حاصل ضرب برابر با مرتبه است که در این حالت احتمالاً همین اعداد درجه راس‌ها هستند. اگر نبودند دو تا از ۲ها را ضرب کرده و ۴ فرض کنید و به جای درجه‌ی یک راس دیگر (۱) قرار دهید.

**مثال:** دنباله درجات رئوس گراف از مرتبه ۵ که حاصل ضرب درجه‌ی راس‌های آن هر یک از اعداد ۷۲ و ۱۴۴ و ۱۸ می‌باشد را پیدا کنید.

**تست :** کدام عدد نمی‌تواند حاصل ضرب درجه‌ی راس‌های یک گراف مرتبه ۵ باشد؟

- (۱) ۱۲۸
- (۲) ۷۲
- (۳) ۱۶
- (۴) ۲۷

**تست :** حاصل ضرب درجه‌ی راس‌های گراف G از مرتبه ۵ برابر ۱۰۸ است این گراف چند راس فرد دارد؟

- (۱) هیچ
- (۲) ۲
- (۳) ۴
- (۴) ۳

**تست:** حاصل ضرب درجه‌ی راس‌های گراف  $G$  از مرتبه‌ی ۶ برابر ۱۹۲ است این گراف چند راس از درجه‌ی ماکزیمم دارد؟

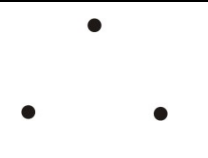
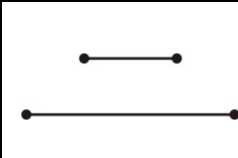
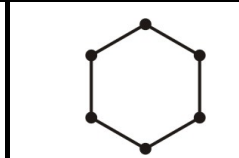
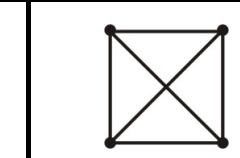
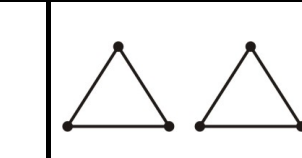
- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

**تست:** در گرافی از مرتبه‌ی ۶ حاصل ضرب درجه‌ی تمام راس‌ها ۳۶۰ است تعداد یال‌های این گراف کدام است؟

- (۱) ۱۰  
(۲) ۷  
(۳) ۹  
(۴) ۸

## گراف منتظم:

گرافی است که درجه تمام رئوس آن با هم برابر باشند و هر وقت گفتند گراف  $r$ -منتظم منظور گرافی است که درجه تمام رئوس آن  $r$  است.

|                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                      |                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |  |
| ۰-منتظم مرتبه‌ی ۳                                                                   | ۱-منتظم مرتبه‌ی ۴                                                                   | ۲-منتظم مرتبه‌ی ۶                                                                   | ۳-منتظم مرتبه‌ی ۴                                                                    | ۲-منتظم مرتبه‌ی ۶                                                                     |

## در مورد گراف منتظم به نکات زیر توجه شود:

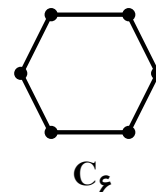
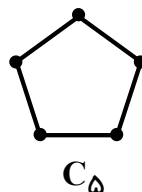
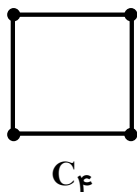
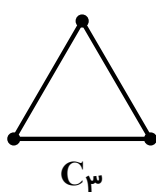
**توجه ۱:** در هر گراف  $r$ -منتظم از مرتبه  $p$  و اندازه  $q$  همواره داریم:

**توجه ۲:** اگر  $G$  گرافی از مرتبه  $p$  و  $r$ -منتظم باشد در این صورت  $p$  و  $r$  هر دو نمی‌توانند فرد باشند.

**توجه ۳:** در هر گراف  $r$ -منتظم همواره داریم:

**توجه ۴:** اگر درجه رئوس یک گراف تشکیل تصاعد دهند گراف منتظم است.

**توجه ۵:** گراف‌های  $r$ -منتظم مرتبه  $n$  را با  $C_n$  نشان می‌دهند.



**مثال:** در گرافی با ۸ رأس که درجه هر رأس ۱ می باشد چند یال وجود دارد؟

**تست:** اگر در گراف ۳- منتظم از مرتبه  $p$  داشته باشیم  $q + p = ۱۵$  این گراف چند رأس دارد؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

**تست:** در یک گراف  $r$ -منتظم از مرتبه ۱۳ برای  $r$  چند جواب وجود دارد؟

(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۱۱

(۴) ۱۰

**تست:** در یک گراف  $r$ -منتظم از مرتبه ۱۲ برای  $r$  چند جواب وجود دارد؟

(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۱۱

(۴) ۱۲

**تست:** کدام گراف وجود دارد؟

(۱) ۵- منتظم مرتبه ۹

(۲) ۴- منتظم با اندازه ۱۵

(۳) ۶- منتظم با اندازه ۱۲

(۴) ۶- منتظم با اندازه ۲۱

**تست:** در یک گراف ۲- منتظم تعداد یال ها ۳ واحد بیشتر از تعداد رأس هاست برای ۲ چند جواب وجود دارد؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

**مثال:** در یک گراف ۳ منتظم رابطه  $3q = 4(p + 1)$  برقرار است  $p$  و  $q$  را بیابید و گراف را رسم کنید.

**تست:** چند نوع گراف ۲- منتظم وجود دارد که مجموع مرتبه و اندازه آن ها ۱۲ باشد؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

**تست:** چند گراف ۳- منتظم وجود دارد که مجموع مرتبه و اندازه آن ۱۵ باشد؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۱ (۴)

**تذکر:** تعداد گراف های ۲- منتظم از مرتبه  $p$  برابر است با .....

.....

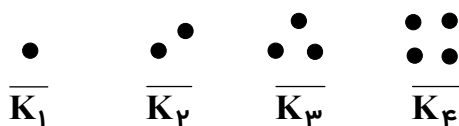
**مثال:** تمام گراف های ۲-منتظم مرتبه ۷ را بنویسید.

**مثال:** تمام گراف های ۲-منتظم مرتبه ۹ را بنویسید.

### گراف تهی:

گرافی را که هیچ یالی نداشته باشد تهی گوئیم. عبارتی دیگر گراف  $\overline{K_p}$  را تهی گویند هرگاه درجه تمامی رئوس آن صفر باشد. یعنی گراف تهی یک گراف  $0$ -منتظم است.

**مثال:** گراف های تهی از مرتبه ۱ تا ۴ عبارتند از:

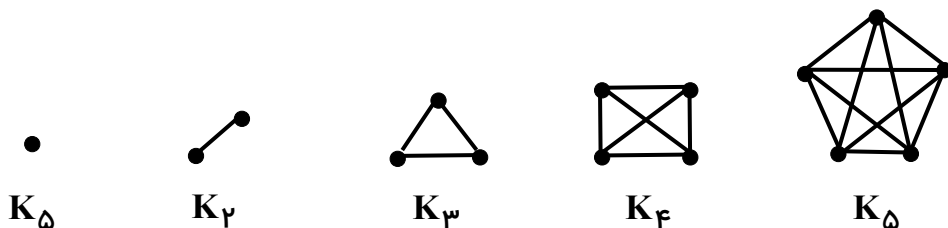


### گراف کامل:

گرافی است که بین هر دو رأس آن یک یال وجود دارد. (گرافی است که تمام یال ها در آن رسم شده باشد)

گراف کامل مرتبه  $p$  را با  $K_p$  نشان می دهند.

**مثال:** گراف های کامل مرتبه ۱ تا ۵ را رسم کنید. (تمرین ۷ صفحه ۴۲ کتاب درسی)



**توجه ۱:** در گراف  $K_p$  درجه هر رأس  $p - 1$  است. زیرا هر رأس با تمام رؤوس بجز خودش وصل است و تمام رؤوس با درجه ماکزیمم اند. بنابراین در هر گراف  $K_p$  داریم:



**توجه ۲:** در گراف  $K_p$  همواره  $q = \binom{p}{2}$  است. زیرا در گراف کامل حداکثر یال ها رسم شده است و بدانید که اگر گرافی با  $p$  رأس  $\binom{p}{2}$  یال داشته باشد کامل است.

**هر گاه در تستی جملات زیر مطرح شد منظور گراف کامل است.**

- گرافی که بین هر ۲ راس آن یال باشد.
- گرافی که حداکثر یالها در آن رسم شده است.
- گرافی که درجه تمام رؤوس آن  $p - 1$  باشد.
- گرافی که تعداد یال های آن  $\binom{p}{2}$  باشد.
- گرافی که درجه تمام رؤوس آن Full باشد.
- گرافی که در آن  $\delta = \Delta = p - 1$
- گرافی که  $(p - 1)$  - منتظم باشد.
- گرافی که همسایگی بسته تمام رؤوس آن برابر مجموعه  $V(G)$  باشد و برعکس
- به جدول اندازه گراف های خاص توجه کنید.

| گراف   | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | $K_5$ | $K_6$ | $K_7$ | $K_8$ | $K_9$ | $K_{10}$ | $K_{11}$ | $K_{12}$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|
| اندازه | ۰     | ۱     | ۳     | ۶     | ۱۰    | ۱۵    | ۲۱    | ۲۸    | ۳۶    | ۴۵       | ۵۵       | ۶۶       |

**مثال:** گراف  $k$  چند یال دارد؟

**مثال:** در کدام گراف کامل تعداد یال ها ۵۵ است؟

**مثال:** گراف کامل  $k_p$  دارای ۳۶ یال است در این گراف  $\Delta(G)$  ,  $\delta(G)$  را مشخص کنید؟ (تمرین ۶ صفحه ۱۴۲ کتاب درسی)

**تست:** یک گراف همبند که مجموع مرتبه و اندازه آن ۸ باشد با افزودن چند یال کامل می شود؟ (دافل ۹۱)

۳ (۱)

۲ (۲)

۱ (۳)

۴ (۴)

**مثال:** یک گراف ۴ رأسی غیر تهی  $k$  - منتظم بکشید که : (تمرین ۱۴ صفحه ۱۴۲ کتاب درسی)

الف)  $k$  بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب)  $k$  کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.



**تست:** به یک گراف ۳- منتظم از مرتبه ۶ چند یال اضافه کنیم تا کامل گردد؟

(۱) ۹

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۷

**تست:** در یک گراف کامل تعداد یالها ۴ برابر تعداد رئوس است. مجموع مرتبه و اندازه این گراف کدام است؟

(۱) ۳۵

(۲) ۴۵

(۳) ۵۰

(۴) ۶۰

**تست:** در گراف  $G(V, E)$  اگر  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$  و  $E(G)$  پانزده عضو داشته باشد آنگاه از هر عضو  $V$  چند یال عبور می کند؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

**مثال:** در گراف  $K_5$  با حذف یک یال درجه راسها چه تغییری می کند؟

**تذکر:** اگر تعداد یالهای یک گراف در تست داده شده نزدیک به گراف کامل بود (زیاد بود) .....

.....

**تست:** در گرافی با ۸ رأس و ۲۷ یال درجه چند رأس  $\max$  است؟

(۱) ۷

(۲) ۶

(۳) ۵

(۴) ۴

**مثال:** در گراف  $K_5$  با حذف ۲ یال درجه راس ها چه تغییری می کند ؟ ( بحث کنید)

**تست:** در گرافی با ۹ رأس و ۳۴ یال درجه حداکثر چند رأس  $\max$  است؟

(۱) ۷

(۲) ۶

(۳) ۵

(۴) ۴

**تست:** گرافی  $G$  از مرتبه ۸ و اندازه ۲۴ است. کم ترین مقدار  $\delta$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

**تست:** در گرافی دارای ۸ رأس و ۲۳ یال، بیشترین مقدار  $\Delta - \delta$  کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

**تست:** گراف G دارای ۱۰ رأس و ۳۹ یال است. کمترین مقدار  $\Delta - \delta$  کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

**تست:** گرافی با ۱۰ رأس و ۳۱ یال، حداکثر چند رأس درجه ۹ دارد؟

۳ (۱)

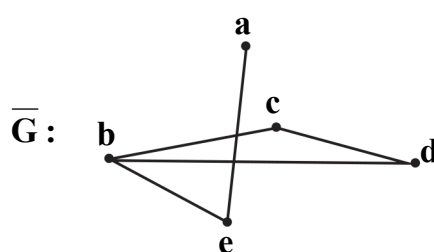
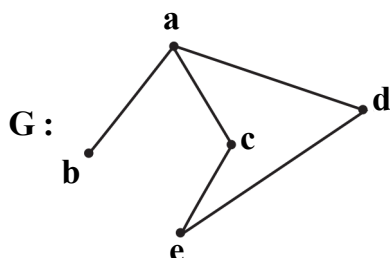
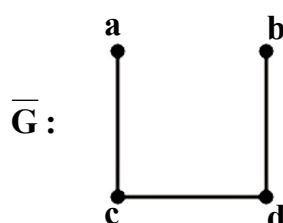
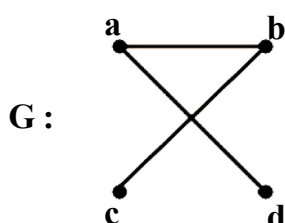
۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

## مکمل یک گراف

مکمل گرافی مانند  $G$  که آن را با  $G^c$  یا  $\bar{G}$  نمایش می‌دهیم گرافی است که مجموعه رئوس آن همان مجموعه رئوس  $G$  است و بین دو رأس از  $\bar{G}$  یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در  $G$  یالی وجود نداشته باشد. (به عبارت دیگر اگر رئوس گراف  $G$  و  $\bar{G}$  را روی هم قرار دهیم یک گراف کامل حاصل شود)



**تست:** گراف  $G$  از مرتبه ۸ و اندازه ۲۱ است. مجموع مرتبه و اندازه گراف  $\bar{G}$  کدام است؟

(۱) ۷

(۲) ۱۴

(۳) ۱۸

(۴) ۱۵

**تست:** در گراف  $G$  درجه رأس  $a$  برابر ۳ و در گراف  $\bar{G}$  درجه رأس  $a$  برابر ۴ است. اگر  $\bar{G}$  دارای ۱۵ یال باشد، اندازه گراف  $G$  کدام است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۱۳

(۳) ۱۴

(۴) ۱۵

**تست:** درجات رئوس یک گراف ۵, ۴, ۳, ۳, ۲, ۱ است. درجات رئوس مکمل این گراف کدام است؟

(۱) ۴, ۲, ۲, ۱, ۱, ۰

(۲) ۴, ۳, ۲, ۲, ۱, ۰

(۳) ۵, ۲, ۲, ۲, ۲, ۱

(۴) ۴, ۳, ۳, ۲, ۱, ۱

**تست:** مجموع مرتبه و اندازه گراف  $G$  برابر ۱۰ است. کمترین مقدار برای مجموع مرتبه و اندازه  $\bar{G}$  کدام است؟

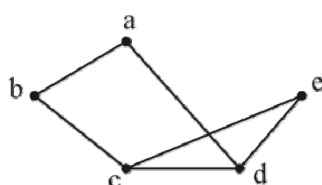
(۱) ۴

(۲) ۱۰

(۳) ۲۵

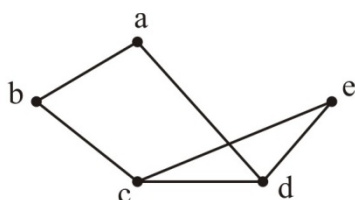
(۴) ۴۴

## مسیر در گراف:

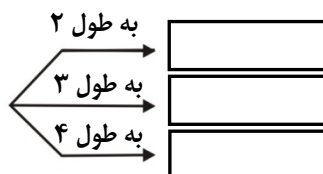


مسیر یعنی از یک رأس شروع کنیم و با عبور از روی یال‌ها به رأس دیگری برویم. قطعاً تکرار رأس و یال هم مجاز نمی‌باشد.

**طول مسیر:** تعداد یال‌های پیموده شده در مسیر را می‌گوئیم.



مسیر از a به e



**بنابراین:**

## نکاتی پیرامون مسیر

**نکته ۱:** هرگاه در سؤالی گفتند مسیر به طول صفر منظور همان رأس است.

**نکته ۲:** هرگاه در سؤالی گفتند مسیر به طول یک منظور همان یال است.

**نکته ۳:** گرافی که تنها از یک مسیر  $n$  رأسی (مسیر به طول  $n - 1$ ) تشکیل شده باشد را با  $P_n$  نشان می‌دهیم. واضح است که گراف  $P_n$  دارای  $n - 1$  یال است و در آن  $\Delta = 2$  و  $\delta = 1$  می‌باشد. مانند این شکل:

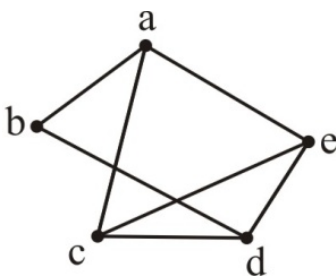


**توجه:** تعداد مسیرهای به طول  $m$  در گراف  $P_n$  برابر  $n - m$  است.

## شمارش مسیرها:

۱- اگر گراف کامل نباشد تنها راه شمردن از روی شکل است.

۲- اگر گراف کامل باشد با روش‌های شمارش مسیرها را می‌شماریم.



**تست:** در گراف شکل مقابل چند مسیر به طول ۳ از  $a$  به  $e$  وجود دارد؟

۵ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۲ (۴)

## بحث در گراف $K_p$ :

**مثال:** در گراف  $K_4$  بین دو رأس دلخواه و متمایز  $u$  و  $v$  چند مسیر متفاوت وجود دارد؟

**روش دوم:** تعداد مسیرها بین دو رأس مشخص در گراف  $K_p$  برابر است با:  $[ (p - 2)! \times e ]$  که  $e = 2 / 22$  می‌باشد.

