



تاریخ آزمون:	آزمون درس: ریاضیات گسسته
ساعت شروع آزمون:	رشته و پایه: ریاضی دوازدهم
مدت امتحان : ۱۰۰ دقیقه	نام و نام خانوادگی:
	نمره به عدد: نمره به حروف:

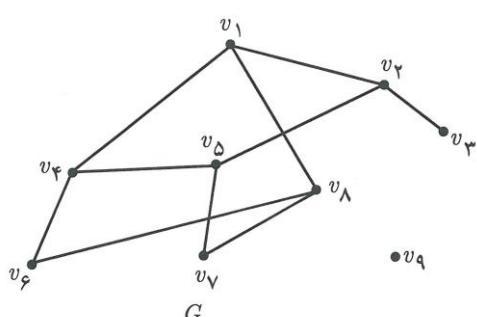
۲	<p>درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) برای هر عدد طبیعی بزرگ تر از 1, عدد $1 - 2^n$ اول است.</p> <p>ب) اگر $n \in N$ و n^2 زوج باشد, آن گاه n نیز زوج است.</p> <p>ج) تعداد گراف های r-منتظم از مرتبه 5 برابر است با: 3</p> <p>د) تعداد رئوس زوج در هر گراف ساده از مرتبه p همواره عددی فرد است. (i) درست (ii) نادرست</p>	۱
۲	<p>جاهاي خالي را با عبارات مناسب كامل کنيد.</p> <p>الف) الف) حاصل $[16, 32, 80]$ برابر است با:</p> <p>.....</p> <p>ب) معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب است اگر و تنها اگر:</p> <p>.....</p> <p>ج) رقم یکان عدد $! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 50!$ برابر است با:</p> <p>.....</p> <p>د) باقی مانده تقسیم عدد $A = 4985327$ بر 9 برابر است با:</p> <p>.....</p>	
۱.۲۵	<p>اگر a و b هردو عدد گنگ باشند و $a + nb$ گویابا شنده آنگاه $a + nb$ که در آن $(n \in Z)$ و $n \neq 1$ گنگ است.</p>	۲
۱.۵	<p>گزاره زیر را به روش اثبات بازگشته (گزاره های هم ارز) ثابت کنید:</p> $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ <p>برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:</p>	۳
۱.۵	<p>اگر $a > 1$ و $a 7k + 6$ و $a 9k + 7$, ثابت کنید a عددی اول است.</p>	۴

۱.۵	اگر باقی مانده تقسیم a و b بر ۱۱ به ترتیب ۵ و ۹ باشد باقی مانده تقسیم $2b - 2a$ بر ۱۱ را بیابید.	۵
۱.۷۵	باقی مانده تقسیم عدد $A = (2^{19} - 7) \times 13 \times 23$ به دست آورید.	۶
۱.۵	معادله همنهشتی $2^{11} \equiv 5x \pmod{5}$ را حل نموده و جواب عمومی آن را به دست آورید.	۷
۱.۵	اگر دهم دی ماه سالی دوشنبه باشد، ۳۱ تیر ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟	۸
۱.۵	شخصی در یک مسابقه پرتاب دارت شرکت کرده و در هر پرتاب ۵ یا ۳ امتیاز و در مجموع ۲۳ امتیاز کسب کرده است تعداد پرتاب های ۵ امتیازی این شخص را بیابید.	۹

۱۰

با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مجموعه رئوس و مجموعه یال های گراف G را بنویسید.



ب) یک $v_1 - v_8$ مسیر به طول ۳ بنویسید.

ج) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.

د) درجه ۵ در گراف \bar{G} را تعیین کنید.

ه) آیا گراف همبند است؟ چرا؟

و) $N_G(v_4)$ و $N_G(v_2)$ را بنویسید.

۱

گرافی از مرتبه ۱۲ و اندازه ۲۲ فقط رئوس از درجه ۳ و ۵ دارد، این گراف چند راس از درجه ۳ دارد؟

۱۱

۱

در گراف کامل k_p داریم: $p = \frac{1}{3}q$ نمودار گراف را رسم کنید.

