

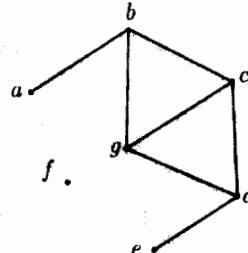


با سمه تعالی

نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع: ۱۰ صبح	تعداد صفحه: ۲	سوالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گستره
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان:	رشته: ریاضی فیزیک	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه

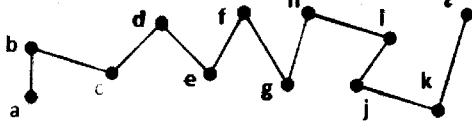
ردیف	نمره	مشخصه
۱	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.	
	الف) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $1 + 4k$ مربع کامل است.	
	ب) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول است.	
	ج) گراف حاصل از مدل سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است.	
	د) گراف -3 -منتظم از مرتبه 5 قابل رسم نیست.	
۲	اگر α و β دو عدد گنج باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنج است.	
۳	گزاره زیر را به روش بازگشتنی (گزاره های همارز) ثابت کنید: (برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$)	
۴	اگر $a > 1$ و $4a + 3$ عدد a ثابت کنید a عددی اول است.	
۵	پاسخ هر یک از سوالات زیر را به دست آورده و دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید.	
	الف) اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $2 ab$ در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ رابرایی دارد.	
	ب) مطلوب است باقی مانده تقسیم عدد $10 + 12 + 10 \times 1000 = 10000$ بر عدد 7 .	
۶	معادله همنهشتی $3x \equiv 13 \pmod{10}$ را حل و جواب عمومی آن را بدست آورید.	
۷	با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سوالات زیر پاسخ دهید.	
	الف) یک $C - a$ مسیر به طول 3 بنویسید.	
	ب) یک دور به طول 4 مشخص کنید.	
	ج) درجه رأس a در گراف G را تعیین کنید.	
	د) آیا گراف G همبند است؟ چرا؟	
	ه) یک زیرگراف تهی 5 رأسی، از گراف G رسم کنید.	
۸	ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.	
۹	گراف G با مجموعه رأسهای $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه یال های $E(G) = \{ae, bc, bd, be, ec, ed\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت های (الف) تا (ج) پاسخ دهید.	
	الف) مجموعه همسایگی باز رأس d را بنویسید.	
	ب) اندازه گراف را مشخص کنید.	
	ج) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟	

ادامه سوالات در صفحه دوم



پاسمه تعالی

ساعت شروع: ۱۰ صبح	تعداد صفحه: ۲	نام و نام خانوادگی:	سوالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان:	رشته: ریاضی فیزیک	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه

ردیف	نمره	سوال
۱۰	۱	گراف کامل K_6 دارای ۳۶ یال است در این گراف، مرتبه گراف و (G) را مشخص کنید.
۱۱	۱	گراف $P_{1,2}$ در شکل مقابل رسم شده است. الف) یک γ -مجموعه از آن را مشخص کنید. ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال \cup عضوی از آن را مشخص نمایید. 
۱۲	۱	اگر داشته باشیم $\{1, 2, 3, 4\} = A = \{5, 6, 7, 8, 9\} = B$, در این صورت چند کد یا رمز ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقم (متماز) از A و سه رقم (متماز) از B باشد؟
۱۳	۱	به چند طریق می‌توان ۸ توب یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توب داشته باشد؟
۱۴	۱/۵	دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید.
۱۵	۲	به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ (راه حل نوشته شود)
۱۶	۱/۵	حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیر کبیسه در نظر بگیرید)
۲۰		جمع نمره "موفق باشید"

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع:	رشته: ریاضی فیزیک
تاریخ امتحان:	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	

ردیف	راهنمای تصویج	نمره
۱	الف) درست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) ج) نادرست (۰/۲۵)	۱
۲	اگر $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. (۰/۲۵) از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است. (۰/۲۵) می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست در نتیجه: اما با توجه به فرض مسئله: β گنگ است (۰/۲۵) (صفحه: ۸) با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. (۰/۲۵)	۱/۲۵
۳	$\begin{aligned} 2x^r + 2y^r + 2 &\geq 2xy + 2x + 2y \quad \Leftrightarrow (x^r - 2x + 1) + (y^r - 2y + 1) + (x^r - 2xy + y^r) \geq 0 \\ (0/25) & \qquad \qquad \qquad (0/25) \end{aligned}$ $\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x-1)^r + (y-1)^r + (x-y)^r \geq 0 \quad (0/25) \\ &\Leftrightarrow (x-1)^r \geq 0, \quad (y-1)^r \geq 0, \quad (x-y)^r \geq 0 \quad (0/25) \end{aligned}$ (صفحه: ۸)	۱
۴	$\begin{aligned} a 4k+4 &\Rightarrow a 45k+20 \quad (0/25) \\ a 5k+3 &\Rightarrow a 45k+27 \quad (0/25) \end{aligned} \Rightarrow a 7 \quad (0/25) \quad \begin{cases} a>1 \\ a=7 \end{cases} \quad (0/25)$ (صفحه: ۱۶)	۱
۵	الف) عددی فرد است بنابراین $a+2$ عددی فرد است و $b a+2$ ، بنابراین $b a+2$ عددی فرد خواهد بود. (۰/۲۵) می‌دانیم مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ به علاوه یک است. (۰/۲۵) $a^r + b^r + 3 = (am+1) + (an+1) + 3 = 8(m+n) + 5 \Rightarrow r=5 \quad (0/25)$ $\begin{aligned} \text{ب)} \quad 1000 &\equiv 6 \equiv -1 \quad (0/25) \Rightarrow (1000)^r \times 12 + 10 \equiv -12 + 10 \quad (0/25) \\ &\Rightarrow (1000)^r \times 12 + 10 \equiv -2 \equiv 5 \quad (0/25) \Rightarrow r=5 \quad (0/25) \end{aligned}$ (صفحات: ۱۶ و ۲۱)	۱/۲۵
۶	$3x \stackrel{v}{=} 13 \Rightarrow 3x \stackrel{v}{=} 6 \quad (0/25) \stackrel{(3,v)=1}{\Rightarrow} x \stackrel{v}{=} 2 \quad (0/25) \Rightarrow x = 7k+2 \quad (0/25)$ (صفحه: ۲۵)	۱