**مثال:** مثال قبل را برای گراف  $k_5$  تکرار کنید.

**مثال:** در گراف  $k_6$  بین دو رأس دلخواه و متمایز  $u$  و  $v$ ، چند مسیر متفاوت به طول ۴ وجود دارد؟

**مثال:** در گراف  $k_6$  با مجموعه رأسی  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ :

(الف) بین  $a$  و  $b$  چند مسیر متفاوت به طول ۴ وجود دارد که از رأس  $c$  نگذرد؟

(ب) بین  $a$  و  $b$  چند مسیر متفاوت به طول ۴ وجود دارد که از رأس  $d$  بگذرد؟

(ج) بین  $a$  و  $b$  چند مسیر متفاوت به طول ۴ وجود دارد که از  $c$  نگذرد و از  $d$  بگذرد؟

(د) بین  $a$  و  $b$  چند مسیر متفاوت به طول ۴ وجود دارد که شامل یال  $cd$  باشد؟

(هـ) بین  $a$  و  $b$  چند مسیر متفاوت به طول ۴ وجود دارد که فاقد یال  $cd$  باشد؟



**مثال:** در گراف  $k_5$  چند مسیر متفاوت به طول ۳ وجود دارد؟

**مثال:** در گراف  $k_5$  چند مسیر متمایز وجود دارد؟

**تست:** در گراف  $k_5$  چند مسیر بین  $a$  و  $b$  وجود دارد که شامل همه رئوس دیگر باشد.

**نکته :**

(۱) ۴

(۲) ۸

(۳) ۱۰

(۴) ۶

**تست:** در گراف  $k_p$  که  $u$  و  $v$  دو رأس متمایز آن می باشند ۲۰ مسیر به طول ۳ از  $u$  به  $v$  وجود دارد.  $p$  کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۴

**تست:** مجموع مرتبه و اندازه یک گراف  $P_n$  کدام می تواند باشد؟

۱۸ (۱)

۲۰ (۲)

۵۴ (۳)

۲۵ (۴)

**تست:** مجموع درجات رئوس گراف  $P_7$  کدام است؟

۸ (۱)

۹ (۲)

۱۲ (۳)

۱۴ (۴)

**تست:** در گراف  $G$  از مرتبه ۷، حاصل ضرب درجات رئوس ۲۴ است. تعداد یال های گراف  $G$  با کدام گراف برابر است؟

$P_5$  (۱)

$P_4$  (۲)

$P_6$  (۳)

$P_7$  (۴)

**تست:** در گراف  $P_6$  چند مسیر به طول ۴ وجود دارد؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

**تست:** در گراف  $P_5$  چند مسیر وجود دارد؟

۱۰ (۱)

۸ (۲)

۱۵ (۳)

۱۲ (۴)

**تست:** از گراف  $K_7$  چند یال باید برداریم تا به  $P_7$  تبدیل شود؟

۱۰ (۱)

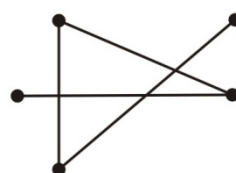
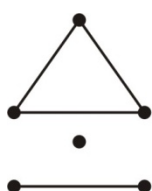
۱۴ (۲)

۱۵ (۳)

۱۶ (۴)

## گراف همبند (متصل):

گرافی است که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

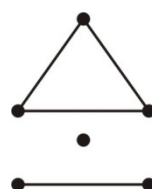


$k_1, \vec{k}_1$

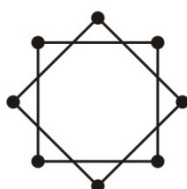
**تذکره ۱:** گراف همبند از مرتبه بزرگتر از ۱ فاقد رأس ایزوله است.  $\delta \geq 1 \rightarrow$  همبند

**تذکره ۲:** هر گراف ناهمبند از قسمت‌های همبند تشکیل شده است که به هر قسمت یک مؤلفه یا یک بخش می‌گوئیم.

**تذکره ۳:** تمام گراف‌های کامل  $(K_n)$  و گراف‌های حلقوی  $(C_n)$  و گراف‌های خطی  $(P_n)$  و گراف‌های ستاره‌ای  $(T_n)$  به ازای همه  $n$  ها همبند می‌باشند.



گراف ۳ بخشی



گراف ۲ بخشی

**مثال:** یک گراف همبند از مرتبه ۴ حداقل چند یال دارد؟

**پس:** حداقل یال یک گراف همبند مرتبه‌ی  $p$  چند است؟

اگر گرافی از  $p - 1$  یال کمتر داشته باشد ..... مثلاً گراف مرتبه‌ی ۷ که ۵ یال دارد قطعاً ناهمبند است.

**بنابراین:**

**مثال:** گرافی که دنباله درجه های رئوس آن ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۳ S: چگونه است؟

**مثال:** یک گراف ناهمبند از مرتبه ۵ حداکثر چند یال دارد؟

**پس:** حداکثر یال گراف ناهمبند مرتبه‌ی P چقدر است؟

اگر گرافی از  $\binom{p-1}{2}$  یال بیشتر داشته باشد ..... مثلاً گراف مرتبه‌ی ۷ که ۱۶ یال دارد قطعاً همبند است.

**بنابراین:**

**تست:** گراف ناهمبندی از مرتبه ۹ بیشترین یال ممکن را دارد. چند یال به این گراف اضافه کنیم تا کامل گردد؟

(۱) ۶

(۲) ۷

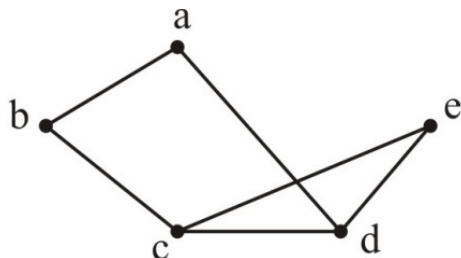
(۳) ۸

(۴) ۹

**مثال:** یک گراف از مرتبه ۱۱ که از ۳ مؤلفه تشکیل شده است حداکثر چند یال دارد؟

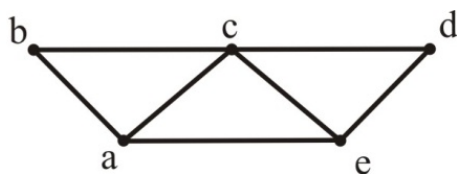
## دور در گراف:

مسیری است که ابتدا و انتهایش یکی است. بنابراین همانند مسیر رأس و یال تکراری ندارد (بجز رأس ابتدایی و انتهایی). همچنین تعداد یال های پیموده شده در دور را طول دور گوئیم.



{ دور به طول ۳ :  
 دور به طول ۴ :  
 دور به طول ۵ :

**مثال:** در گراف  $K_4$  تمام دورهای موجود را مشخص کنید؟



**مثال:** در گراف مقابل تمام دورهای موجود را بنویسید.

**تست:** در گرافی با ۱۳ رأس که درجه هر رأس ۲ می باشد حداکثر چند دور وجود دارد؟

- ۱ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۱۲ (۴)

**مثال:** گرافی با ۴۵ رأس درجه ۲، حداکثر چند دور به طول ۴ دارد؟

## رسم گراف وقتی که درجه رئوس را داشته باشیم:

برای رسم گراف از روی درجه رأس های آن ، بهتر است که یک بار طبق الگوریتم هاول دنباله را کوچک کنیم و ابتدا دنباله کوچک شده را رسم کنیم. سپس رأس کنار گذاشته را در جای مناسب قرار دهیم و آن را به رأس هایی که یال از آنها کنده شده وصل کنیم.

**تست:** گرافی با درجه رئوس ۱ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ چند دور دارد؟

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۱

اگر قرار شد دو رأس با درجه Max مجاور نباشند آن دو رأس را بالا و پایین قرار می دهیم و بقیه رئوس را در وسط سپس از رئوسی که در وسط قرار دارند به دو رأس بالا و پائین وصل می کنیم.

**تست:** گرافی با دنباله درجات ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ که دو رأس با درجه بزرگتر مجاور نیستند چند دور به طول ۴ دارد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۹

**تست:** در گرافی با دنباله درجات ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۷ که دو رأس با درجه بزرگتر مجاور نباشند چند دور

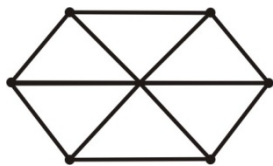
وجود دارد؟

- (۱) ۷
- (۲) ۱۴
- (۳) ۲۱
- (۴) ۲۸

**تست:** گراف ناهمبند ۳- منتظم دارای ۱۲ یال است. این گراف چند دور با طول ۴ دارد؟

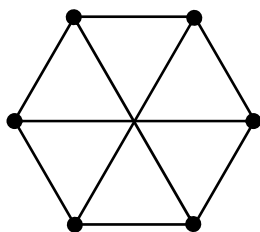
- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۶
- (۴) ۸

**تست:** گراف مقابل، چند دور با طول ۴ دارد؟



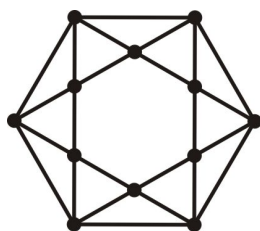
- (۱) ۶
- (۲) ۹
- (۳) ۸
- (۴) ۷

**تست:** در گراف ۳-منتظم روبه‌رو، چند دور با طول ۴، موجود است؟ (دافل ۹۶)



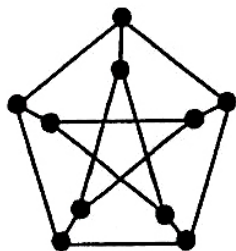
- (۱) ۶
- (۲) ۹
- (۳) ۸
- (۴) ۷

**تست:** در گراف مقابل چند دور با طول ۵ وجود دارد؟



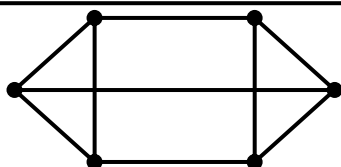
- (۱) ۴
- (۲) ۶
- (۳) ۸
- (۴) ۱۲

**تست:** گراف شکل مقابل چند دور به طول ۵ دارد؟

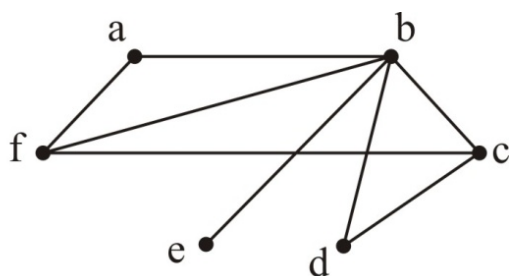


- (۱) ۷
- (۲) ۸
- (۳) ۹
- (۴) ۱۲

**تست:** در گراف ۳-منتظم مقابل چند دور با طول ۵ داریم؟



- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶



**تست:** در مورد گراف مقابل کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) دوری به طول ۵ دارد.
- (۲) دوری به طول ۶ دارد.
- (۳) تعداد دورهای به طول ۴ برابر ۱ می باشد.
- (۴) تعداد دورهای به طول ۳ برابر چهار می باشد.

**تست:** در یک گراف بادرجه رأس‌های ۱, ۲, ۳, ۳, ۴, ۵، تعداد دورها با طول ۳، کدام است؟ (۹۸)

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

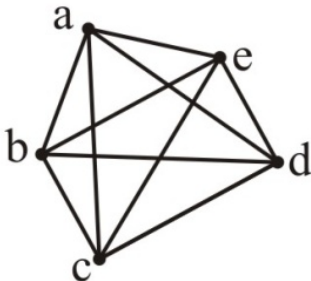
**تست:** یک گراف ساده ۶ رأسی ۴- منتظم، دارای چند دور با طول ۴ است؟ (داخل ۹۸)

- (۱) ۹
- (۲) ۱۰
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۵



## بحث در گراف $k_p$ :

در گراف کامل برای بدست آوردن دورها می توان از آنالیز ترکیبی کمک گرفت. دور به طول  $m$  در گراف کامل معادل با ساختن یک دستبند با  $m$  مهره است. یعنی اول  $m$  رأس انتخاب می کنیم و سپس جایگشت بازی راه می اندازیم.



دور به طول ۳ :  
دور به طول ۴ :  
دور به طول ۵ :

تعداد دورهای به طول  $L$  در گراف  $k_p$  ( $p \geq 3$ ) عبارتست از:

**تست :** در یک گراف کامل از مرتبه ۵ چند دور با طول ۴ وجود دارد؟ (همایش جمع بندی فرداد ۹۴)

(۱) ۹

(۲) ۱۰

(۳) ۱۵

(۴) ۲۰

**تست :** در یک گراف کامل از مرتبه ۵ چند دور با طول ۵ وجود دارد؟ (داخل ۹۴)

(۱) ۱۲

(۲) ۱۵

(۳) ۱۶

(۴) ۲۴

**مثال :** در گرافی با مجموعه راسی  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$  چند دور به طول ۴ وجود دارد که :

الف) شامل راس  $a$  باشد.

ب) فاقد راس  $b$  باشد.

**تست:** در گرافی با رئوس  $a, b, c, d, e$  و درجه رئوس  $\{3 \text{ و } 3 \text{ و } 4 \text{ و } 4 \text{ و } 4\}$  چند دور به طول ۳ وجود دارد؟

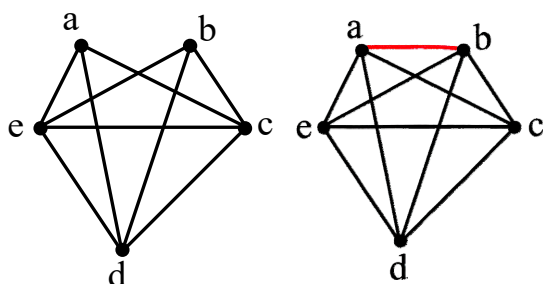
(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

**تست:** در گراف کامل از مرتبه ۵، یال  $ab$  حذف شده است. چند دور با طول ۴ در این گراف موجود است؟ (۹۶)

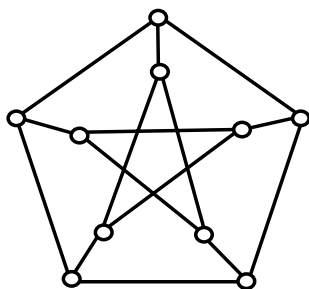


(۱) ۷

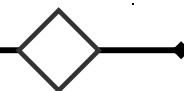
(۲) ۸

(۳) ۹

(۴) ۱۰



**همه چیز درباره گراف پترسن**



## مفهوم احاطه‌گری و مجموعه احاطه گر:

به گراف مقابل توجه کنید.

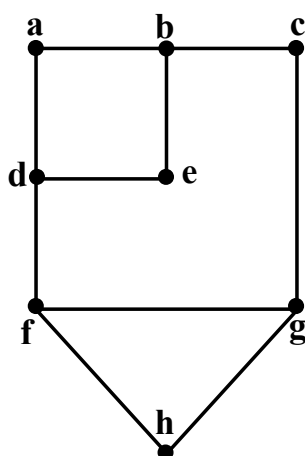
مجموعه رأسی گراف عبارتست از:

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

حال زیر مجموعه  $A = \{a, e, g\}$  را در نظر بگیرید.

آیا قبول دارید هر عضو از مجموعه  $A$  با حداقل یکی از عضوهای  $V$  مجاور است.

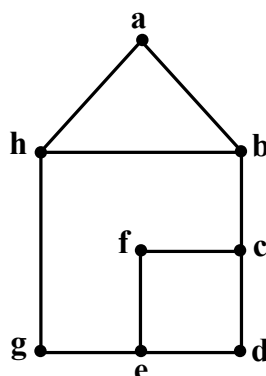
به مجموعه  $A = \{a, e, g\}$  یک مجموعه احاطه‌گر گویند. پس:



زیر مجموعه  $D$  از مجموعه رئوس گراف  $G$  را **مجموعه احاطه‌گر** می‌نامیم، هرگاه هر رأس از گراف یا در  $D$  باشد و یا حداقل با یکی از رئوس  $D$  مجاور باشد.

واضح است که هر گراف، مجموعه‌های احاطه‌گر مختلفی می‌تواند داشته باشد.

**تست:** در گراف روبرو کدام مجموعه احاطه‌گر است؟



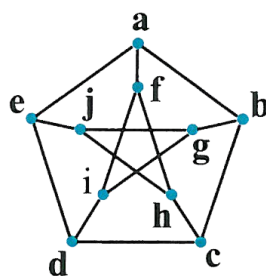
(۱)  $\{h, f\}$

(۲)  $\{h, d\}$

(۳)  $\{a, d, g\}$

(۴)  $\{b, e\}$

**تست:** کدام یک از مجموعه‌های زیر برای گراف مقابل، احاطه‌گر نیست؟



(۱)  $\{a, b, c, d, e\}$

(۲)  $\{a, b, g, h, j\}$

(۳)  $\{a, i, h\}$

(۴)  $\{f, g, h, e\}$

**تست:** در گراف از مرتبه ۱۰، درجه رأس  $a$  برابر ۳ می‌باشد. چند رأس گراف توسط  $a$  احاطه نمی‌شود؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۷

**تست:** در گراف کاملی به تعداد ۳۱ مجموعه احاطه گر وجود دارد. اندازه گراف کدام است؟

(۱) ۶

(۲) ۱۰

(۳) ۱۵

(۴) ۲۱

**تست:** گرافی با درجات ۱, ۱, ۱, ۱, ۳, ۳ چند مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ دارد؟

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) صفر

**تست:** گراف G از مرتبه ۱۰ مجموعه احاطه گر یک عضوی دارد. اندازه گراف چند مقدار مختلف می تواند داشته

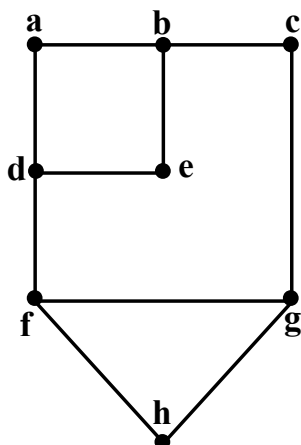
باشد؟

(۱) ۲۸

(۲) ۳۶

(۳) ۲۹

(۴) ۳۷



**مفهوم احاطه گر مینیمم و عدد احاطه گری:**

به گراف مقابل توجه کنید.

مجموعه های احاطه گر زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \{a, e, g\}$$

$$B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$C = \{b, f\}$$

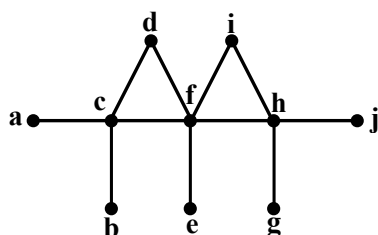
$$D = \{a, e, g, f\}$$

**سؤال:** در بین مجموعه های احاطه گر فوق کدام مجموعه کمترین عضو را دارد؟

در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف  $G$ ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کم‌ترین تعداد عضو را دارند **مجموعه احاطه‌گر مینیمم** و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را **عدد احاطه‌گری گراف** می‌نامیم و آن را با  $\gamma(G)$  نمایش می‌دهیم.

**تذکر:** گاهی اوقات برای راحتی به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از گراف  $G$  یک  $\gamma$ -مجموعه می‌گوییم.