۱۲

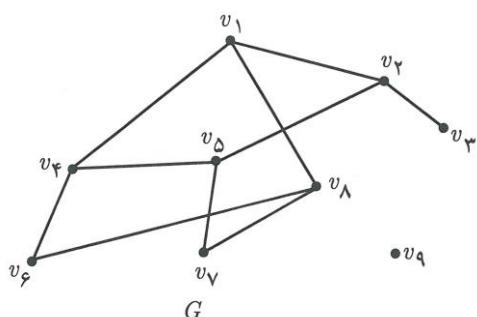
۲۰

تاریخ آزمون:	آزمون درس: ریاضیات گسسته
ساعت شروع آزمون:	رشته و پایه: ریاضی دوازدهم
مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه	نام و نام خانوادگی:
	نمره به عدد: نمره به حروف:

۲	۱
	<p>درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) برای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۱، عدد $1 - 2^n$ اول است.</p> <p>الف «نادرست است. زیرا به ازای $n = 4 \Rightarrow 2^4 - 1 = 15 \notin P$</p> <hr/> <p>ب) اگر $n \in N$ و n^2 زوج باشد، آن گاه n نیز زوج است.</p> <p>ب «درست است. زیرا:</p> <p>فخ: فرض می کنیم n فرد باشد داریم:</p> $n = 2k + 1 \xrightarrow{p.2} n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow n^2 = 2m + 1$ <p>فخ: با فرض اصلی (n^2 زوج است) در تناقض است لذا فخ باطل و حکم صادق است.</p> <hr/> <p>ج) تعداد گراف های r-منتظم از مرتبه ۵ برابر است با: ۳</p> <p>ج «درست است زیرا:</p> <p>نکته: تعداد گراف های ۲-منتظم یا $(p-3)$-منتظم از مرتبه p برابر است با تعداد حالت های که می توان عدد p را به صورت مجموع چند عدد بزرگتر از ۲ نوشت. هم چنین تمام p ضلعی ها، ۲-منتظم است.</p> <p>حل: چون گراف فرد منظم از مرتبه r طرفی تعداد گراف های 2^r است با: ۱</p> <p>د) تعداد رئوس زوج در هر گراف ساده از مرتبه p همواره عددی فرد است. i (درست) ii (نادرست)</p> <p>د «نادرست است. زیرا:</p> <p>نکته: تعداد رئوس زوج بستگی به مرتبه گراف دارد یعنی:</p> $\text{تعداد رئوس زوج فرد است} \rightarrow \text{فرد } p =$ $\text{تعداد رئوس زوج، زوج است} \rightarrow \text{زوج } =$
۲	
	<p>جاهاي خالي را با عبارات مناسب كامل کنيد.</p> <p>الف) الف) حاصل $[16, 32, 80] = [16, 16, 16] = 16 \times 1 \times 1 = 16$</p> <p>ب) معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب است اگر و تنها اگر :</p> $(a, b) c$ <p>ج) رقم یکان عدد $A = 50! + 49! + 48! + \dots + 1!$ برابر است با: ۳</p>