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع:	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گستره
تاریخ امتحان:		پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۷	(۰/۲۵) $\deg_G(a) = ۵$ ج) (۰/۲۵) $bcdgb$ ب) (۰/۲۵) $abgc$ الف) (۰/۲۵) $\deg(v) = \sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ د) خیر - چون مثلاً از f به g مسیری وجود ندارد. (۰/۵) (صفحات: ۳۶ و ۳۸ و ۳۹)	۱/۵
۸	فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف G و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$ از طرفی می دانیم که مجموع درجات رئوس یک گراف G عددی زوج است یعنی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ زوج و (۰/۲۵) $\sum_{v \in B} \deg(v)$ زوج است بنابراین تفاضل آنها نیز زوج خواهد شد. (۰/۲۵) (صفحه: ۴۰) بنابراین $\sum_{v \in A} \deg(v)$ زوج و نتیجه می شود که $n(A)$ عددی زوج است. (۰/۲۵)	۱
۹	(۰/۲۵) $q = ۶$ (۰/۲۵) $N_G(d) = \{b, e\}$ الف) (۰/۲۵) $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = ۱۲$ (۰/۲۵) (صفحه: ۴۱)	۱
۱۰	$q(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = ۳۶$ (۰/۲۵) (صفحه: ۴۲) $\Rightarrow p = ۶$ (۰/۲۵) ، $\Delta(G) = p-1 = ۵$ (۰/۲۵)	۱
۱۱	(۰/۵) $\{a, c, e, g, i, k\}$ ب) (۰/۵) $\{b, e, h, k\}$ الف) (۰/۵) $\binom{۶}{۲} = ۱۵$ (صفحه: ۵۴)	۱
۱۲	(۰/۲۵) $\binom{۶}{۲} \times \binom{۵}{۳} \times \binom{۵!}{(۰/۲۵)} = ۷۲۰۰$ (۰/۲۵) (صفحه: ۷۲)	۱
۱۳	(۰/۲۵) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = ۸$ (۰/۲۵) $x_i \geq ۱$ ، $i = ۱, ۲, ۳, ۴$ (۰/۲۵) (صفحه: ۷۳) $\Rightarrow \binom{۸-1}{۴-1} = \binom{۷}{۳} = ۳۵$ (۰/۵)	۱

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع:	رشته: ریاضی فیزیک
تاریخ امتحان:		پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۴	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{ c c c } \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{ c c c } \hline 12 & 21 & 23 \\ \hline 33 & 22 & 11 \\ \hline 21 & 13 & 32 \\ \hline \end{array}$ <p style="text-align: center;">(+/۵) (+/۵) (+/۵)</p> <p style="text-align: right;">صفحه: ۷۳</p>	۱/۵
۱۵	<p>تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های پوشای یک مجموعه ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه ۳ عضوی مانند B.</p> $A_i = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad j = 1, 2, 3\} \quad (./25)$ $ S = B ^{ A } = 3^4 = 81 \quad (./25), \quad A_1 = A_2 = A_3 = 2^4 = 16 \quad (./25)$ $ A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = 1 \quad (./25), \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 0 \quad (./25),$ $ \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3 = S - A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36 \quad (./25)$ <p style="text-align: right;">صفحات: ۷۸ و ۷۹</p>	۲
۱۶	<p>$k+1=20 \Rightarrow k=19 \quad (./5)$</p> <p>طبق تعیین اصل لانه کبوتری، تعداد لانه‌ها همان روزهای سال می‌باشد.</p> <p>$n=365 \quad (./5)$</p> <p>$k n+1=365 \times 19+1=6936 \quad (./5)$</p> <p style="text-align: right;">صفحه: ۸۴</p>	۱/۵

«محسین گرامی لطفا برای راه حل‌های دیگر بارم را به تناسب تقسیم نمایید.»