**تست:** در گراف شکل مقابل کدام مجموعه، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است؟



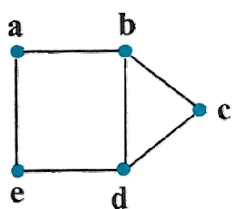
$$D_1 = \{d, i, c, h\} \quad (1)$$

$$D_2 = \{a, f, j\} \quad (2)$$

$$D_3 = \{c, f, j, g\} \quad (3)$$

$$D_4 = \{f, c, h\} \quad (4)$$

**تست:** عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



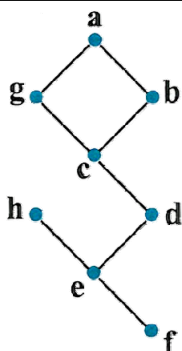
$$1 \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$

**تست:** عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



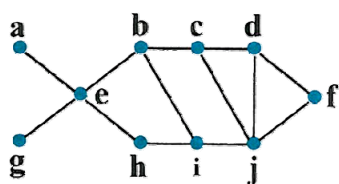
$$2 \quad (1)$$

$$3 \quad (2)$$

$$4 \quad (3)$$

$$5 \quad (4)$$

**تست:** عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟

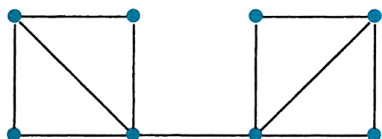


$$1 \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

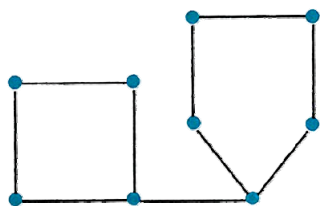
$$3 \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$



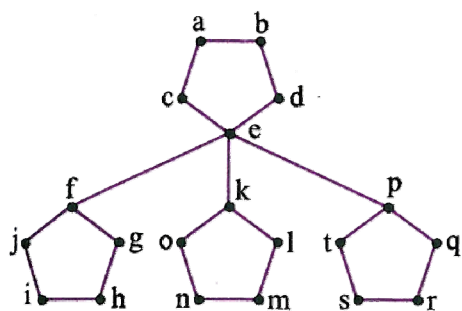
**تست:** عدد احاطه گری گراف مقابل کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)



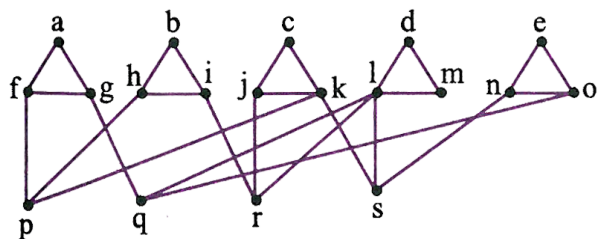
**تست:** در گراف شکل مقابل، عدد احاطه گری کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)



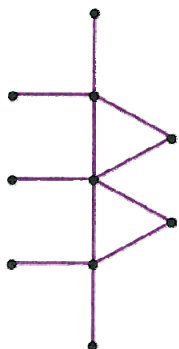
**تست:** عدد احاطه گری گراف روبه‌رو کدام است؟

- ۶ (۱)
- ۷ (۲)
- ۸ (۳)
- ۹ (۴)



**تست:** عدد احاطه گری گراف روبه‌رو کدام است؟

- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۷ (۳)
- ۸ (۴)

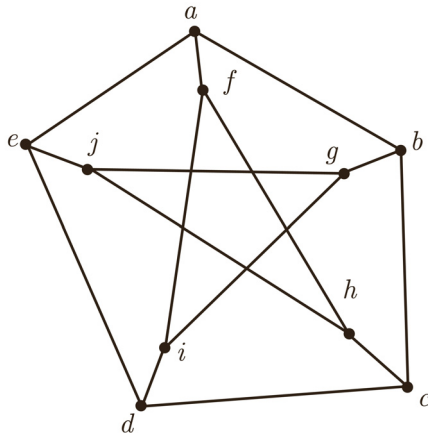


**تست:** برای گراف مقابل،  $\gamma(G)$  برابر با کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)

## مجموعه احاطه گر مینیمال

**سؤال ۱:** مشخص کنید کدام یک از مجموعه‌های زیر برای گراف شکل مقابل احاطه گر هست و کدام نیست؟



الف)  $A = \{a, b, c, d, e\}$

ب)  $B = \{f, g, h, i, j\}$

پ)  $C = \{a, b, j, h, g\}$

ت)  $D = \{a, i, h\}$

ث)  $E = \{f, g, h, e, d\}$

ج)  $F = \{f, g, h, e\}$

**سؤال ۲:** از مجموعه‌های مطرح شده در سؤال ۱ که احاطه گر بودند در کدام یک از آن‌ها رأس یا رأس‌هایی وجود دارد که با حذف آن‌ها مجموعه باقی‌مانده هنوز احاطه گر باشد؟

**سؤال ۳:** مجموعه‌ای احاطه گر با کمترین تعداد رأس که می‌توانید بنویسید؟

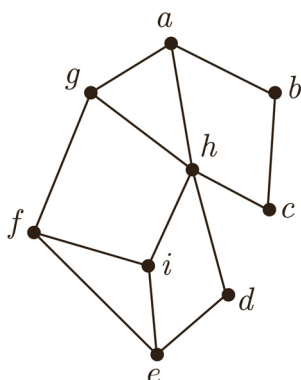
**سؤال ۴:** یک مجموعه احاطه گر مینیمال بنویسید که مینیمم نباشد؟

یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش دیگر احاطه گر نباشد احاطه گر مینیمال گویند.

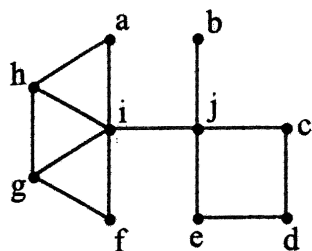
**تذکر:** مجموعه احاطه گر مینیمال می‌تواند مینیمم نباشد، اما هر مجموعه احاطه گر مینیمم حتماً مجموعه احاطه گر مینیمال است.

**مثال:** در گراف شکل مقابل یک مجموعه احاطه گر غیر مینیمال انتخاب کنید و با حذف برخی رأس‌ها، آن را به یک

مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل نمایید. (صفحه ۴۷ کتاب درسی)



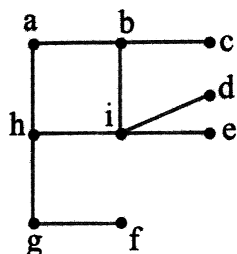




**تست:** در گراف روبه‌رو، کدام مجموعه، احاطه‌گر مینیمال نیست؟

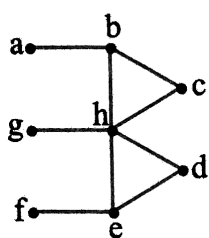
- (۱)  $\{i, j, d\}$
- (۲)  $\{i, d, b, g\}$
- (۳)  $\{h, g, j, e\}$
- (۴)  $\{a, f, d, b\}$

**تست:** در گراف روبه‌رو، مجموعه  $\{i, b, h, g, f, c\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر است. حداکثر چند عضو این مجموعه را می‌توان حذف کرد، به طوری که مجموعه به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل شود؟



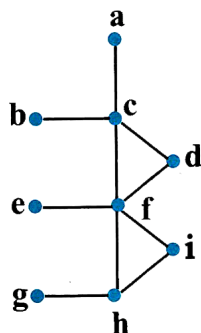
- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

**تست:** در گراف روبه‌رو،  $\gamma(G)$  برابر ..... و اگر  $A$  یک مجموعه مینیمال باشد، حداکثر ..... عضو دارد.



- (۱)  $4 - 2$
- (۲)  $5 - 2$
- (۳)  $4 - 3$
- (۴)  $5 - 3$

**تست:** در گراف مقابل، مجموعه احاطه‌گر مینیمال حداقل و حداکثر چند عضو دارد؟



- (۱)  $6 - 3$
- (۲)  $7 - 3$
- (۳)  $6 - 4$
- (۴)  $7 - 2$



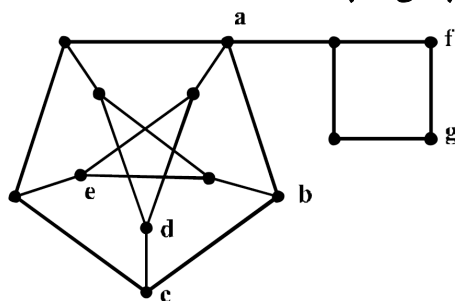
**تست:** در گراف  $C_{10}$  مجموعه احاطه گر مینیمال حداکثر چند عضو دارد؟

- (۱) ۴
- (۲) ۵
- (۳) ۶
- (۴) ۷

**تست:** گراف  $P_4$  چند زیر مجموعه احاطه گر مینیمال سه عضوی دارد؟

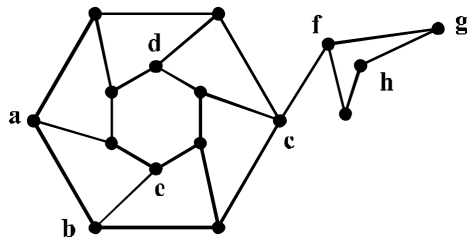
- (۱) ۴
- (۲) ۳
- (۳) ۱
- (۴) صفر

**تست:** کدام مجموعه برای گراف روبه‌رو، یک مجموعه احاطه گر مینیمال است (دافل ۹۸)



- (۱)  $\{a, c, e, g\}$
- (۲)  $\{a, d, e, g\}$
- (۳)  $\{a, b, d, e\}$
- (۴)  $\{a, d, c, f\}$

**تست:** کدام مجموعه، برای گراف روبه‌رو، یک مجموعه احاطه گر مینیمال است؟ (فلا ۹۸)



- (۱)  $\{a, b, c, d, h\}$
- (۲)  $\{b, c, e, d, g\}$
- (۳)  $\{a, c, e, d, h\}$
- (۴)  $\{a, c, e, d, g\}$

## جزء صحیح و سقف:

**جزء صحیح:** به  $[x]$  جزء صحیح  $x$  می‌گوئیم. اگر  $x$  عددی صحیح باشد  $[x]$  با خود  $x$  برابر است اما اگر  $x$  صحیح نباشد،  $[x]$  عدد صحیح قبلی آن است. مثلاً:  $[5] = 5$  و  $[4/3] = 4$ .

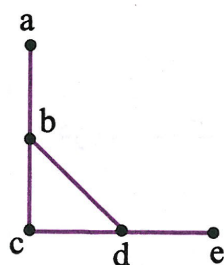
**سقف:** به  $\lceil x \rceil$  سقف عدد  $x$  می‌گوئیم. اگر  $x$  عددی صحیح باشد  $\lceil x \rceil$  همان  $x$  است و اما اگر  $x$  صحیح نباشد.  $\lceil x \rceil$  عدد صحیح بعدی آن است. مثلاً:  $\lceil 2 \rceil = 2$  و  $\lceil 4/3 \rceil = 5$ .

بعبارتی دیگر:

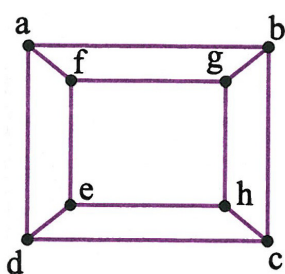
$$[x] = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{بزرگ‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

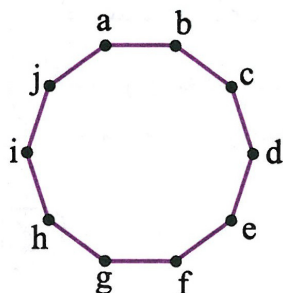
## کران پایین $\gamma(G)$ : گراف روبه‌رو را در نظر بگیرید.



$\Delta$  یا درجه بزرگ‌ترین رأس در این گراف، برابر ۳ است و رأس‌های  $b$  و  $d$  از درجه ۳ هستند. می‌دانیم در هر گراف، هر رأس، خودش و تمام همسایه‌هایش را احاطه می‌کند. مثلاً رأس  $b$  که بزرگ‌ترین درجه را دارد، رأس‌های  $\{a, b, c, d\}$  را احاطه می‌کند. از طرف دیگر، این گراف ۵ رأس دارد. بنابراین با فقط یک رأس، نمی‌توان کل رأس‌های گراف را احاطه کرد. (چون گراف ۵ رأس دارد و رأسی که بزرگ‌ترین درجه را دارد، حداکثر می‌تواند ۴ رأس را احاطه کند. (با خودش حساب کردیم ۴ رأس!))



حالا گراف روبه‌رو که تعداد رأس‌های بیشتری دارد، در نظر بگیرید. در این گراف  $p = 8$  و  $\Delta = 3$  است. اگر بخواهیم که یک مجموعه احاطه‌گر داشته باشیم، باید هر ۸ رأس احاطه شوند، اما با توجه به این که  $\Delta = 3$  است، هر رأس در نهایت چهار رأس را احاطه می‌کند، خودش و سه رأس همسایه‌اش. (مثلاً رأس  $g$ ، رأس‌های  $h, b, g, f$  را احاطه می‌کند). بنابراین برای احاطه کردن ۸ رأس، به دست کم  $\frac{8}{4} = 2$  رأس نیاز داریم. برای مثال در این گراف،  $\{g, d\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است.



به یک مثال دیگر توجه کنید:

در گراف روبه‌رو  $p = 10$  و  $\Delta = 2$  است، یعنی هر رأس می‌تواند حداکثر ۳ رأس را احاطه کند، خودش و دو رأس همسایه‌اش. (مثلا رأس  $a$  فقط رأس‌های  $\{a, b, j\}$  را احاطه می‌کند.) حالا با توجه به این که تعداد رأس‌های گراف، ۱۰ تا است، برای آن که هر ۱۰ رأس احاطه شود و از آن جایی که هر رأس، حداکثر می‌تواند سه رأس را احاطه کند، برای داشتن یک مجموعه احاطه‌گر، به دست کم  $\left\lceil \frac{10}{3} \right\rceil = 4$  رأس برای احاطه همه رئوس نیازمندیم. (برای مثال  $\{a, d, g, i\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است.)

همان‌طور که در این سه مثال دیدیم، اگر بزرگترین درجه  $\Delta$  باشد، آن رأس یا رأس‌هایی که درجه  $\Delta$  دارند، می‌توانند  $\Delta + 1$  رأس را احاطه کنند و اگر گراف دارای  $n$  رأس باشد، برای احاطه همه رئوس، به حداقل  $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$  رأس نیازمندیم و در واقع  $\gamma(G)$  باید بزرگتر یا مساوی این عدد باشد. اگر، یک گراف  $n$  رأسی با ماکسیمم درجه  $\Delta$  و  $D$  یک مجموعه احاطه‌گر باشد، آن‌گاه  $|D| \leq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$  یا به بیان دیگر  $\gamma(G) \leq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$  به اصطلاح گفته می‌شود که عدد  $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$ ، یک کران پایین برای  $\gamma(G)$  است.)

**نتیجه:** می‌دانیم هر رأس گراف مانند  $V_i$  می‌تواند حداکثر  $\deg(V_i) + 1$  رأس از گراف را احاطه کند. پس در یک گراف، رأس با بزرگ‌ترین درجه یعنی  $\Delta$  که  $\Delta + 1$  رأس را احاطه می‌کند، بیشترین احاطه‌گری را در بین رئوس دارد. حال اگر فرض کنیم تمام رئوس گراف  $G$  از مرتبه  $P$  از درجه  $\Delta$  باشند آنگاه کم‌ترین عدد احاطه‌گری را می‌توان یافت، یعنی  $\gamma_{\min}(G) = \left\lceil \frac{P}{\Delta + 1} \right\rceil$  می‌باشد اما می‌دانیم ممکن است همه رئوس گراف درجه  $\Delta$  نباشد پس عدد احاطه‌گری گراف بزرگتر یا مساوی  $\gamma_{\min}(G)$  است.  $\left\lceil \frac{P}{\Delta + 1} \right\rceil \leq \gamma(G)$

**تست:** در گرافی از مرتبه ۱۵ می‌دانیم که درجه بزرگ‌ترین رأس، برابر ۳ است، حداکثر تعداد رأس‌هایی که یک رأس در این گراف احاطه می‌کند، برابر ..... و با کم‌تر از ..... رأس، نمی‌توان همه رئوس را احاطه کرد.

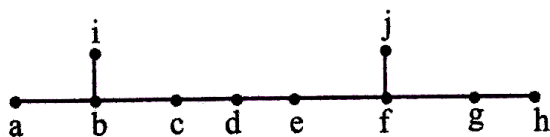
(۱) ۳ - ۴

(۲) ۳ - ۵

(۳) ۴ - ۴

(۴) ۴ - ۵

**تست:** در گراف روبه‌رو  $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$  برابر ..... و عدد احاطه‌گری، برابر ..... است.



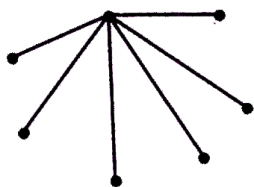
(۱) ۲-۳

(۲) ۲-۴

(۳) ۳-۳

(۴) ۴-۳

**تست:** در گرافی از مرتبه ۷ می‌دانیم که  $\gamma(G) = 1$  است. این گراف دست کم چند یال دارد؟



(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۸

**تست:** عدد احاطه‌گری گراف  $C_10$  کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۲

**نتیجه:**

**تست:** حداقل چند یال به گراف  $C_7$  اضافه کنیم تا عدد احاطه‌گری آن دو واحد کم شود؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۶



**تست:** عدد احاطه گری گراف  $P_8$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

**نتیجه:**

**تست:** مجموع اعداد احاطه گری گراف های  $P_9$  و  $C_9$  کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۸

# ترکسیات

شامل:

✓ شمارش بدون شمردن

فصل ششم ریاضے ۱

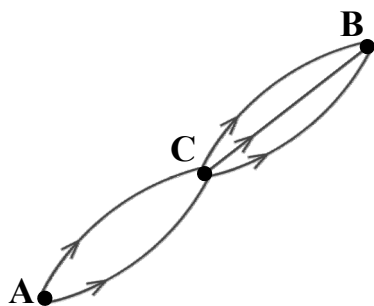
✓ فصل سوم ریاضیات گسسته

## اصل ضرب (اصل اساسی شمارش)

اگر انجام یک کار شامل مراحل اول، دوم، ... و  $k$  ام باشد، به طوریکه انجام مراحل اول  $m_1$  روش، انجام مرحله  $m_2$  روش و ... و انجام مرحله  $k$  ام،  $m_k$  روش داشته باشد، کل کار به  $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$  روش قابل انجام است.

**توجه:** طبق تعریف بالا مراحل انجام کار از هم مستقل می‌باشند یعنی مرحله اول را هر کدام به  $m_1$  روش انجام دادیم، مرحله دوم بدون توجه به انتخابی که در مرحله اول داشته‌ایم به  $m_2$  روش قابل انجام است.

**مثال:** اگر بخواهیم از شهر A به شهر B برویم و در این بین حتماً از شهر C هم عبور کنیم. اگر از A به C دو مسیر و از C به B هم ۳ مسیر موجود باشد، چند مسیر از A به B وجود دارد؟



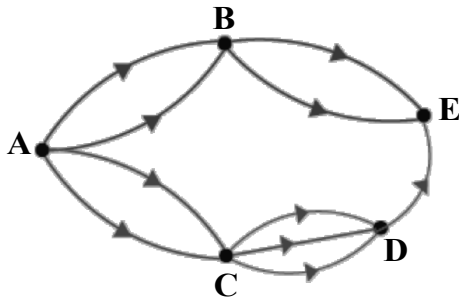
**مثال:** به چند طریق می‌توان از بین ۳ دانش‌آموز و ۵ دانشجو ۱ دانش‌آموز و ۱ دانشجو انتخاب کرد؟

## اصل جمع

اگر کاری را بتوان به  $k$  روش انجام داد به طوریکه در روش اول  $m_1$  انتخاب، در روش دوم  $m_2$  انتخاب و ... و در روش  $k$  ام  $m_k$  انتخاب وجود داشته باشد برای انجام کار مورد نظر  $m_1 + m_2 + \dots + m_k$  روش وجود دارد.

**مثال:** به چند طریق می‌توان از بین ۳ دانش‌آموز و ۵ دانشجو یک دانش‌آموز یا یک دانشجو انتخاب کرد؟

**مثال:** اگر شکل مقابل نشان‌دهنده جاده‌های بین شهرهای A, B, C, D و E باشد و همه جاده‌ها یک طرفه باشند. به چند طریق می‌توان از شهر A به E رفت؟ (تمرین ۷؛ صفحه ۱۳۶ کتاب درسی)



❖ اکنون به حل چند مثال از تمرینات کتاب درسی می‌پردازیم:

**مثال:** در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه

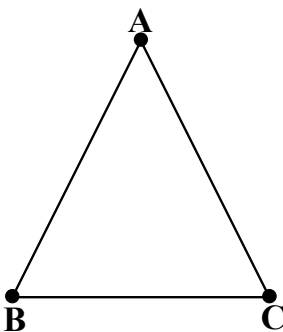
بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه‌هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چقدر است؟

(تمرین ۲؛ صفحه ۱۳۵ کتاب درسی)

|          | بلوار | خیابان | کوچه | کارخانه |
|----------|-------|--------|------|---------|
| → حداقل  | ۵     | ۸      | ۱۰   | ۲۰      |
| → حداکثر | ۵     | ۱۰     | ۱۲   | ۳۰      |

**مثال:** می‌خواهیم رأس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم. (تمرین ۳؛ صفحه ۱۳۵ کتاب درسی)

الف) به چند طریق این کار ممکن است؟



ب) به چند طریق می‌توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم وصل‌اند، هم‌رنگ نباشند.