	<p>فاکتوریل اعداد بزرگتر از ۴ به صفر ختم می شوند. لذا رقم یکان $A = 1+2+6+24 = 33$ (برابر است با: ۳)</p> <p>د) باقی مانده تقسیم عدد $A = 4985327$ بر ۹ برابر است با: ۲</p> $4+9+8+5+3+2+7 \stackrel{9}{\equiv} 2 \quad \text{(حل)}$	
۱.۲۵	<p>اگر a و b هردو عدد گنگ باشند و $a+nb \in \mathbb{Z}$ و $n \neq 1$ که در آن $a+nb$ گنگ است.</p> <p>فخ: فرض می کنیم $a+nb$ گنگ نباشد. پس:</p> $\left. \begin{array}{l} a+nb \in \mathbb{Q} \\ a+b \in \mathbb{Q} \end{array} \right\} \xrightarrow{-} a+nb-a-b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (n-1)b \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n-1} \in \mathbb{Q} \end{array} \right\} \xrightarrow{\times} (n-1)b \times \frac{1}{n-1} \in \mathbb{Q}$ $\xrightarrow{n \neq 1} b \in \mathbb{Q}$ <p>با فرض اصلی $b \in \mathbb{Q}$ در تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.</p>	۲
۱.۵	<p>گزاره زیر را به روش اثبات بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید:</p> $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \quad \text{برای هر دو عدد حقیقی } x \text{ و } y \text{ داریم:}$ $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx \Leftrightarrow$ $x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0 \Leftrightarrow$ $(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) \geq 0 \Leftrightarrow$ $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0.$ <p>همواره برقرار است لذا حکم بنابه اثبات بازگشتی برقرار است.</p>	۳
۱.۵	<p>اگر $a > 1$ و $a 7k+6$ و $a 9k+7$ ثابت کنید a عددی اول است. (اثبات)</p> $a 9k+7 \xrightarrow{\times 7} a 63k+49 \Rightarrow a 63k+49-63k-54 \Rightarrow a -5 \Rightarrow a 5 \Rightarrow a = 5$ $a 7k+6 \xrightarrow{\times 9} a 63k+54$	۴
۱.۵	<p>اگر باقی مانده تقسیم a و b بر ۱۱ به ترتیب ۵ و ۹ باشد باقی مانده تقسیم $2b-a$ بر ۱۱ را بیابید. (اثبات)</p> $a = 11k+5 \xrightarrow{\times 1} a = 11k+5 \Rightarrow a - 2b = 11(k-2q) - 13 = 11t - 13 + 22 - 22$ $b = 11q+9 \xrightarrow{\times 2} 2b = 22q+18$ $\Rightarrow a - 2b = 11t + 9 - 22 = 11(t-1) + 9 = 11s + 9$	۵
۱.۷۵	<p>باقی مانده تقسیم عدد $A = (2^{19}-7) \times 13$ بر ۲۳ به دست آورید. (حل)</p> $2^6 \stackrel{23}{\equiv} -5 \xrightarrow{p.2} 2^{12} \stackrel{23}{\equiv} 25 \stackrel{23}{\equiv} 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2^{12} \stackrel{23}{\equiv} 2 \\ 2^7 \stackrel{23}{\equiv} 13 \end{array} \right\} \xrightarrow{\times} 2^{19} \stackrel{23}{\equiv} 26 \xrightarrow{-7} (2^{19}-7) \stackrel{23}{\equiv} 19$ $\xrightarrow{\times 13} (2^{19}-7) \times 13 \stackrel{23}{\equiv} 19 \times 13 \stackrel{23}{\equiv} (-4) \times 13 \stackrel{23}{\equiv} -52 \stackrel{23}{\equiv} 17$	۶