پ) هر دو قسمت «الف» و «ب» را در حالتی که از سه رنگ استفاده می‌کنیم بررسی کنید.



## اصول کلمه سازی و عدد سازی

- \* مسائلی که درباره حروف می باشد بدون تکرار در نظر گرفته می شوند مگر آنکه در صورت مسأله شرطی باشد.
- \* مسائلی که درباره اعداد می باشند با تکرار در نظر گرفته می شوند مگر آنکه در صورت مسأله شرطی گذاشته شود.
- \* در سمت چپ هیچ عددی صفر قرار نمی گیرد.
- \* (کُد) با عدد متفاوت است و رقم سمت چپ آن و حتی رقم های بعدی می تواند صفر باشد.
- \* هر گاه در صورت تست مشخص نکرد که با چه ارقامی عدد تشکیل دهیم مرجع ما ارقام  $\{0, 1, \dots, 9\}$  می باشد.
- \* در مسائلی که اعداد زوج، فرد یا مضرب ۵ را می خواهد و به طور کلی شرط رقم یکان وجود دارد ابتدا تکلیف رقم یکان را مشخص کنید و بعد سراغ بقیه خانه ها بروید. (کلاً اول تکلیف خانه های شرطدار را معلوم کنید)
- \* هر گاه در ارقام داده شده صفر وجود داشت و تعداد اعداد زوج یا مضرب ۵ را خواستند مساله را به ۲ جزء تقسیم کنید یکی حالتی که یکان ۰ است و یکی حالتی که یکان غیر صفر است. سپس با هم جمع کنید.
- \* خواستان باشد که حرف « ی » وقتی وسط یا اول کلمه بیاید با نقطه و اگر آخر کلمه بیاید بدون نقطه است.
- \* در مسائل کلمه سازی و عدد سازی هر گاه در حروف یا اعداد داده شده تکراری داشته باشیم و کلمه یا اعداد خواسته شده تعداد حروف یا ارقام کمتری داشته باشند حالت متمایز و تکراری را از هم جدا کرده هر کدام را محاسبه کرده و با هم جمع می کنیم.

**مثال:** با ارقام ۲ و ۳ و ۶ و ۷ و ۹ چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت؟

الف) تکرار مجاز است.

ب) بدون تکرار ارقام



**مثال:** با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت به طوریکه عدد مورد نظر:

الف) فرد باشد.

ب) زوج باشد.

**مثال:** با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵؛

الف) چند عدد ۵ رقمی می توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

ب) چند عدد ۵ رقمی می توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد و رقمی که در مکان وسط قرار می گیرد زوج باشد؟

پ) چند عدد ۴ رقمی مضرب ۵ می توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟



**مثال:** با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰ ؛ (مثال صفحه ۱۲۳ کتاب درسی)

الف) چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت؟

ج) چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت؟

د) چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت؟

**تست:** با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۴ و ۵ چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۲۴۰۰ می‌توان نوشت؟ (ارقام متمایز باشند)

(۱) ۳۶

(۲) ۴۸

(۳) ۶۰

(۴) ۷۲

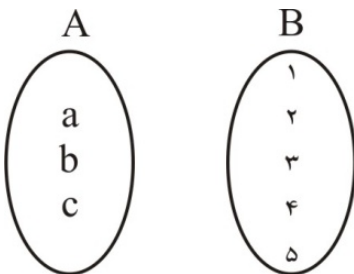
**مثال:** با ارقام ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ چند عدد ۴ رقمی زوج کوچکتر از ۶۰۰۰ می توان نوشت؟ (بدون تکرار ارقام)

**مثال:** با حروف کلمه «جمهوری» و بدون تکرار حروف؛

الف) چند کلمه پنج حرفی می توان نوشت که با حروف «ج» شروع و به حروف «ر» ختم شود؟

ب) چند کلمه سه حرفی می توان نوشت که شامل حرف نقطه دار نباشد؟

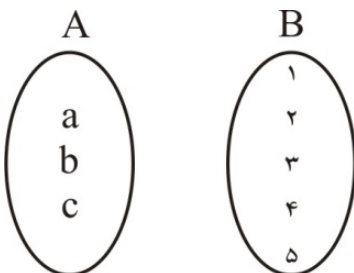
**مثال:** از مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  چند تابع با دامنه  $A$  وجود دارد؟

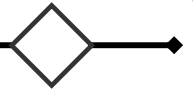


**نتیجه:**

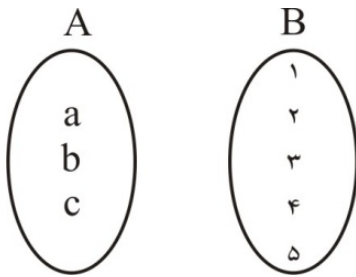
**مثال:** از مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  چند تابع با دامنه  $A$  وجود دارد به طوریکه

شامل  $(a, 1)$  نباشد؟





**مثال:** از مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  چند تابع با دامنه  $A$  وجود دارد به طوریکه شامل  $(a, 1)$  باشد؟



## معرفی نماد فاکتوریل:

اگر  $n$  یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا  $n$  را به صورت  $n!$  (فاکتوریل  $n$ ) نمایش می‌دهیم.

**توجه:** به طور قرار دادی داریم:  $0! = 1$

**مثال:** حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

$$5! =$$

$$\frac{8!}{6!} =$$

$$\frac{n!}{(n-3)!} =$$

**مثال:** اگر  $\frac{n!}{(n-2)!} = 42$  باشد. مقدار  $n$  را بدست آورید؟

تذکر:  $n! = (n - 1)! \times n$

$$7! = 6! \times 7$$

$$20! = 19! \times 20$$

**جایگشت (جای + گشت):**

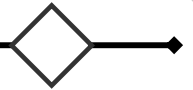
به هر یک از حالت‌های قرار گرفتن چند شیء متمایز کنار هم یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوئیم.

**مثال:** سه حرف a , b , c را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد؟

**قضیه:**

**مثال:** به چند حالت مختلف می‌توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟

**توجه!**



**مثال:** با حروف کلمه «دبیرستان» بدون تکرار:

الف) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت؟

ب) چه تعداد از کلمات با «د» شروع می شوند؟

ج) چه تعداد از کلمات با «د» شروع و به «ن» ختم می شوند؟

د) با حرف نقطه دار شروع می شوند؟

هـ) به حرف نقطه دار ختم می شوند؟

**توجه ۲**

**تست:** سه کتاب ریاضی، ۲ کتاب فیزیک و ۲ کتاب شیمی را به چند طریق می توان در یک قفسه کنار هم قرار داد به

طوری که کتاب های ریاضی همواره کنار هم باشند؟

۱۸۰ (۱)

۳۶۰ (۲)

۵۴۰ (۳)

۷۲۰ (۴)

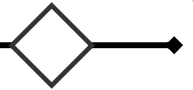
**تست:** با حروف کلمه (BAMZI) چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت به طوری که M همیشه بعد از Z قرار گیرد؟

۴۰ (۱)

۶۰ (۲)

۳۰ (۳)

۲۰ (۴)



**مثال:** با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف: (مثال صفحه ۱۳۰ کتاب «رسی»)

الف) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آن‌ها به «ی» ختم می‌شود؟

ب) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟

پ) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چندتا از آن‌ها به «گردی» ختم می‌شوند؟

ت) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه «ج‌هان» چهار حرف اول باشند؟

ث) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه «جهان» کنار هم باشند؟

ج) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه‌دار شروع شوند؟

**مثال:** ۵ نفر به نام‌های a, b, c, d, e قرار است در یک همایش سخنرانی کنند به چند طریق ترتیب سخنرانی این افراد

ممکن است اگر :

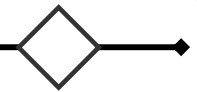
الف) هیچ شرطی نباشد.

ب) b بلافاصله بعد از a سخنرانی کند.

ج) بین a, b فقط ۱ نفر سخنرانی کند.

د) a قبل از b سخنرانی کند.





**مثال:** به چند طریق می توان ۴ دختر و ۳ پسر را به طور یک در میان در یک ردیف قرار داد؟

- اگر تعداد دخترها ۳ باشد چطور؟

## اصل متم:

در برخی از مسائل محاسبه تعداد حالات نامطلوب از تعداد حالات خواسته شده در مساله (حالات مطلوب) راحت تر است و به همین دلیل برای بدست آوردن جواب حالات نامطلوب را محاسبه کرده و از کل حالتها کم می کنیم.

**مثال:** ۵ نفر به نامهای  $a, b, c, d, e$  را به چند طریق می توان در یک ردیف قرار داد به طوریکه:

(الف) هیچ محدودیتی نباشد.

(ب)  $a, b$  همواره کنار هم باشند.

(ج)

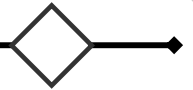
## جایگشت با اشیاء تکراری:

در محاسبه تعداد جایگشت اگر اشیاء تکراری داشته باشیم جایگشت آنها با یکدیگر بی مورد است زیرا حالت جدیدی ایجاد نمی شود و باید جایگشت اشیاء تکراری را با هم از کل جایگشت ها با تقسیم کردن حذف کنیم

اگر در بین  $n$  شی که قرار است کنار هم قرار بگیرند  $r_1, r_2, \dots, r_n$

تکرار داشته باشیم تعداد حالاتی که می توان این  $n$  شی را کنار هم

قرار داد عبارتست از:



**مثال:** با ارقام ۳ و ۴ و ۴ و ۵ و ۷ چند عدد ۵ رقمی وجود دارد؟

**مثال:** با حروف کلمه «شاهنامه» چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت؟

**مثال:** با ارقام ۷ و ۷ و ۵ و ۵ و ۹ و ۹ چند عدد شش رقمی وجود دارد؟

**تست:** با ارقام ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ چند عدد ۵ رقمی زوج می‌توان نوشت؟

(۱) ۱۲

(۲) ۸

(۳) ۶

(۴) ۴

**تست:** با ارقام ۰ و ۰ و ۱ و ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۴ چند عدد ۸ رقمی وجود دارد؟

(۱)  $\frac{8!}{3! \times 2!}$

(۲)  $\frac{8!}{3!}$

(۳)  $\frac{7!}{3! \times 2!}$

(۴)  $\frac{7!}{2!}$

**تست:** با ارقام ۰ و ۰ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۳ چند عدد ۷ رقمی فرد می توان نوشت؟

(۱) ۸

(۲) ۱۵

(۳) ۱۰

(۴) ۱۳

**نکته:**

اگر  $n$  شیء داشته باشیم، آنگاه تعداد جایگشت های  $n$  تایی با تعداد جایگشت های  $n - ۱$  تایی باهم برابرند.

**مثال:** الف) با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت؟

ب) با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد ۴ رقمی می توان نوشت؟

**تست:** چند عدد ۵ رقمی با ارقام ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ می توان نوشت؟

(۱) ۴۸

(۲) ۶۰

(۳) ۱۲۰

(۴) ۱۸۰

**جایگشت دایره ای اشیاء:**

تعداد جایگشت های دایره ای  $n$  شی متمایز برابر است با:



**مثال:** به چند طریق میتوان ۴ نفر را دور یک میز گرد نشاند؟

**مثال:** ۶ نفر به چند طریق میتوانند دور یک میز گرد بنشینند اگر دو نفر مفروض کنار هم باشند؟

(۱) ۱۲۰

(۲) ۲۴

(۳) ۷۲

(۴) ۴۸

**مثال:** به چند طریق می توان ۶ نفر را دور یک میز گرد نشاند به طوریکه دو نفر خاص روبروی هم باشند؟

**تذکر**

**مثال:** به چند طریق می توان ۵ دانشجو و ۵ دانش آموز را یک در میان دور یک میز گرد نشاند؟

(۱)  $2 \times 5! \times 5!$

(۲)  $5! \times 5!$

(۳)  $5! \times 4!$

(۴)  $4! \times 4!$

## ترکیب :

انتخاب اشیاء بدون در نظر گرفتن ترتیب آنها را ترکیب گویند. عبارت دیگر اشیاء را انتخاب می کنیم ولی جایگشت آنها را در نظر نمی گیریم.

مثلاً فرض کنید می خواهیم از بین تعدادی دانش آموز ۲ نماینده انتخاب کنیم واضح است که انتخاب  $a$  و  $b$  با انتخاب  $b$  و  $a$  فرقی ندارد عبارت دیگر ترتیب مهم نیست.

**تعریف:**  $n$  شیء متمایز  $a_1, a_2, \dots, a_n$  داده شده اند هر ترکیب  $r$  تایی این  $n$  شیء انتخاب  $r$  شیء از این  $n$  شیء است بدون در نظر گرفتن ترتیب برای آنها. عبارت دیگر هر زیر مجموعه  $r$  عضوی از یک مجموعه  $n$  عضوی را یک ترکیب  $r$  تایی  $n$  شیء گویند.

**تذکر:** تعداد ترکیب های  $r$  تایی از  $n$  شیء متمایز را معمولاً با  $C(n, r)$  یا  $\binom{n}{r}$  نمایش می دهیم.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

## قضیه:

**محاسبه برخی مقادیر:**  $\binom{n}{r}$

$$۱) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = ۱$$

$$۲) \binom{n}{1} = n$$

$$۳) \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

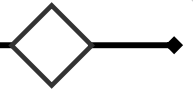
$$۴) \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}$$

$$۴) \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}$$

$$۵) \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

**توجه:** بطور کلی برای محاسبه  $\binom{n}{r}$

**مثال:** به چند طریق می توان از بین افراد  $a, b, c, d, e$  دو نماینده انتخاب کرد؟



**مثال:** ۴ نقطه روی دایره قرار دارند این ۴ نقطه چند وتر مشخص می کنند؟

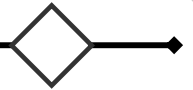
**مثال:** با ۷ نقطه A , B , C , D , E , F , G که بر محیط یک دایره داده شده اند چند مثلث می توان ساخت؟

**مثال:** از بین ۵ کارمند و ۳ کارگر به چند طریق می توان یک گروه ۴ نفری تشکیل داد؟

**تمرین:** یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه کدو، تخمه ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می تواند درست کند؟ (تمرین ۱؛ صفحه ۱۳۹ کتاب درسی)

**تمرین:** در یک کلاس تعدادی از دانش آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟ (تمرین ۳؛ صفحه ۱۳۹ کتاب درسی)

**تمرین:** گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می دهد. او چند دسته گل مختلف می تواند درست کند؟ (تمرین ۴؛ صفحه ۱۳۹ کتاب درسی)



**مثال:** یک مجموعه ۵ عضوی چند زیر مجموعه ۳ عضوی دارد؟

**قضیه:**

**نتیجه:**

**تست:** تمام دانش آموزان کلاس دو بدو با هم مسابقه شطرنج می دهند روی هم ۱۹۰ مسابقه انجام می شود. تعداد دانش آموزان این کلاس چقدر است؟

۱۰ (۱)

۱۷ (۲)

۳۰ (۳)

۲۰ (۴)

**تست:** سکه ای را آنقدر می اندازیم تا برای سومین بار «رو» بیاید تعداد حالاتی را که می توان در ۱۰ بار پرتاب سکه به این منظور رسید کدام است؟

۱۲۰ (۱)

۸۴ (۲)

۳۶ (۳)

۱۰ (۴)

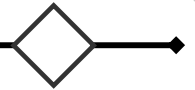
**تست:** چند عدد چهار رقمی وجود دارد که در همه آنها رقم هزارگان از صدگان ، صدگان از دهگان و دهگان از یکان بزرگتر باشد؟ (همایش گسسته فرداد ۹۱)

۱۲۰ (۱)

۱۸۰ (۲)

۲۱۰ (۳)

۲۴۰ (۴)



**تست:** با ارقام ۹ و ۷ و ۵ و ۳ و ۱ چند عدد ۳ رقمی با شرط  $\langle\langle$  رقم صدگان  $\rangle$  رقم دهگان  $\rangle$  رقم یکان  $\rangle\rangle$  می توان نوشت؟ (دافل ۹۱)

(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۲

**تست:** اگر مجموعه ای دارای ۶۶ زیر مجموعه ۲ عضوی باشد، این مجموعه چند زیر مجموعه ۳ عضوی دارد؟

(۱) ۱۲۰

(۲) ۱۵۰

(۳) ۹۰

(۴) ۲۲۰

**تست:** از هر یک از ۶ منطقه کشوری، ۱۵ دانش آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده اند. به چند طریق می توان ۳ دانش آموز از بین آنها که دو به دو غیر هم منطقه ای هستند انتخاب کرد؟

(۱) ۶۷۵۰۰

(۲) ۵۷۶۰۰

(۳) ۷۵۶۰۰

(۴) ۷۶۵۰۰

**نکته:**

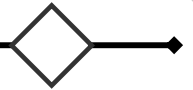
حداقل  $n$  شیئی




حداکثر  $n$  شیئی







**مثال:** از بین ۳ دانش آموز و ۵ دانشجو به چند طریق می توان یک گروه ۴ نفری تشکیل داد بطوریکه:

الف) ۲ دانش آموز و ۲ دانشجو انتخاب شوند؟

ب) حداقل ۱ دانش آموز انتخاب شود؟

ج) حداکثر یک دانش آموز انتخاب شود؟

د) حداقل ۲ دانشجو انتخاب شود؟

**مثال:** از بین ۱۲ نفر به چند طریق می توان گروه هایی با حداقل ۳ عضو تشکیل داد؟

**تست:** از ۱۰ پرسش موجود به چند طریق می توان ۸ پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد به شرط آنکه حداقل ۴

پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

(۱) ۲۵

(۲) ۳۲

(۳) ۳۰

(۴) ۳۵

**مثال:** یک مربی قصد دارد از بین ۶ بازیکن ۴ نفر را برای بازی انتخاب کند؛

الف) به چند طریق این کار ممکن است؟

ب) به چند طریق می تواند ۲ نفر را برای نشستن روی نیمکت انتخاب کند.

نتیجه:

**تست:** اگر  $\binom{2x}{x+1} = \binom{2x}{3}$  باشد، مجموع مقادیر قابل قبول برای  $x$  کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۲

**ترکیب‌هایی که فاقد یا شامل یک یا چند شیء بخصوصند:**

① **ترکیب‌هایی که فاقد یک یا چند شیء بخصوصند:**

$n$  شیء متمایز  $a_1, a_2, \dots, a_n$  مفروضند. برای تعیین تعداد ترکیب‌های  $r$  عضوی که فاقد یک شیء بخصوصند (مثلاً  $a_1$ ) نخست  $a_1$  را از  $n$  شیء حذف کرده و ترکیب‌های  $r$  تایی  $n-1$  شیء باقی مانده را محاسبه می‌کنیم. به همین ترتیب در مورد ترکیب‌هایی که فاقد چند شیء بخصوص عمل می‌کنیم.

**بنابراین:**

② **ترکیب‌هایی که شامل یک یا چند شیء بخصوصند:**

$n$  شیء متمایز  $a_1, a_2, \dots, a_n$  مفروضند. برای محاسبه تعداد ترکیب‌های  $r$  تایی این  $n$  شیء که هر یک شامل یک شیء بخصوصند (مثلاً  $a_1$ ) نخست  $a_1$  را انتخاب کرده و سپس تعداد ترکیب‌های  $r-1$  تایی  $n-1$  شیء باقی مانده را محاسبه می‌کنیم به همین ترتیب برای ترکیب‌هایی که شامل چند شیء بخصوصند عمل می‌کنیم.

**بنابراین:**



**مثال:** از بین افراد  $a, b, c, d, e, f, g, h$  به چند طریق می توان ۴ نماینده انتخاب کرد بطوریکه:

الف)  $a, b$  حتماً انتخاب شوند؟

ب)  $c$  انتخاب نشود؟

ج)  $a, b$  انتخاب شوند و  $c$  انتخاب نشود؟

**قاعده پاسکال:**

**تست:** حاصل  $\binom{12}{2} + \binom{12}{3} + \binom{13}{4}$  کدام است؟

$$\binom{14}{4} \quad (1) \quad \binom{14}{3} \quad (2)$$

$$\binom{15}{4} \quad (3) \quad \binom{15}{3} \quad (4)$$

**تست:** حاصل  $\binom{n-2}{r} + 2\binom{n-2}{r-1} + \binom{n-2}{r-2}$  برابر کدام است؟

$$\binom{n-1}{r} \quad (1) \quad \binom{n}{r-1} \quad (2)$$

$$\binom{n}{r} \quad (3) \quad \binom{n-1}{r-1} \quad (4)$$

**ترکیب با اشیاء تکراری :**

اگر اشیاء تکراری داشته باشیم در این صورت فرمول ترکیب را نمی توانیم به کار ببریم مگر آنکه حالت های متمایز و حالت های تکراری را از هم جدا کنیم.

**مثال:** به چند طریق می توان ۳ حرف از حروف کلمه «گسسته» انتخاب کرد؟

**مثال:** به چند طریق می توان ۴ حرف از حروف کلمه «دانشگاه» انتخاب کرد؟

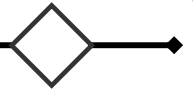
**تبدیل (انتخاب با جایگشت):**

در برخی مسائل ضمن آنکه اشیاء انتخاب می شوند جایگشت آنها نیز اهمیت دارد. بعبارت دیگر ترتیب قرار گرفتن اشیاء انتخاب شده مهم است که در این صورت انتخاب اشیاء همراه با جایگشت صورت می گیرد.

دستورالعمل کلی این دسته مسائل  $\Leftarrow$  **اول انتخاب کن بعد چیدمان را انجام بده**

**به مثال های زیر توجه کنید تفاوت این مثال ها با مثال های ترکیب چیست؟**

**مثال:** به چند طریق می توان از بین ۶ کارمند یک صف ۳ نفری تشکیل داد؟



**مثال:** از میان شش کتاب مختلف؛ (مثال صفحه ۱۳۱۴ کتاب درسی)

الف) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

---

**مثال:** در یک شرکت از بین ۶ نفر؛

الف) به چند طریق می‌توان ۳ نماینده انتخاب کرد؟

ب) به چند طریق می‌توان یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کرد؟

---

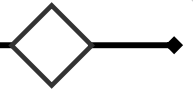
**مثال:** با حروف کلمه «دبیرستان» چند کلمه ۴ حرفی می‌توان ساخت بطوریکه:

الف) همگی با حرف «د» شروع شوند؟

ب) همگی شامل حرف «د» باشند؟

ج) همگی شامل حرف «د» و فاقد حرف «ن» باشند؟

د) همگی با «د» شروع شوند و به حرف نقطه دار ختم شوند؟



**مثال:** ۴ پسر و ۶ دختر به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار گیرند بطوریکه:

(الف) در دو انتهای صف دختر قرار گیرند.

(ب) هیچ دو پسری کنار هم نباشند.

**مثال:** از بین ۷ استاد دانشگاه به چند طریق می‌توان یک میز گرد ۴ نفری تشکیل داد؟

**تست:** با ارقام ۱, ۲, ۳, ..., ۹، به چند طریق می‌توان یک عدد پنج رقمی ساخت، به طوری که درست ۲ رقم آن زوج باشد؟ (دافل ۹۴)

(۱) ۶۴۰۰

(۲) ۷۲۰۰

(۳) ۸۴۰۰

(۴) ۹۶۰۰

**تست:** با ارقام متمایز ۱, ۲, ۳, ۴, ..., ۹، به چند طریق می‌توان یک عدد چهار رقمی ساخت، به طوری که به طوری که

یکی از ارقام آن زوج فقط باشد؟ (فاه ۹۴)

(۱) ۶۴۰

(۲) ۷۲۰

(۳) ۷۸۰

(۴) ۹۶۰

## آنچه تاکنون گفته بودیم:

### دسته بندی مسائل عدد سازی ( کلمه سازی ) - بدون تکرار

**دسته اول :** تعداد ارقامی که می دهند با ارقام عددی که می خواهیم بسازیم برابر است و در ارقام داده شده رقم تکراری نداریم.

**مثال:** با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ چند عدد چهار رقمی می توانیم بسازیم؟

**دسته دوم :** تعداد ارقامی که می دهند با ارقام عددی که می خواهیم بسازیم برابر است و در ارقام داده شده رقم تکراری داریم.

**مثال:** با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ چند عدد ۵ رقمی می توانیم بسازیم؟

**دسته سوم :** تعداد ارقامی که می دهند از ارقام عددی که می خواهیم بسازیم کمتر است و در ارقام داده شده ، رقم تکراری نداریم.

**مثال:** با ارقام ۱ و ۲ و ۳ چند عدد ۵ رقمی می توانیم بسازیم؟

**دسته چهارم :** تعداد ارقامی که می دهند از ارقام عددی که می خواهیم بسازیم بیشتر است و در ارقام داده شده ، رقم تکراری نداریم.

**مثال:** با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد ۳ رقمی می توان نوشت ؟



**دسته پنجم:** تعداد ارقامی که می دهند از ارقام عددی که می خواهیم بسازیم بیشتر است و در ارقام داده شده ، رقم تکراری داریم.

### مانند همه مثال‌های زیر ؛

در اینگونه مثال‌ها تکرار یا تکرار بیشتر را عامل حل سوال گرفته حالت‌های مختلف را حساب کرده و جواب‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

### ❖ به مثال‌های زیر توجه کنید:

**مثال:** با حروف کلمه «دانشگاه» چند کلمه ۴ حرفی وجود دارد؟

**مثال:** با ارقام ۲ و ۲ و ۴ و ۴ و ۶ و ۶ چند عدد ۳ رقمی می توان ساخت؟

**مثال:** با ارقام ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ چند عدد ۴ رقمی وجود دارد؟



## تبدیل $r$ تایی $n$ شی:

قضیه:

ارتباط ترکیب و تبدیل:

**مثال:** با توجه به دستگاه  $\begin{cases} c(n, r) = 10 \\ p(n, r) = 60 \end{cases}$  عدد طبیعی  $n$  کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۷

(۳) ۹

(۴) ۱۱

**مثال:** اگر  $\binom{n}{2} - (n)_2 = 36$  آنگاه  $\binom{n}{6}$  کدام است؟

**مثال:** اگر  $\binom{n+2}{n} = 21$  آنگاه  $p(n, n-2)$  کدام است؟

(۱) ۲۰

(۲) ۶۰

(۳) ۴۰

(۴) ۱۲۰

## افراز یک مجموعه :

افراز یک مجموعه به زیر مجموعه های مجزا یعنی آن مجموعه را به زیر مجموعه هایی تقسیم کنیم که :

اولاً : هیچ کدام از زیر مجموعه ها تهی نباشند.

ثانیاً : هیچ دو زیر مجموعه ای عضو مشترک نداشته باشند. ( اشتراک زیر مجموعه ها تهی باشد )

ثالثاً : اجتماع همه زیر مجموعه ها مجموعه اصلی را به وجود می آورد.

بعبارتی دیگر:

فرض کنید  $A$  مجموعه ای تهی و  $A_1$  و  $A_2$  و .... و  $A_n$  زیر مجموعه های  $A$  باشند.

مجموعه  $A$  به  $n$  زیر مجموعه  $A_1$  و  $A_2$  و .... و  $A_n$  افراز می شود هرگاه:

$$① \quad \forall 1 \leq i \leq n : A_i \neq \emptyset$$

$$② \quad \forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$③ \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A$$

**مثال:** مجموعه  $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  را در نظر بگیرید. کدام یک از حالت های زیر یک افراز برای  $A$  محسوب

می شود؟ (تمرین کتاب)

$$① \quad \{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 8, 9\}$$

$$② \quad \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{5, 7, 9\}$$

$$③ \quad \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}$$

**تست:** در کدام یک از گزینه های زیر مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  به سه زیر مجموعه افراز شده است؟

$$(1) \quad \emptyset, \{2, 3, 5\}, \{1, 4\}$$

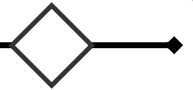
$$(2) \quad A = [2, +\infty)$$

$$(3) \quad \{5\}, \{2\}, \{1, 4\}$$

$$(4) \quad \{2, 4\}, \{3\}, \{1, 5\} \quad \checkmark$$

به این مثال ها توجه کنید:

**مثال:** به چند طریق می توان ۹ نفر را به سه تیم ۲ و ۳ و ۴ نفره تقسیم کرد؟



**مثال:** به چند طریق می‌توان ۴ نفر را به دو تیم ۲ نفری پینگ‌پنگ تقسیم کرد؟

**مثال:** به چند طریق می‌توان مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  را

الف) به سه مجموعه ۲ عضوی افراز کرد.

ب) به دو مجموعه ۳ عضوی افراز کرد.

**نتیجه:**

**توجه مهم:** به جدول تعداد افرازها توجه ویژه داشته باشند.

| تعداد عضوهای مجموعه | ۱ | ۲ | ۳ | ۴  | ۵  | ۶   |
|---------------------|---|---|---|----|----|-----|
| تعداد افرازها       | ۱ | ۲ | ۵ | ۱۵ | ۵۲ | ۲۰۳ |

**توجه:** برای پیدا کردن تعداد افرازهایی که مجموعه را به  $k$  قسمت (زیرمجموعه) افراز کند، ابتدا حالت‌های کلی که می‌توان مجموعه را به  $k$  قسمت تقسیم کرد پیدا می‌کنیم سپس با استفاده از انتخاب و آنالیز ترکیبی (شمارش بدون شمردن) مسأله را حل می‌کنیم.

**تست:** تعداد افراهای مجموعه  $\{0, 1, 2, 3\}$  کدام است؟ (۹۰)

۶ (۱)

۹ (۲)

۱۲ (۳)

۱۵ (۴)

**تست:** مجموعه  $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$  را به چند طریق می توان به ۳ زیر مجموعه افراز کرد؟ (داخل ۹۰)

۶ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۳ (۴)

**تست:** یکی از افرازهای مجموعه  $A$  به صورت  $\{a\}, \{b\}, \{\{a, b\}\}, \{c\}$ ، تعداد افرازهای مجموعه  $A$  که فاقد مجموعه‌ی تک عضوی باشند، کدام است؟ (۹۳)

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

**تست:** تعداد افرازهای مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e\}$  ، که شامل فقط یک مجموعه تک عضوی باشد، کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۱۲

(۳) ۱۵

(۴) ۲۰

**تست:** تعداد افرازهای مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ، که شامل فقط مجموعه‌های دو عضوی باشند کدام است؟ (دافل ۹۵)

(۱) ۸

(۲) ۱۰

(۳) ۱۲

(۴) ۱۵

**تست:** مجموعه  $\{a, b, c, d, e, f, g\}$  را به چند طریق می‌توان به دو مجموعه سه عضوی و یک مجموعه تک عضوی افراز کرد، بطوری که فاقد  $\{a\}$  باشد؟ (دافل ۹۷)

(۱) ۴۵

(۲) ۵۰

(۳) ۵۶

(۴) ۶۰



## توزیع اشیاء یکسان در جعبه‌های متمایز:

شخصی وارد یک گل فروشی می‌شود و می‌خواهد دسته گلی شامل سه شاخه گل، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک، انتخاب کند. (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است)

۱- هر سطر جدول زیر یک انتخاب را نمایش می‌دهد، شما این جدول را کامل کنید.

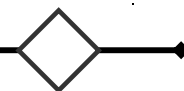
| دسته گل انتخابی                                     | مریم | رُز | میخک |
|-----------------------------------------------------|------|-----|------|
| ۱ یک شاخه گل مریم، یک شاخه گل رُز و یک شاخه گل میخک | *    | *   | *    |
| ۲ دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل مریم                 | *    |     | **   |
| ۳ سه شاخه گل رُز                                    | ...  | *** | ...  |
| ۴ .....                                             | ...  | **  | *    |
| ۵ .....                                             | ***  | ... | ...  |
| ۶ .....                                             | **   | ... | *    |
| ۷ دو شاخه گل مریم و یک شاخه گل رُز                  | ...  | ... | ...  |
| ۸ سه شاخه گل میخک                                   | ...  | ... | ...  |
| ۹ دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل رُز                  | ...  | ... | ...  |
| ۱۰ .....                                            | ...  | ... | ...  |

همان طور که مشاهده می‌کنید برای جدا کردن سه نوع گل از دو خط عمودی و برای مشخص کردن تعداد انتخاب‌ها از هر نوع گل از \* استفاده شده است.

۲- آیا در هر حالت از حالت‌های ۱ تا ۱۰ جابه‌جایی ستاره‌ها با هم دسته گل جدیدی تولید می‌کند؟ جابه‌جایی دو خط عمودی با هم چطور؟

۳- با توجه به قضیه جایگشت با تکرار تعداد کل جایگشت‌های این ۵ شیء (۳ ستاره و ۲ خط عمودی) را به دست آورید.

$$\text{تعداد کل جایگشت‌ها} = \frac{5!}{\dots \times \dots} = \binom{5}{2} = \binom{3+2}{2}$$



۴- این مسئله را در حالت کلی و برای انتخاب دلخواه  $n$  شاخه گل از بین  $k$  نوع گل بررسی کنید.

$n$  = تعداد ستارهها = تعداد کل شاخه گل‌های انتخابی

..... = تعداد خط‌های عمودی برای جدا کردن  $k$  نوع گل

..... = تعداد کل اشیا (شامل ستارهها و خط‌های عمودی)

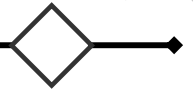
$$\text{تعداد کل جایگشت‌ها} = \frac{[n + (k - 1)]!}{n! \times \dots} = \binom{n + (k - 1)}{k - 1}$$

جابه‌جایی ستارهها باهم، دسته گل جدیدی تولید نمی‌کند.

.....

**قضیه:**

**مثال:** به چند طریق می‌توان ۵ خودکار یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد؟

**بررسی تعداد جواب‌های معادلات و نامعادلات:****الگوی اول - جواب‌های صحیح و نامنفی معادلات خطی با ضریب واحد**

مثال: معادله  $x + y + z = 5$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

**نتیجه:**

**تست:** تعداد چهارتایی‌های مرتب  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  از اعداد صحیح و نامنفی که در رابطه  $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 10$  صدق می‌کند کدام است؟

(۱) ۲۵۵

(۲) ۲۸۶

(۳) ۲۶۹

(۴) ۲۴۵

**الگوی دوم - جواب‌های صحیح و نامنفی معادلات با جملات مشکل‌دار (دارای توان یا ضریب)****دستورالعمل:**



**مثال:** معادله  $x_1^4 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟ ( $x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}$ )

**مثال:** معادله  $x_1 + x_2 + 10x_3 = 20$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

**مثال:** معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{10}{x_3}$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

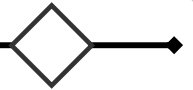
**تست:** معادله  $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 20$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

(۱) ۱۹۰

(۲) ۶۶

(۳) ۹۵

(۴) ۶۰



**تست:** معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = 21$  چند جواب صحیح، نامنفی فرد دارد؟

- (۱) ۴۵
- (۲) ۵۵
- (۳) ۶۶
- (۴) ۳۶

**الگوی سوم - جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادلات**

**دستورالعمل:**

**مثال:** نامعادله  $x + y + z \leq 8$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟ (همایش جمع بندی فرداد ۹۴)

**تست:** تعداد جواب‌های صحیح و غیر منفی نامساوی  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$  کدام است؟ (داخل ۹۴)

- (۱) ۳۰
- (۲) ۳۲
- (۳) ۳۳
- (۴) ۳۵

**تست:** نامعادله  $x_1 + x_2 + x_3 < 7$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

(۱) ۱۲۰

(۲) ۸۴

(۳) ۵۶

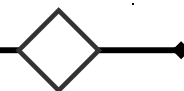
(۴) ۱۶۵

**الگوی چهارم - جواب‌های صحیح و نامنفی معادلات باشد شرط‌های بیشتر**

**دستورالعمل:**

**مثال:** معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$  چند جواب صحیح و نامنفی با شرط‌های  $x_1 \geq 2$  و  $x_3 > 3$  دارد؟

**مثال:** معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$  چند جواب صحیح و مثبت با شرط  $x_i \geq i$  وجود دارد؟ ( $i = 1$  و  $2$  و  $3$  و  $4$ )



**مثال:** معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه  $x_1 > 1$  و  $x_3 > 3$  باشد؟  
(مثال صفحه ۶۱ کتاب درسی)

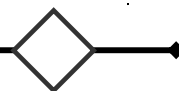
**تست:** به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل ۱۵ شاخه انتخاب کرد، به طوری که از هر نوع آن، حداقل ۲ شاخه انتخاب شود؟ (فلاجه ۹۸)

(۱) ۱۰۵

(۲) ۱۲۰

(۳) ۱۲۵

(۴) ۱۵۰



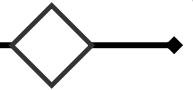
## الگوی پنجم - جواب‌های صحیح و مثبت

دستورالعمل:

مثال: معادله  $x + y + z = 8$  چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

نتیجه:

**مثال :** به چند طریق می‌توان دسته گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد، به شرط آنکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟ (مثال صفحه ۶۰ کتاب درسی)



**مثال:** به چند طریق می‌توان ۱۰ خودکار یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد بطوریکه به هر کدام حداقل ۱ خودکار برسد؟

**مثال:** هفت کبوتر به چند طریق می‌توانند در سه لانه متمایز قرار گیرند به طوریکه هیچ لانه‌ای خالی نماند؟

**تست:** به چند طریق می‌توان ۱۲ سکه سالم را بین ۳ نفر تقسیم کرد به طوریکه لااقل به هر کدام یک سکه برسد؟

(۱) ۵۵

(۲) ۴۸

(۳) ۴۵

(۴) ۳۶

**مثال:** به چند طریق می‌توان ۹ کتاب یکسان را در ۵ قفسه متمایز جای داد به طوری که در هر قفسه لااقل یکی از

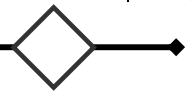
آنها قرار داده شود؟ (دافل ۹۲)

(۱) ۷۰

(۲) ۴۲

(۳) ۵۶

(۴) ۳۵



**تست:** به چند طریق می‌توان ۱۱ توپ یکسان را بین ۵ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل، یک توپ داشته باشد؟ (داخل ۹۸)

(۱) ۱۰۵

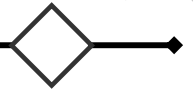
(۲) ۱۲۰

(۳) ۱۲۵

(۴) ۱۵۰

**مثال:** معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$  چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ ( $x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$ ) (مثال صفحه ۶۱ کتاب درسی)

**مثال:** به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟ (تمرین ۱۱ صفحه ۷۳ کتاب درسی)



**مثال:** معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$  چند جواب صحیح و مثبت با شرط‌های  $x_1 \geq 2$  و  $x_3 > 3$  دارد؟

**مثال:** معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$  چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه  $x_3 = 4$  و  $x_5 > 2$  باشد؟  
(مثال صفحه ۶۱ کتاب درسی)

**تست:** نامعادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$  چند جواب طبیعی دارد؟

(۱) ۵۶

(۲) ۸۴

(۳) ۲۱۰

(۴) ۱۶۵

**تست:** نامعادله  $x_1 + x_2 + x_3 < 9$  چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

(۱) ۲۱

(۲) ۵۶

(۳) ۸۴

(۴) ۳۶



**تست:** نامعادله  $5 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$  چند جواب طبیعی دارد؟

(۱) ۱۶۵

(۲) ۱۶۱

(۳) ۱۵۶

(۴) ۱۵۱

**تست:** نامعادله  $250 < (x_1 + x_2 + x_3)^3 < 100$  چند جواب طبیعی دارد؟

(۱) ۶

(۲) ۱۶

(۳) ۲۱

(۴) ۴۹

## مربع‌های لاتین

یک جدول مربعی از اعداد  $1, 2, \dots, n$  به شکل یک مربع  $n \times n$  که سطرها و ستون‌های آن با عددهای  $1, 2, \dots, n$  پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری نداشته باشد مربع لاتین می‌نامیم.