۱.۵	<p>معادله همنهشتی $5x \equiv 2 \pmod{11}$ را حل نموده و جواب عمومی آن را به دست آورید.</p> <p>حل: معادله همنهشتی داده $5x \equiv 2 \pmod{11}$ دارای جواب است زیرا: $(5, 11) = 1$</p> $5x \equiv 2 \pmod{11} \quad \xrightarrow{-2 \times 11} \quad 5x \equiv 2 - 22 \equiv -20 \pmod{11} \quad \xrightarrow{(5, 11)=1} \quad x \equiv -4 \pmod{11} \quad \Rightarrow x = 11k - 4, \quad k \in \mathbb{Z}$	۷														
۱.۵	<p>اگر دهم دی ماه سالی دوشنبه باشد، ۳۱ تیر ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟</p> <p>حل: تعداد روز ها بین دو تاریخ داده شده را پیدا نموده آن را با A نشان می دهیم چون روزی را می خواهد که قبل از دهم دی ماه است لذا باقی مانده A – به پیمانه ۷ را محاسبه می کنیم.</p> $A = (31 - 31) + 2 \times 31 + 3 \times 30 + 10 = 162 \Rightarrow 162 \equiv 6 \pmod{7}$ <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>یکشنبه</th> <th>شنبه</th> <th>جمعه</th> <th>پنجشنبه</th> <th>چهارشنبه</th> <th>سه شنبه</th> <th>دوشنبه</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۶</td> <td>۵</td> <td>۴</td> <td>۳</td> <td>۲</td> <td>۱</td> <td>۰</td> </tr> </tbody> </table>	یکشنبه	شنبه	جمعه	پنجشنبه	چهارشنبه	سه شنبه	دوشنبه	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۸
یکشنبه	شنبه	جمعه	پنجشنبه	چهارشنبه	سه شنبه	دوشنبه										
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰										
۱.۵	<p>شخصی در یک مسابقه پرتاب دارت شرکت کرده و در هر پرتاب ۵ یا ۳ امتیاز و در مجموع ۲۳ امتیاز کسب کرده است تعداد پرتاب های ۵ امتیازی این شخص را بیابید.</p> <p>حل: x: تعداد پرتاب های ۵ امتیازی و y: تعداد پرتاب های ۳ امتیازی</p> <p>معادله همنهشتی نوشته شده دارای جواب است. $5x + 3y = 23 \Rightarrow (5, 3) = 1 \mid 23 \Rightarrow x = 1 \pmod{23}$</p> $5x \equiv 23 \pmod{3} \quad \xrightarrow{-3} \quad 5x \equiv 20 \pmod{3} \quad \xrightarrow{\div 5} \quad x \equiv 4 \pmod{3} \quad \xrightarrow{-3} \quad x \equiv 1 \pmod{3} \quad \Rightarrow x = 3k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}$ $5(3k + 1) + 3y = 23 \Rightarrow 15k + 5 + 3y = 23 \Rightarrow 3y = 18 - 15k \quad \xrightarrow{\div 3} \quad y = 6 - 5k$ $\begin{cases} x = 3k + 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{1}{3} \\ y = 6 - 5k \geq 0 \Rightarrow \frac{6}{5} \geq k \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{3} \leq k \leq \frac{6}{5} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow k = 0, 1$ $x = 3(1) + 1 = 4 \quad x = 3(0) + 1 = 1 \quad \text{و} \quad x = 3(0) + 1 = 4$ <p>تعداد پرتاب های ۵ امتیازی برابر است با: $1 + 0 = 1$.</p>	۹														
۲	<p>با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) مجموعه رئوس و مجموعه یال های گراف G را بنویسید.</p> <p>ب) یک مسیر به طول ۳ بنویسید.</p> <p>جواب: $v_1 v_4 v_6 v_8$ مسیری به طول ۳ است.</p> <p>ج) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.</p> <p>جواب: $v_1 v_4 v_5 v_2 v_1$ یا $v_1 v_4 v_6 v_8 v_1$ دور به طول ۴ است.</p> <p>د) درجه ۵ در گراف \bar{G} را تعیین کنید.</p> <p>جواب: $\deg_G(v_5) + \deg_{\bar{G}}(v_5) = p - 1 \Rightarrow 2 + x = 8 \Rightarrow x = 5$</p> <p>ه) آیا گراف همبند است؟ چرا؟</p> <p>جواب: همبند نیست زیرا از راس v_1 به راس v_9 مسیری وجود ندارد.</p> <p>و) $N_G(v_4)$ و $N_G(v_2)$ را بنویسید.</p>	۱۰														



	$N_G[v_4] = \{v_4, v_5\}$ و $N_G(v_4) = \{v_1, v_5, v_6\}$	
۱	<p>گرافی از مرتبه ۱۲ و اندازه ۵ فقط رئوس از درجه ۳ و ۵ دارد. این گراف چند راس از درجه ۳ دارد؟</p> $x \xrightarrow{\times} 3x \quad +$ $x \xrightarrow{\times} 5 \times (12 - x)$ \hline $3x + 5(12 - x) = 2q \Rightarrow 60 - 2x = 2 \times 22 \Rightarrow 16 = 2x \Rightarrow x = 8$	۱۱
۱	<p>در گراف کامل k_p داریم: $p = \frac{1}{3}q$ نمودار گراف را رسم کنید.</p> $\left. \begin{array}{l} q_{k_p} = \frac{p(p-1)}{2} \\ q = 2p \end{array} \right\} \Rightarrow 2p = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 4p = p(p-1) \xrightarrow{\div p, \quad p \neq 0} 4 = p-1$ <p style="color: red;">حل</p> <p>$p = 4$</p>	۱۲
۲۰	جمع	