**تذکر:** به هر یک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می‌گوئیم.

برای مثال مربع مقابل یک مربع لاتین است:

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۴ | ۳ |
| ۲ | ۱ | ۳ | ۴ |
| ۴ | ۳ | ۱ | ۲ |
| ۳ | ۴ | ۲ | ۱ |

**تست:** کدام یک از مربع‌های زیر یک مربع لاتین است؟

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۳ | ۱ | ۲ |

(۴)

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۳ | ۲ | ۱ |

(۳)

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۱ | ۳ |

(۲)

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۲ | ۱ | ۳ |
| ۳ | ۱ | ۲ |

(۱)

**تست:** چهار مدرس A, B, C و D قصد دارند در یک روز در چهار جلسه در چهار کلاس الف، ب، پ و ت تدریس کنند به طوری که هر مدرس در هر یک از کلاس‌ها دقیقاً یک بار تدریس کند. اگر جدول برنامه‌ریزی تدریس به صورت مقابل باشد، برنامه کلاس ت چگونه است؟

| جلسه \ کلاس | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|-------------|---|---|---|---|
| الف         | A |   | C |   |
| ب           | B |   |   | D |
| پ           |   | A |   | C |
| ت           |   |   |   |   |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
|---|---|---|---|

(۱)

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| A | B | D | C |
|---|---|---|---|

(۲)

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| A | D | B | C |
|---|---|---|---|

(۳)

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
|---|---|---|---|

(۴)

**تست:** کدام یک از مربع‌های زیر، قسمتی از یک مربع لاتین می‌باشد؟

|   |   |   |
|---|---|---|
|   |   | ۱ |
|   | ۲ |   |
| ۱ |   | ۲ |

(۴)

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۱ |   | ۲ |
|   |   | ۱ |
|   | ۲ |   |

(۳)

|  |   |   |
|--|---|---|
|  | ۳ | ۱ |
|  | ۱ |   |
|  |   |   |

(۲)

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۱ | ۳ |   |
|   | ۲ |   |
|   |   | ۱ |

(۱)

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۳ | ۲ |   |
| ۱ |   | b |
|   | a |   |

**تست:** در مربع لاتین مقابل، حاصل  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۶

**تست:** چند مربع لاتین  $3 \times 3$  وجود دارد؟

- (۱) ۲۴  
(۲) ۱۶  
(۳) ۱۲  
(۴) ۸

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۳ | ۵ |   |   |
| ۲ | a | ۳ | ۱ |   |
| ۵ | ۲ |   |   | b |
| ۳ | ۵ | ۴ | ۲ |   |
|   |   | d | c |   |

**تست:** در مربع لاتین مقابل، حاصل  $a + b + c + d$  کدام است؟

- (۱) ۱۳  
(۲) ۱۴  
(۳) ۱۵  
(۴) ۱۷

## مربع های لاتین چرخشی

به مربع لاتین  $n \times n$  مقابل مربع لاتین چرخشی می گوئیم.

|       |     |   |     |     |     |       |       |
|-------|-----|---|-----|-----|-----|-------|-------|
| ۱     | ۲   | ۳ | ... | ... | ... | $n-1$ | $n$   |
| $n$   | ۱   | ۲ | ۳   | ... | ... | $n-2$ | $n-1$ |
| $n-1$ | $n$ | ۱ | ۲   | ۳   | ... | $n-3$ | $n-2$ |
| ⋮     | ⋮   | ⋮ | ⋮   | ⋮   | ⋮   | ⋮     | ⋮     |
| ۳     | ۴   | ۵ |     |     |     | ۱     | ۲     |
| ۲     | ۳   | ۴ | ... | ... | ... | $n$   | ۱     |

مربع لاتین روبه رو را در نظر بگیرید:

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۴ | ۱ |

جای سطر دوم و چهارم این مربع را عوض می کنیم تا به مربع روبه رو برسیم:

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲ | ۳ | ۴ | ۱ |
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ |

همان طور که می بینید این مربع جدید نیز یک مربع لاتین است.

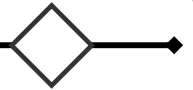
زیرا عددهای سطرها که دست نخورده باقی مانده و فقط جای آن ها عوض شده. بنابراین، در هیچ سطری عدد تکراری

نیست، هم چنین با توجه به این که در هر ستون دقیقاً جای دو عدد با هم عوض شده (مثلاً تو ستون اول جای ۲ و ۴ عوض شده)، پس در ستون ها نیز عدد تکراری وجود ندارد. یک کار دیگر هم می توانستیم انجام بدهیم و از روی یک مربع لاتین، مربع لاتین های جدیدی بسازیم. مثلاً با اعمال جایگشت روی درایه ها! چه جوری

|   |   |   |   |                   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|-------------------|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | $1 \rightarrow 2$ | ۲ | ۱ | ۴ | ۳ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ | $2 \rightarrow 1$ | ۳ | ۲ | ۱ | ۴ |
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ | $3 \rightarrow 4$ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ |
| ۲ | ۳ | ۴ | ۱ | $4 \rightarrow 3$ | ۱ | ۴ | ۳ | ۲ |

مثلاً:  $2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2$  و  $3 \rightarrow 4$  یعنی ۱ را به ۲، ۲ را به ۱ و ... تبدیل کنیم. ببینید:

با تعویض هر دو سطر یا هر دو ستون از یک مربع لاتین یا اعمال جایگشت روی درایه ها، مربع به وجود آمده نیز یک مربع لاتین است.



**قضیه:** برای هر عدد طبیعی  $n$ ، مربع لاتین از مرتبه  $n$  وجود دارد.

|          |          |          |     |          |          |
|----------|----------|----------|-----|----------|----------|
| ۱        | ۲        | ۳        | ... | $n-1$    | $n$      |
| $n$      | ۱        | ۲        | ... | $n-2$    | $n-1$    |
| $n-1$    | $n$      | ۱        | ... | $n-3$    | $n-2$    |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |     | $\vdots$ | $\vdots$ |
| ۳        | ۴        | ۵        | ... | ۱        | ۲        |
| ۲        | ۳        | ۴        | ... | $n$      | ۱        |

خب بله، ثابت می‌کنیم وجود دارد. مثلاً به مربع لاتین  $n \times n$  مقابل یک مربع لاتین چرخشی می‌گویند که برای هر عدد طبیعی  $n$  می‌توانیم آن را بسازیم.

مثلاً مربع لاتین چرخشی از مرتبه ۵ به صورت مقابل می‌شود:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
| ۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴ | ۵ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۴ | ۵ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۱ |

سطر اول از ۱ شروع می‌شود و یکی یکی اضافه می‌شود.

آخرین عدد سطر اول در جایگاه اولین عدد سطر دوم قرار می‌گیرد، بعد عدد ۱ می‌آید و یکی یکی اضافه می‌شود.

آخرین عدد سطر دوم در جایگاه اولین عدد سطر سوم قرار می‌گیرد ولی یکی یکی اضافه می‌شود (بعد از آخرین عدد که ۵ است، عدد ۱ می‌آید) و به همین ترتیب بقیه سطرها پر می‌شوند.

**تست:** مربع لاتین روبه‌رو را در نظر بگیرید؛

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۲ | ۳ | ۴ | ۱ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۱ | ۴ | ۳ | ۲ |
| ۳ | ۲ | ۱ | ۴ |

سطر اول را با سطر سوم عوض می‌کنیم. در مربع جدید به وجود آمده ستون دوم را با ستون چهارم عوض می‌کنیم و سپس جای همه ۱ها را با جای همه چهارها عوض می‌کنیم. در مربع آخر به وجود آمده ترتیب درایه‌های سطر آخر چپ به راست در کدام گزینه آمده است؟

(۱) ۳/۱/۲/۴

(۲) ۳/۱/۴/۲

(۳) ۳/۴/۱/۲

(۴) ۳/۲/۱/۴

**تست:** در مربع لاتین چرخشی  $5 \times 5$ ، ستون سوم مربع به کدام صورت است؟

|   |
|---|
| ۳ |
| ۲ |
| ۴ |
| ۱ |
| ۵ |

(۴)

|   |
|---|
| ۳ |
| ۱ |
| ۲ |
| ۴ |
| ۵ |

(۳)

|   |
|---|
| ۳ |
| ۲ |
| ۱ |
| ۵ |
| ۴ |

(۲)

|   |
|---|
| ۳ |
| ۲ |
| ۱ |
| ۴ |
| ۵ |

(۱)

## دو مربع لاتین متعامد

دو مربع لاتین روبه‌رو را در نظر بگیرید:

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۱ |

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۱ | ۲ | ۳ |

|    |    |    |
|----|----|----|
| ۱۳ | ۲۱ | ۳۲ |
| ۳۲ | ۱۳ | ۲۱ |
| ۲۱ | ۳۲ | ۱۳ |

اگر این دو مربع را باهم ترکیب کنیم به مربع روبه‌رو می‌رسیم؛ همان‌طور که می‌بینید، در این مربع جدید، عدد دورقمی تکراری وجود دارد.

حالا این دو مربع لاتین را باهم ترکیب کنید:

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۱ |

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۳ | ۱ | ۲ |

 $\Rightarrow$ 

|    |    |    |
|----|----|----|
| ۱۱ | ۲۲ | ۳۳ |
| ۳۲ | ۱۳ | ۲۱ |
| ۲۳ | ۳۱ | ۱۲ |

در این مربع جدید هیچ عدد دورقمی تکرار نشده است. به این دو مربع، دو مربع لاتین متعامد می‌گویند.

**تعریف دو مربع متعامد:** فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند و از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل می‌شود که هرخانه آن حاوی یک عدد دو رقمی است. در این صورت گوییم دو مربع A و B متعامدند، هرگاه هیچ‌یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع جدید، تکراری نباشند.

**تذکره ۱:** برای تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین به این صورت عمل می‌کنیم که هر دو درایه در یکی از مربع‌ها که عدد یکسانی دارند درایه‌های نظیر آن‌ها از مربع دیگر باید اعداد متمایزی باشند تا دو مربع لاتین متعامد باشند.

**تذکره ۲:** اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B' مربع لاتین جدیدی باشد که با انجام یک جایگشت دلخواه بر روی اعضای B به دست آمده باشد و B' نیز متعامدند.

**تست:** کدام جفت از مربع‌های لاتین زیر متعامد نیستند؟

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۱ |

و

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۱ | ۲ | ۳ |

(۲)

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۳ | ۲ | ۱ |
| ۱ | ۳ | ۲ |
| ۲ | ۱ | ۳ |

و

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۲ | ۱ | ۳ |
| ۱ | ۳ | ۲ |
| ۳ | ۲ | ۱ |

(۱)

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۱ | ۲ | ۳ |

و

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۱ | ۲ |

(۴)

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۱ |

و

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۳ | ۱ | ۲ |

(۳)

**تست:** دو مربع لاتین متعامد از کدام مرتبه وجود ندارد؟

۳ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

**تست:** مربع لاتین A و  $B =$  متعامدند. مربع لاتین A و کدام یک از مربع‌های لاتین زیر حتماً

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲ | ۱ | ۴ | ۳ |
| ۴ | ۳ | ۲ | ۱ |

متعامدند؟

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |
| ۴ | ۳ | ۲ | ۱ |
| ۲ | ۱ | ۴ | ۳ |

(۴)

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۲ | ۱ | ۴ | ۳ |
| ۴ | ۳ | ۲ | ۱ |
| ۳ | ۲ | ۱ | ۴ |
| ۱ | ۴ | ۳ | ۲ |

(۳)

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۳ | ۲ | ۱ | ۴ |
| ۱ | ۴ | ۳ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۴ | ۱ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ |

(۲)

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۴ | ۱ |

(۱)

**تست:** قرار است  $n$  کارگر با  $n$  نوع ماشین نخ‌ریسی و  $n$  نوع الیاف در  $n$  روز هفته کار کنند به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. با ترکیب دو مربع لاتین  $n \times n$  می‌خواهیم این مسأله را برنامه‌ریزی کنیم. به ازای کدام مقدار  $n$  این برنامه‌ریزی

امکان‌پذیر نیست؟

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)



**تست:** جدول زیر، برنامه‌ریزی ۵ کارگر a، b، c، d و e با ۵ ماشین و ۵ نوع الیاف را در ایام هفته نشان می‌دهد به‌طوری که با رعایت برنامه داده شده هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار می‌کند و هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار مصرف می‌شود. اگر کارگر b در روز چهارشنبه با ماشین شماره ۱ کار کند، کارگر e در روز

سه‌شنبه با کدام نوع الیاف و کدام نوع ماشین کار می‌کند؟

|          | a  | b  | c  | d  | e  |
|----------|----|----|----|----|----|
| شنبه     | ۱۳ | ۴۱ | ۲۴ |    |    |
| یک‌شنبه  | ۴۵ | ۲۳ | ۵۱ |    | ۱۲ |
| دوشنبه   | ۲۲ | ۵۵ |    | ۱۱ |    |
| سه‌شنبه  |    |    |    |    |    |
| چهارشنبه | ۳۱ | ۱۴ | ۴۲ |    |    |

(۱) ماشین ۱ و الیاف ۲

(۲) ماشین ۳ و الیاف ۲

(۳) ماشین ۲ و الیاف ۱

(۴) ماشین ۲ و الیاف ۵

دو مربع لاتین متعامد باشند y، b و e به ترتیب برابر

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۲ | ۳ | ۴ | ۱ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ |
| a | b | c | d |
| e | f | g | h |

و

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۲ | ۳ | ۴ | ۱ |
| ۳ | ۲ | ۱ | ۴ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ |
| x | y | z | t |

**تست:** اگر دو مربع

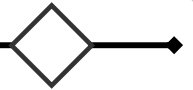
کدام‌اند؟

(۱)  $e = ۳, b = ۴, y = ۴$

(۲)  $e = ۱, b = ۴, y = ۳$

(۳)  $e = ۱, b = ۲, y = ۴$

(۴)  $e = ۳, b = ۲, y = ۴$



**تست:** در یک روز هفته برای ۳ کلاس متمایز در ۳ جلسه متوالی به چند طریق، می‌توان برنامه تدریس،

تعیین کرد؟ (۹۸)

(۱) ۶

(۲) ۹

(۳) ۱۲

(۴) ۱۸

**تست:** تعداد مربع‌های لاتین متعامد با مربع لاتین

|   |   |   |
|---|---|---|
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۲ | ۳ | ۱ |

، کدام است؟ (داخل ۹۸)

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۶

**تست:** تعداد مربع‌های لاتین مرتبه ۲ چقدر است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

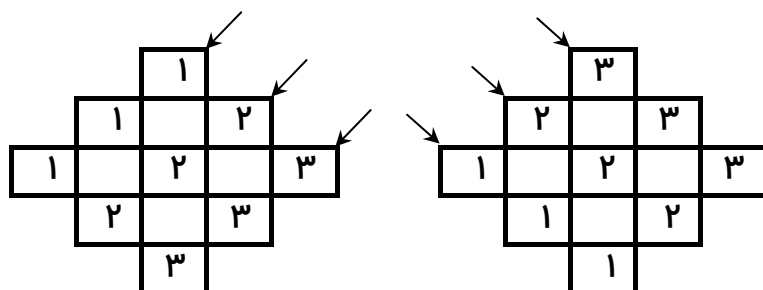
(۴) بیشتر از ۲

## روش برای ایجاد دو مربع لاتین متعامد مرتبه فرد

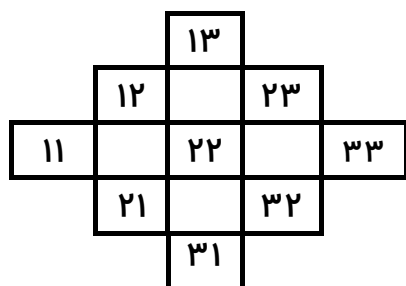
برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه فرد ( $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$ ,  $7 \times 7$ , ...) می‌توان از روش زیر استفاده کرد:

### نحوه ایجاد دو مربع لاتین $3 \times 3$

دو شکل همانند دو شکل روبه‌رو ایجاد می‌کنیم:



حالا این دو شکل را باهم ترکیب می‌کنیم تا به شکل مقابل برسیم:



همان‌طور که می‌بینید، همه عددها باهم متفاوت‌اند. حالا عددهای خارج از مربع را با روش زیر

داخل مربع قرار می‌دهیم:

(۱) عدد بالایی را سه‌تا می‌آوریم پایین.

(۳) عدد پایینی را سه‌تا می‌بریم بالا.

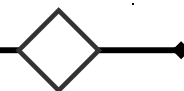
(۲) عدد چپی را سه‌تا می‌بریم راست.

(۴) عدد راستی را سه‌تا می‌بریم چپ.

|    |    |    |
|----|----|----|
| ۱۲ | ۳۱ | ۲۳ |
| ۳۳ | ۲۲ | ۱۱ |
| ۲۱ | ۱۳ | ۳۲ |

**تمرین:** آیا مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می‌تواند با مربع اولیه متعامد

باشد؟ (تمرین ۱۲ صفحه ۷۳ کتاب درسی)



**تمرین:** مربع لاتین  $3 \times 3$  مقابل را در نظر بگیرید. (تمرین ۱۳ صفحه ۷۳ کتاب درسی)

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

الف) سطر دوم و سوم مربع  $A$  را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را  $A_1$  بنامید. آیا  $A$  و  $A_1$  متعامدند؟

ب) ابتدا سطر اول و سطر سوم مربع  $A$  را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را  $A_2$  بنامید. آیا  $A$  و  $A_2$  متعامدند؟

پ) با توجه به قسمت‌های الف) و ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

۱- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهاى یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۲- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهاى یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیر متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

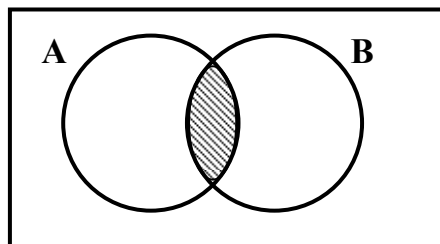
**تمرین:** قرار است شش مدرس  $T_1, T_2, \dots$  و  $T_6$  در شش جلسه متوالی در شش کلاس  $C_1, C_2, \dots$  و  $C_6$  به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

(تمرین ۱۴ صفحه ۷۳ کتاب درسی)

## روش هایی برای شمارش

### اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه

واضح است که برای محاسبه تعداد اعضای  $(A \cup B)$  یعنی  $|A \cup B|$  چون اعضای  $(A \cap B)$  هم در  $A$  و هم در  $B$  هستند، اگر اعضای  $A$  و  $B$  را روی هم حساب کنیم اعضای  $(A \cap B)$  دو بار محاسبه شده اند و می بایست یک بار از این مجموع کم شود، بنابراین خواهیم داشت:



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

این تساوی به اصل شمول و عدم شمول معروف است (که برای اختصار به آن اصل شمول می گوئیم)

### نتیجه اصل شمول:

با توجه به تعریف متمم اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه و  $S$  مجموعه مرجع باشد داریم:

$$|(A \cup B)'| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

بنابراین اگر  $S$  مجموعه ای متناهی و  $A$  و  $B$  زیر مجموعه هایی از  $S$  باشند. در این صورت تعداد اعضای  $S$  که در هیچ یک از مجموعه های  $A$  و  $B$  قرار ندارند برابر است با:

$$|S| - |A \cup B|$$

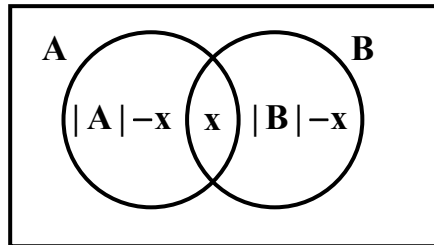
$$|S| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$

**مثال:** در یک کلاس ۲۵ نفری ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی

می کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می کنند. (مثال صفحه ۷۴ کتاب درسی)

## روش حل مسائل اصل شمول به کمک نمودار ون:

برای حل مسائل مربوط به این قسمت ابتدا نمودار ون زیر را رسم کرده و به ترتیب اطلاعات مسأله را روی نمودار وارد می‌کنیم.



**مرحله ۱:** در ناحیه اشتراک دو مجموعه A و B عدد x را می‌نویسیم.

**مرحله ۲:** در طرفین ناحیه اشتراک دو مجموعه A و B عبارت  $|A| - x$  و  $|B| - x$  را می‌نویسیم.

**مرحله ۳:** در ناحیه خارج از اجتماع دو مجموعه A و B عبارت  $|S| - |A \cup B|$  را می‌نویسیم.

**مرحله ۴:** با توجه به خواسته سؤال اعداد موجود را جمع یا کم می‌کنیم.

## پس اگر دو مجموعه A و B داشتیم و گفتند:

۱- حداقل یکی از این دو تا  $\leftarrow$  منظور  $|A \cup B|$  است.

۲- هر دو باهم  $\leftarrow$  منظور  $|A \cap B|$  است.

۳- هیچکدام  $\leftarrow$  منظور  $(\bar{A} \cap \bar{B})$  است یا  $|S| - |A \cup B|$

۴- فقط A  $\leftarrow$  منظور  $|A - B|$  است یا  $|A| - |A \cap B|$  یا  $|A \cap \bar{B}| = |A - B|$

۵- فقط B  $\leftarrow$  منظور  $|B - A|$  است یا  $|B| - |A \cap B|$  یا  $|B \cap \bar{A}| = |B - A|$

۶- A نباشد  $\leftarrow$  منظور  $\bar{A}$  است یا  $|S| - |A|$

**مثال:** در یک کلاس ۴۰ نفره، ۲۵ نفر در درس ریاضی و ۳۰ نفر در درس فیزیک قبول شده‌اند. هم‌چنین ۲۰ نفر در هر

دو درس قبول شده‌اند. در این صورت:

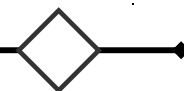
الف) چند نفر در درس ریاضی قبول نشده‌اند؟

ب) چند نفر فقط در درس فیزیک قبول شده‌اند؟

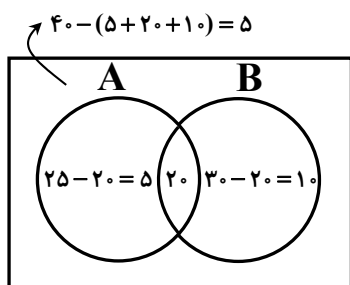
ج) چند نفر حداقل در یکی از دروس ریاضی یا فیزیک قبول شده‌اند؟

د) چند نفر در یکی از دو درس ریاضی و فیزیک قبول نشده‌اند؟

هـ) چند نفر در هیچکدام از دو درس ریاضی و فیزیک قبول نشده‌اند؟

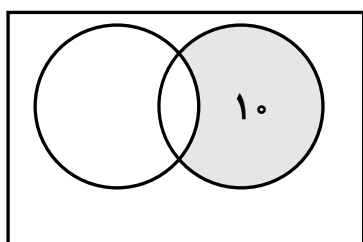


**پاسخ:** ابتدا با توجه به اطلاعات مساله، نمودار ون مقابل را رسم می‌کنیم.

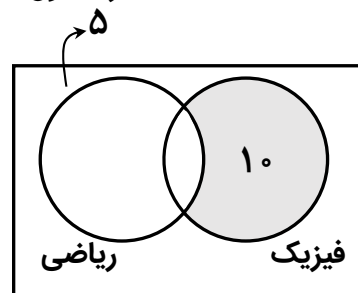


(الف)

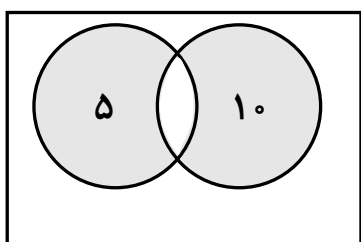
ب)  $10 =$  فقط قبولی در درس فیزیک



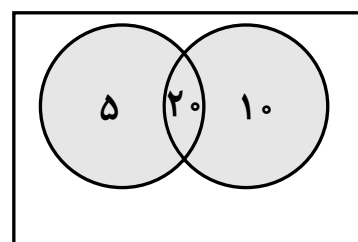
$15 = 10 + 5 =$  تعداد افراد قبول نشده در درس ریاضی



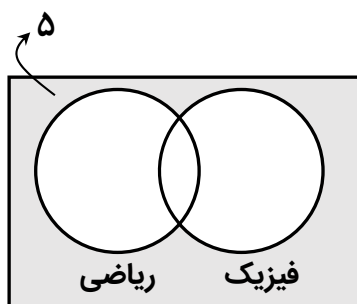
د)  $15 = 5 + 10 =$  قبولی فقط در یکی از دروس



ج)  $35 = 5 + 20 + 10 =$  قبولی در حداقل یکی از دو درس



هـ)  $5 =$  قبولی در هیچ‌کدام از دو درس



**تست:** در یک آموزشگاه با ۴۵ دانش آموز، ۲۱ نفر در کلاس گسسته و ۲۲ نفر در کلاس هندسه شرکت کرده‌اند. اگر ۱۰ نفر در هیچ یک از دو کلاس شرکت نکرده باشند، چند نفر در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند؟

(۱) ۷

(۲) ۸

(۳) ۹

(۴) ۱۰

**تست:** در یک مهمانی ۴۰ نفر حضور دارند که ۲۵ نفر آن‌ها زن و ۱۸ نفر آن‌ها عینکی هستند. اگر ۸ نفر از زن‌ها عینکی باشند، چند نفر از مهمانان مرد یا غیر عینکی هستند؟

(۱) ۳۰

(۲) ۳۲

(۳) ۳۴

(۴) ۲۸

**مثال:** اگر یک قفل رمز دار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می‌شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد) (این مسئله معادل است با شمارش تعداد ۴ رقمی‌هایی که در هریک از آن‌ها هر یک از ارقام ۷ و ۸ وجود داشته باشد). (مثال صفحه ۷۶ کتاب درسی)



## تعداد مضارب طبیعی یک عدد

**یادآوری:** تعداد مضارب طبیعی  $k$  از ۱ تا  $n$  برابر است با  $\left[ \frac{n}{k} \right]$

**توجه ۱:** اگر عددی بر  $a$  و  $b$  بخش پذیر باشد بر کمم دو عدد یعنی  $[a, b]$  نیز بخش پذیر است. پس تعداد اعداد طبیعی

کوچک تر یا مساوی  $n$  که هم مضرب  $a$  و هم مضرب  $b$  هستند برابر است با  $\left[ \frac{n}{[a, b]} \right]$ .

**توجه ۲:** تعداد اعداد طبیعی در بازه  $[m, n]$  که مضرب  $a$  هستند برابر است با:  $\left[ \frac{n}{a} \right] - \left[ \frac{m-1}{a} \right]$

**مثال:** در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ( $1 \leq n \leq 90$ ) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟

(تمرین ۱ صفحه ۸۴ کتاب درسی)

**مثال:** در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ( $1 \leq n \leq 200$ ) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش-

پذیر نباشند؟ (تمرین صفحه ۸۴ کتاب درسی)

**تست:** چند عضو از مجموعه اعداد طبیعی  $\{100, 101, \dots, 600\}$  مضرب ۴ یا مضرب ۹ هستند؟

- (۱) ۱۵۰
- (۲) ۱۸۰
- (۳) ۱۶۷
- (۴) ۱۶۰

**تست:** چند عدد طبیعی از مجموعه  $\{101, 102, \dots, 300\}$  فقط بر یکی از اعداد ۴ یا ۷ بخش پذیرند؟

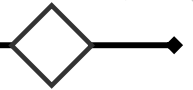
- (۱) ۷۱
- (۲) ۸۰
- (۳) ۶۴
- (۴) ۵۵

**تست:** چند عدد طبیعی نابیشتر از ۳۰۰ بر ۷ بخش پذیرند ولی بر ۱۱ بخش پذیر نیستند؟

- (۱) ۳۸
- (۲) ۳۹
- (۳) ۴۰
- (۴) ۴۱

**تست:** چند عدد طبیعی از مجموعه  $\{150, 151, 152, \dots, 400\}$  مضرب ۵ هستند اما نسبت به ۷ اولاند؟

- (۱) ۴۲
- (۲) ۴۳
- (۳) ۴۴
- (۴) ۴۵



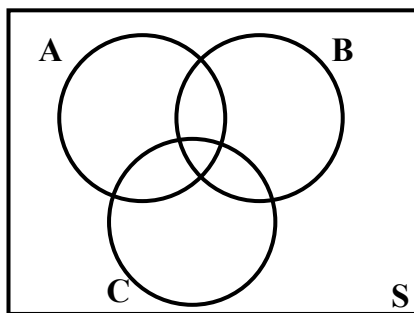
**تست:** تعداد اعداد سه رقمی که حداقل یک رقم ۵ و حداقل یک رقم ۲ را شامل شود، کدام است؟ (داخل ۹۸)

(۱) ۵۲

(۲) ۵۴

(۳) ۵۶

(۴) ۵۸



### اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه

اگر A و B و C سه مجموعه دلخواه و S مجموعه مرجع باشد:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

**تذکر:** در حل مسائل اصل شمول برای ۳ مجموعه هم از نمودار ون استفاده می‌کنیم.

**مثال:** در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می‌کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم

۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی

می‌کنند مشخص کنید: (تمرین ۳ صفحه ۸۴ کتاب درسی)

الف) چند نفر هر سه رشته‌ی ورزشی را بازی می‌کنند؟

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

پ) چند نفر والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند؟

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟



**مثال:** چند عدد طبیعی مانند  $n$ ، به طوریکه  $۱ \leq n \leq ۳۵۰$  وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر نباشد؟  
(مثال صفحه ۷۶ کتاب درسی)

**تست:** چند عضو از مجموعه  $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۳۰۰\}$  مضرب ۳ یا مضرب ۵ یا مضرب ۱۰ هستند ولی مضرب ۳۰ نیستند؟

(۱) ۱۲۰

(۲) ۱۳۰

(۳) ۱۴۰

(۴) ۱۵۰

**تست:** چند عضو از مجموعه  $A = \{۲, ۴, ۶, \dots, ۳۰۰\}$  نسبت به ۱۵ اول اند؟

(۱) ۷۸

(۲) ۷۹

(۳) ۸۰

(۴) ۸۱

## توابع

**یادآوری:** تعداد کل توابع از یک مجموعه  $m$  عضوی به یک مجموعه  $n$  عضوی برابر است با:  $n^m$   
(همان توزیع  $n$  شیئ متمایز در  $m$  جعبه مختلف است.)

**تست:** از مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  به مجموعه  $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$  چند تابع می توان تعریف کرد؟

(۱) ۸۱

(۲) ۶۴

(۳) ۱۲

(۴) ۴۸

**تست:** چند تابع مانند  $f$  روی مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  می‌توان تعریف کرد به طوری که  $f(1) = 1$  باشد؟

- (۱) ۴
- (۲) ۱۶
- (۳) ۶۴
- (۴) ۲۵۶

**تست:** چند تابع مانند  $f$  از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3\}$  می‌توان تعریف کرد به طوری که  $f^{-1}(1) = 4$  باشد؟

- (۱) ۸۱
- (۲) ۳۶
- (۳) ۱۸
- (۴) ۲۷

**تست:** به چند طریق می‌توان سه کتاب متمایز را بین ۵ نفر توزیع کرد؟

- (۱) ۶
- (۲) ۱۵
- (۳) ۱۲۰
- (۴) ۱۲۵

**مثال:** ۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم، این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (۱ نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود). (مثال صفحه ۷۹ کتاب درسی)

## تابع یک به یک

تعداد توابع یک به یک از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$  برابر است با:  $P(|B|, |A|)$

( $P$  همان تبدیل است که در فصل شمارش بدون شمردن خواندید)

در حالت کلی اگر  $|A| = m$  و  $|B| = k$  در این صورت با شرط  $m \leq k$  تعداد توابع یک به یک از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$  برابر است با:  $(k)_m$

**مثال:** به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم) (مثال صفحه ۷۹ کتاب درسی)

**تست:** چند تابع یک به یک از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  وجود دارد؟

(۱) ۲۰

(۲) ۶۴

(۳) ۲۵۶

(۴) ۱۲۰

**تست:** چند تابع یک به یک از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  وجود دارد که شامل

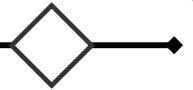
عضو  $(1, 1)$  باشد؟

(۱) صفر

(۲) ۲۴

(۳) ۶۰

(۴) ۱۲۰



**تست:** به چند طریق می‌توان سه کتاب متمایز را بین پنج نفر توزیع کرد به طوری که به هر نفر بیش از یک کتاب

نرسد؟

(۱) ۶۰

(۲) ۷۵

(۳) ۱۲۵

(۴) ۴۵

**تست:** چند تابع غیر یک‌به‌یک از مجموعه  $A = \{1, 2, 3\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  وجود دارد؟

(۱) ۶۰

(۲) ۶۵

(۳) ۷۰

(۴) ۷۵

**مثال:** چه تعداد تابع چون  $f: A \rightarrow B$  می‌توان تعریف کرد اگر بدانیم  $|A| = 5$  و  $|B| = 4$  است؟ چه تعداد از این توابع یک‌به‌یک هستند؟ (مثال ۵ صفحه ۸۴ کتاب درسی)

**مثال:** به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟ (مثال ۶ صفحه ۸۴ کتاب درسی)

## تابع پوشا

اگر تابع  $f$  از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$  تعریف شده باشد و برد  $f$  برابر مجموعه  $B$  شود (تمام اعضای برد پوشانده می‌شود) به تابع  $f$  پوشا می‌گویند.

**تذکر:** تعداد توابع پوشا از مجموعه  $n$  عضوی به مجموع  $m$  عضوی معادل تعداد روش‌های توزیع  $n$  مهره متمایز در  $m$  ظرف متمایز به طوریکه هیچ ظرفی خالی نباشد.

### روش بدست آوردن تعداد توابع پوشا:

برای بدست آوردن تعداد توابع پوشا از مجموعه  $n$  عضوی  $A$  به مجموعه  $m$  عضوی  $B$  کافیست تعداد افرازهای  $m$  عضوی  $A$  را بدست آورده و در  $m!$  ضرب می‌کنیم (جایگشت‌های مهره‌های افراز شده در  $m$  ظرف)

**تست:** چند تابع پوشا از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3\}$  می‌توان تعریف کرد؟

(۱) ۱۲

(۲) ۳۲

(۳) ۲۴

(۴) ۳۶

**تست:** چند تابع از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3\}$  می‌توان تعریف کرد به طوری که برد تابع برابر مجموعه  $B$  باشد؟

(۱) ۹۰

(۲) ۱۲۰

(۳) ۶۰

(۴) ۱۵۰

**تست:** تعداد توابع پوشا، از یک مجموعه ۶ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی، کدام است؟ (داخل ۹۸)

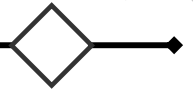
(۱) ۳۶۰

(۲) ۴۵۰

(۳) ۴۸۰

(۴) ۵۴۰





**تست:** از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3\}$  چند تابع پوشا مانند  $f$  می‌توان تعریف کرد به طوری که  $f(1) = 1$  باشد؟

- (۱) ۶
- (۲) ۱۲
- (۳) ۱۸
- (۴) ۱۲۰

**تست:** به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مشابه و ۵ مداد مختلف را بین سه نفر توزیع کرد به طوری که به هر نفر هم مداد و هم کتاب برسد؟

- (۱) ۷۲۰
- (۲) ۵۴۰
- (۳) ۹۰۰
- (۴) ۱۲۰۰

**تست:** از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3\}$  چند تابع غیر پوشا می‌توان تعریف کرد؟

- (۱) ۳۶
- (۲) ۴۵
- (۳) ۸۱
- (۴) ۲۸

**تست:** به چند طریق می‌توان ۵ جایزه مختلف را بین سه نفر توزیع کرد به طوری که حداقل به یک نفر جایزه‌ای تعلق

نگیرد؟

۹۸ (۱)

۹۰ (۲)

۹۳ (۳)

۱۵۰ (۴)

**تست:** چند تابع پوشا و یک‌به‌یک روی مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  می‌توان تعریف کرد؟

۱۶ (۱)

۲۵۶ (۲)

۲۴ (۳)

۶۰ (۴)

**تست:** چند تابع روی مجموعه  $A = \{1, 2, 3\}$  می‌توان تعریف کرد که نه یک‌به‌یک باشد و نه پوشا؟

۲۷ (۱)

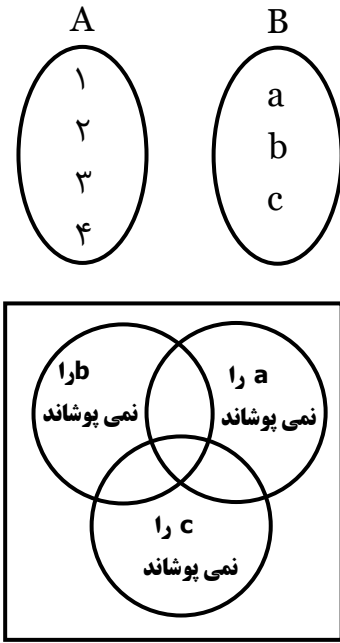
۲۱ (۲)

۱۸ (۳)

۱۵ (۴)

### محاسبه تعداد توابع پوشا به کمک اصل شمول:

**مثال:** با توجه به شکل مقابل از مجموعه A به مجموعه B چند تابع پوشا وجود دارد؟



$$\text{توابع پوشا} \left\{ \begin{array}{l} \text{تعداد توابع از A به B که a را نمی پوشانند.} \\ \text{تعداد توابع از A به B که b را نمی پوشانند.} \\ \text{تعداد توابع از A به B که c را نمی پوشانند.} \end{array} \right.$$

**جواب:**  $3^F - \left[ 3 \times (3-1)^F - \frac{3 \times (3-2)^F}{2} + 0 \right] = 36$

کل توابع  $\swarrow$   $\searrow$  پوشیده نشوند  $\swarrow$   $\searrow$  ۲ عضو پوشیده نشود

**مثال:** از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  به مجموعه  $B = \{a, b, c\}$  چند تابع پوشا با دامنه  $A$  وجود دارد؟



**مثال:** به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ (مثال صفحه ۷۸ کتاب درسی)

**مثال:** به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟ (تمرین ۷ صفحه ۸۴ کتاب درسی)

### اصل لانه کبوتری:

اگر  $m$  کبوتر و  $n$  لانه داشته باشیم و  $m > n$  و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار داشته باشد.

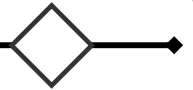
**تست:** در یک کلاس ۵۴ نفری دست کم چند نفر دارای ماه تولد یکسان هستند؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶



**تست:** کمترین تعداد افرادی که حداقل ۲ نفر از آنها در یک ماه از سال و یک روز هفته متولد شده‌اند، کدام

است؟

(۱) ۷۵

(۲) ۷۸

(۳) ۸۵

(۴) ۸۸

**تست:** ۶۵ کبوتر حداکثر در چند لانه کبوتر قرار گیرند تا حداقل در یک لانه بیش از ۲ کبوتر قرار داشته باشد؟

(۱) ۳۱

(۲) ۳۲

(۳) ۳۳

(۴) ۳۴

**تست:** در یک دبیرستان حداقل چند دانش آموز لازم است تا دست کم دو نفر حرف اول نام و حرف اول نام خانوادگی آنها یکسان باشد؟

(۱) ۳

(۲) ۶۵

(۳) ۲۵۷

(۴) ۱۰۲۵

**تست:** در یک مجموعه ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی حداقل چند عدد با باقی مانده یکسان بر عدد ۱۹ وجود دارد؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۸

**تست:** مجموعه  $S$  دارای ۵۰ عضو از اعداد طبیعی است. در تقسیم عضوهای  $S$  بر ۱۲، حداقل چند عضو باقی مانده یکسان دارند؟ (تست و نکته فرداد ۹۴)

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

**تست:** اگر  $K$  یک زیر مجموعه ۱۱۵ عضوی از اعداد طبیعی باشد، در تقسیم عضوهای  $S$  بر ۲۷، به طور یقین، حداقل چند عضو دارای یک باقیمانده هستند؟ (دافل ۹۴)

- (۱) ۴
- (۲) ۵
- (۳) ۶
- (۴) ۷

**تست:** مجموعه  $K$  اعداد طبیعی فرد و مضرب ۳ شروع از ۳ و ختم به ۶۳ است. یک زیرمجموعه حداقل چند عضوی، از  $K$  انتخاب شود، که مطمئن باشیم شامل ۲ عضو با مجموع ۶۶ می باشد؟ (فلاگ ۹۴)

- (۱) ۵
- (۲) ۶
- (۳) ۷
- (۴) ۸

**تست:** هر زیر مجموعه  $n$  عضوی از  $A = \{1, 2, \dots, 23\}$  به طور یقین حداقل ۲ عضو دارد که مجموع آن دو عضو ۲۴ می باشد، حداقل  $n$  کدام است؟ (فلاگ ۹۲)

- (۱) ۹
- (۲) ۱۰
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۳

**تست:** در یک کلاس ۴۰ نفری ۷ نفر نامزد انتخابات مشاوره با امور مدرسه اند. انتخاب شونده باید رأی بیشتر از سایرین داشته باشد، حداقل رأی انتخاب شونده کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۷

**تست:** در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۳ مهره قرمز و ۷ مهره آبی و ۱ مهره زرد موجود است. حداقل چند مهره از کیسه بیرون آوریم تا مطمئن باشیم، ۳ مهره هم‌رنگ یا بیشتر از کیسه خارج شده است؟ (ف۹۶)

(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

**تست:** در کیسه‌ای ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۳ مهره سبز موجود است. دست کم چند مهره از کیسه بیرون آوریم تا مطمئن باشیم، لااقل ۴ مهره سفید یا ۳ مهره سیاه یا ۲ مهره سبز بیرون آمده است؟ (دافل ۹۶)

(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

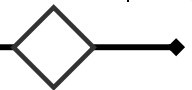
**تست:** حداقل چند نقطه داخل مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد اختیار کنیم تا حداقل ۲ نقطه فاصله کمتر از  $\frac{1}{3}$  داشته باشند؟

(۱) ۷

(۲) ۸

(۳) ۹

(۴) ۱۰



**تست:** حداقل چند زوج مرتب به صورت  $(a, b)$  ، با مختص های اعداد صحیح و مثبت انتخاب کنیم، تا مطمئن باشیم در دو زوج انتخابی ، جمع مختص های اول و جمع مختص های دوم ، اعداد زوج هستند؟ (داخل ۹۲ و خارج ۸۹)

(۱) ۶

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۱۰

**تست:** یک تاس همگن را حداقل چندبار پرتاب کنیم، تا به طور یقین سه بار یا بیشتر، نتیجه یکسان داشته باشیم؟ (داخل ۹۵)

(۱) ۱۲

(۲) ۱۳

(۳) ۱۸

(۴) ۱۹

**تست:** هریک از اعداد ۱ تا ۳۰ را بروی ۳۰ گوی یکسان نوشته در کیسه ای قرار می دهیم. حداقل چند گوی بیرون آوریم، تا به طور یقین دست کم دو عدد با مقسوم علیه مشترک بزرگتر از ۱ داشته باشیم؟ (داخل ۹۳)

(۱) ۹

(۲) ۱۰

(۳) ۱۲

(۴) ۱۳

**مثال:** ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده اند. (تمرین ۸ صفحه ۸۴ کتاب درسی)

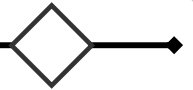


**مثال:** ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. (تمرین ۹ صفحه ۸۴ کتاب درسی)

**مثال:** حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آن‌ها روز تولدشان یکسان است؟ (تمرین ۱۰ صفحه ۸۴ کتاب درسی)

**مثال:** ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد. (تمرین ۱۱ صفحه ۸۴ کتاب درسی)

**مثال:** مجموعه اعداد  $A = \{1, 2, \dots, 84\}$  را در نظر می‌گیریم. نشان دهید هر زیر مجموعه ۴۳ عضوی از  $A$  دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ باشد. (تمرین ۱۲ صفحه ۸۴ کتاب درسی)



**مثال:** مجموعه اعداد  $A = \{1, 5, 9, 13, \dots, 77, 81, 85\}$  را که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد. (تمرین ۱۳ صفحه ۸۵ کتاب درسی)

**تست:** از مجموعه اعداد  $\{5, 8, 11, \dots, 65, 68, 71\}$  که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده است. یک زیرمجموعه‌ی حداقل چندعضوی انتخاب شود تا مطمئن باشیم، لااقل دو عدد در این زیرمجموعه موجود است که جمع آن‌ها، ۸۲ باشد؟ (حافل ۹۸)

- (۱) ۱۱
- (۲) ۱۲
- (۳) ۱۳
- (۴) ۱۴

**مثال:** ۱۳ نقطه درون یک مستطیل  $6 \times 8$  قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آن‌ها از هم، کم‌تر از  $\sqrt{8}$  باشد. (تمرین ۱۴ صفحه ۸۵ کتاب درسی)

**تست:** درون یک مستطیل  $9 \times 18$ ، حداقل چند نقطه اختیار شود، تا مطمئن باشیم حداقل فاصله ۲ نقطه از این نقاط انتخابی، کمتر از  $3\sqrt{2}$  باشد؟ (فایده ۹۸)

(۱) ۱۷

(۲) ۱۸

(۳) ۱۹

(۴) ۲۰

**مثال:** ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد. (تمرین ۱۵ صفحه ۸۵ کتاب درسی)

کار در منزل

ترکیبیت  
♦♦♦♦♦

(تمرین ۵: صفحه ۱۲۵ کتاب درسی)

$$\text{رنده} \times \text{عجم} \times \text{رنگ} \times \text{مدل} = 300$$

زنده  $\times$  حجم  $\times$  زنب  $\times$  مدل  $= 30$

نند  $\times$  جم  $\times$  رند  $\times$  مدل  $= 15$

$$\underbrace{F_X \cdots \times F_X}_{\Gamma_0} \times \underbrace{F_X \cdots \times F_X}_{\Gamma_\omega} = F^{1_0} \times F^\omega = F^{\Gamma_\omega}$$
$$\underbrace{\omega x \dots x \omega x}_{\bar{1}0} \underbrace{r x \dots x r}_{\bar{1}\omega} = \begin{pmatrix} 10 & \omega \\ \omega & r \end{pmatrix}$$



**مثال:** چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۴۵۰۰ وجود دارد؟

الف) تکرار مجاز است.

$$9999 - 4500 = 5499$$

ب) تکرار مجاز نیست.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 8 & 9 & \times & 280 \\ \hline & 4 & & & & \\ \hline & 20 & & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{مثلاً } 7, 4, 5 \\ \text{و } 8, 9 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 5 & 9 & 8 & 9 & \times & 2520 \\ \hline & 4 & & & & \\ \hline & 20 & & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{مثلاً } 7, 4, 5 \\ \text{و } 8, 9 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{+} \\ 2800 \end{array}$$

**تست:** چند کلمه ۳ حرفی با حروف a, b, c, d, e می توان نوشت بطوریکه حروف مجاور متمایز باشند؟

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 5 & 4 & 4 & \times \\ \hline & 4 & & \\ \hline & 20 & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{همه چیز} \\ \text{مثلاً } a \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 4 & 4 & 4 & \times \\ \hline & 4 & & \\ \hline & 20 & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{همه چیز} \\ \text{مثلاً } a \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 4 & 4 & 4 & \times \\ \hline & 4 & & \\ \hline & 20 & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{همه چیز} \\ \text{مثلاً } a \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\times} \\ 5 \times 4 \times 4 = 80 \end{array}$$

۸۰ (۱)

۹۰ (۲)

۱۰۰ (۳)

۱۲۰ (۴)

**تست:** چند عدد سه رقمی مضرب ۶ با ارقام غیر تکراری و با استفاده از ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ می توان نوشت؟

ابتداءً ۳ رقم هایی که در آنها حداقل ۱ رقم زوج باشد و مجموع آنها مضرب ۳  
می باشد را مشخص می کنیم.

$$\text{تعداد ۳ رقمی زوج} \quad \textcircled{1} \rightarrow 1, 2, 3 \rightarrow \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 2 \end{array} \xrightarrow{\times} 2$$

$$\textcircled{2} \rightarrow 2, 3, 4 \rightarrow \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 2 \end{array} \xrightarrow{\times} 4 \xrightarrow{+} \textcircled{8}$$

$$\textcircled{3} \rightarrow 3, 4, 5 \rightarrow \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 2 \end{array} \xrightarrow{\times} 2$$

۱۴ (۱)

۱۲ (۲)

۱۰ (۳)

۸ (۴)

**تست:** با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی زوج می توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست)

نکته: برای است و می اینجا از ستم استفاده می کنیم

$$\text{کل ۳ رقمی ها بدون تکرار} = \frac{4}{\frac{4}{\frac{3}{\times}}} \rightarrow 48$$

۳۲ (۱)

۳۰ (۲)

۲۴ (۳)

۲۲ (۴)

$$\rightarrow 20 = 48 - 18 = \text{زوج}$$

$$3 \text{ رقمی های فرد} = \frac{3}{\frac{3}{\frac{2}{\times}}} = 18$$

عجز منور بکان

**تمرین:** یک نقاش قوطی هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ های

متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می تواند داشته باشد؟ (تمرین ۵؛ صفحه ۱۳۹ کتاب درسی)

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11$$

**تمرین:** یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست می کند. این

آشپز چند طعم می تواند درست کند هر گاه: (تمرین ۷؛ صفحه ۱۴۰ کتاب درسی)

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه ها نداشته باشد؟  $\binom{10}{3}$

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی توانند استفاده شوند؟

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{2} \binom{2}{1} = 112$$

پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

$$\binom{10}{3} - \binom{3}{3} = 120 - 1 = 119$$

ت) ادویه ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می شوند که هیچ یک از ادویه های دسته اول با هیچ یک از ادویه های دسته دوم

① ② ③ ④ ⑤

① ② ③ ④ ⑤

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$$

دسته اول      دسته دوم

سازگاری ندارند؟

**مثال:** در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته‌ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد اگر: (مثال صفحه ۱۳۴ کتاب درسی)  
الف) کمیته ۴ نفره باشد؟

$$\binom{4}{4} = 1$$

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک از سه کشور یک نفر در کمیته باشد؟

$$\binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1} = 24$$

پ) کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً دو داور ایرانی داشته باشد؟

$$\binom{4}{2} \binom{5}{3} = 60$$

ت) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟

$$\binom{4}{3} \binom{5}{2} + \binom{4}{4} \binom{5}{1} = 45$$

ث) کمیته ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد؟

$$\binom{4}{3} \binom{3}{2} \binom{2}{2} = 12$$

ج) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟ (فقد ایرانی) - کل = (طالع + داور ایرانی)  
$$\binom{4}{5} - \binom{5}{5} = 124 - 1 = 123$$

**مثال:** آسانسوری با ۶ نفر از طبقه همکف یک ساختمان ۸ طبقه شروع به حرکت می‌کند. اگر قرار باشد در هر طبقه یک نفر پیاده شود (همه افراد باید پیاده شوند) این عمل به چند طریق ممکن است؟

$$\binom{7}{6} \times 4! = 7! = 5040$$

جایگشت ۶ نفر  
به انتخاب ۶ طبقه



**مثال:** فرض کنید می‌خواهیم با سه حرف «ج»، «پ» و «ژ» و ارقام ۲، ۳، ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم،  
مطلوب است: (مثال صفحه ۵۶ کتاب درسی)

الف) تعداد کل رمزهایی که می‌توان تشکیل داد.

ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آن‌ها همواره حروف کنار یکدیگرند.

پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آن‌ها همواره ارقام کنار یکدیگرند.

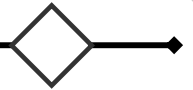
ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آن‌ها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

**مثال:** ۵ دانش آموز پایه‌ی دوازدهم و ۴ دانش آموز پایه‌ی یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم (در یک ردیف)  
قرار بگیرند اگر بخواهیم: (مثال صفحه ۵۷ کتاب درسی)

الف) همواره دانش آموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب) به صورت یک درمیان قرار بگیرند (هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند).

پ) اگر دانش آموزان پایه‌ی یازدهم نیز ۵ نفر باشند، به چند طریق می‌توان آن‌ها را به صورت یک درمیان قرار داد؟



**مثال:** محاسبه کنید با ارقام ۱، ۲، ۱ و ۱ چند رمز چهار رقمی می توان نوشت؟ (مثال صفحه ۵۸ کتاب درسی)

**مثال:** با ارقام ۵، ۴، ۴، ۲، ۳، ۲، ۲ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت؟ (مثال صفحه ۵۸ کتاب درسی)

**مثال:** ۹ نفر به چند طریق می توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟ (مثال صفحه ۵۹ کتاب درسی)

**مثال:** می‌خواهیم ۸ نفر را که دوبه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرفِ طولِ یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ (تمرین ۱ صفحه ۷۲ کتاب درسی)

**مثال:** اگر داشته باشیم  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از  $A$  و سه رقم از  $B$  باشد؟ (تمرین ۲ صفحه ۷۲ کتاب درسی)

**مثال:** ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان پذیر است؟ اگر: (تمرین ۳ صفحه ۷۲ کتاب درسی)

الف) هیچ محدودیتی نباشد؛  
 ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛  
 پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛  
 ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

**مثال:** برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه‌ی دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه‌ی یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن  $4! \times 7$  باشد. (تمرین ۴ صفحه ۷۲ کتاب درسی)

سوال: ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم به چند روش می‌توانند در سه صف کنار هم بایستند به طوری که همواره دانش آموزان پایه دوازدهم کنار هم بایستند؟

**مثال:** با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می‌توان نوشت؟ (تمرین ۵ صفحه ۷۲ کتاب درسی)

**مثال:** می‌خواهیم روی تعدادی جعبه‌ی حاوی اجناس تولید شده‌ی خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرف  $a, a, b, a, c, c, d, d, d$ ، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟ (تمرین ۶ صفحه ۷۲ کتاب درسی)



**مثال:** با ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟ (تمرین ۷ صفحه ۷۲ کتاب درسی)

**مثال:** مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده شده: (تمرین ۹ صفحه ۷۲ کتاب درسی)

الف)  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$        $x_i > 0, 2 \leq i \leq 5$

ب)  $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$        $x_1 > 2, x_5 \geq 4$

ج)  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$        $x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$

ت)  $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7$        $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$

ث)  $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3$        $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$

**مثال:** به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم: (تمرین ۸ صفحه ۷۲ کتاب درسی)

(الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛

(ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

(پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

(ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

(الف) تعداد جوابی صحیح نامنفی معادله  $x_1 + \dots + x_5 = 11$  ؟

(ب) تعداد جوابی صحیح مثبت (مثبتی) معادله  $x_1 + \dots + x_5 = 11$  ؟

(پ) تعداد جوابی صحیح نامنفی معادله  $x_1 + \dots + x_5 = 11$  با  $x_2 \geq 2$  ،  $x_5 \geq 3$  ؟

(ت) تعداد جوابی صحیح نامنفی معادله  $x_1 + \dots + x_5 = 11$  با  $x_4 \geq 5$  ؟

**تست:** چند عضو از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 120\}$  نسبت به ۲۴ اولند؟

$24 = 2^3 \times 3 \leftarrow$  مضرب ۲ نباشد و مضرب ۳ نباشد

(۱) ۳۵

$$A: 120 \div 2 = \left[ \frac{120}{2} \right] = 60$$

(۲) ۴۰

$$B: 120 \div 3 = \left[ \frac{120}{3} \right] = 40$$

(۳) ۴۵

$$A \cap B: 120 \div 6 = \left[ \frac{120}{6} \right] = 20$$

(۴) ۵۰

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |S| - |A \cup B| = 120 - (60 + 40 - 20) = (20)$$