



رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع:	نام و نام خانوادگی:	سوالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان:	تعداد صفحه: ۲	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

## الف) بخش الزامی

دانشآموز عزیز به سوالات ۱ تا ۱۴ جهت کسب نمره ۱۶ نمره پاسخ دهید.

۱	گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.	۱/۷۵
۲	اگر باقیمانده تقسیم عدد $a$ بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $2a+3$ بر ۸ را به دست آورید.	۱/۲۵
۳	اگر $N$ ..... $n = 5$ یا $n = 6$ ، $n \in N$ و $n   9k+7$ و $n   7k+6$ . ثابت کنید	۱
۴	باقیمانده تقسیم $7^m$ بر ۱۵ را به دست آورید.	۱/۵
۵	معادله همنهشتی $5x \equiv 2 \pmod{7}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۲۵
۶	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) مجموع درجه های رأس های هر گراف ..... تعداد یال ها است. ب) در یک گراف $k$ -منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر با ..... است. پ) در بین تمام مجموعه های احاطه گر گراف $G$ ، مجموعه یا مجموعه های احاطه گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه گر ..... گراف $G$ می نامیم. ت) یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش، دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر ..... می نامیم.	۱
۷	گراف $G$ را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید. ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید. پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از $a$ به $c$ بنویسید.	۱/۲۵
۸	در گراف $G$ درجه رأس ۷ برابر با ۹ است و درجه رأس ۷ در گراف $\bar{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف $G$ را مشخص کنید.	۰/۷۵
۹	گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید، به طوری که: الف) مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. ب) بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.	۱
۱۰	عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.	۱/۲۵
۱۱	با ارقام عدد $4, 3, 2, 2, 2, 1, 1$ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت.	۰/۷۵
۱۲	به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.	۱/۲۵

«بقیه سوالات در صفحه دوم»

با اسمه تعالی

رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع:	نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان:	تعداد صفحه: ۲	

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

۱۳	مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی $1, 2, 3, 4$ یک مربع لاتین جدید به دست آورید.	۱	<table border="1"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> </table>	۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱	۳	۴	۱	۲	۱	۲	۳	۴																				
۲	۱	۴	۳																																				
۴	۳	۲	۱																																				
۳	۴	۱	۲																																				
۱	۲	۳	۴																																				
۱۴	در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.	۱	<table border="1"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> </table> <p>(ب)</p> <table border="1"> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> <p>(الف)</p>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۲	۱	۳	۲	۱	۳	۱	۳	۲	۳	۲	۱
۱	۲	۳																																					
۳	۱	۲																																					
۲	۳	۱																																					
۳	۱	۲																																					
۲	۳	۱																																					
۱	۲	۳																																					
۳	۲	۱																																					
۱	۳	۲																																					
۲	۱	۳																																					
۲	۱	۳																																					
۱	۳	۲																																					
۳	۲	۱																																					

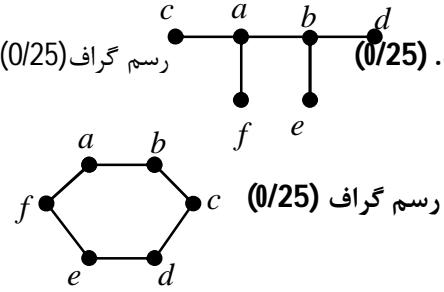
**ب) بخش انتخابی**

دانشآموز عزیز جهت کسب ۴ نمره از سوالات ۱۵ تا ۲۲ فقط ۴ سوال را به دلخواه انتخاب کرده و پاسخ دهید.

۱۵	اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ .	۱	
۱۶	گراف $G$ ، ۶ رأسی - منظم است.	۱	<p>(الف) اندازه گراف <math>G</math> را بیابید.</p> <p>(ب) نمودار گراف <math>G</math> رارسم کنید.</p>
۱۷	ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۱	
۱۸	۴ دانشآموز پایه دهم و ۳ دانشآموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که: الف) هیچ دو دانشآموز هم پایه کنار هم نباشند. ب) همواره دانشآموزان پایه دهم کنار هم باشند.	۱	
۱۹	به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداقل یک خودکار داده باشیم).	۱	
۲۰	در بین اعداد طبیعی مانند $n$ ، به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟	۱	
۲۱	در یک اردوی دانشآموزی حداقل چند دانشآموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آن‌ها ماه تولد یکسانی دارند؟	۱	
۲۲	قرار است سه کارگر $W_1, W_2, W_3$ در سه روز متوالی با سه ماشین نخریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید.	۱	
	جمع نمره "موفق باشید"	۲۴	

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع:	مدت امتحان: 120 دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه			تاریخ امتحان:

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

پاسخ سوالات الزامی			
1	الف) نادرست $(0/25)$ (مشابه قسمت کار در کلاس صفحه 3) ب) درست $(0/25)$ $(2k+1)^2 - 1 = \underbrace{4k^2 + 4k + 1}_{(0/25)} - 1 = \underbrace{4k(k+1)}_{(0/25)} = 4 \times 2q = 8q \quad (0/25)$ $(0/25)$ صفحه 15	1/75	
2	$a = 4q + 3 \quad (0/25) \Rightarrow 2a + 3 = \underbrace{8q + 9}_{(0/25)} = \underbrace{8(q+1) + 1}_{(0/25)} = 8q' + 1 \quad (0/25) \Rightarrow r = 1 \quad (0/25)$	1/25	
3	$n \mid 9k + 7 \times (-7) \quad (0/25) \Rightarrow n \mid -63k - 49 + 63k + 54 \quad (0/25) \Rightarrow n \mid 5 \quad (0/25) \xrightarrow{n \in N} n = 1 \quad (0/25)$ یا 5 (مثال صفحه 12) $n \mid 7k + 6 \times 9 \quad (0/25)$	1	
4	$7^2 = 49 \equiv 4 \quad (0/25) \Rightarrow 7^4 \equiv 16 \equiv 1 \quad (0/5) \Rightarrow 7^{28} \equiv 1 \quad (0/25) \xrightarrow{\times 7^2 \equiv 4 \quad (0/25)} 7^{30} \equiv 4 \quad (0/25)$ (مشابه سوال 8 و 9 صفحه 29)	1/5	
5	$2 \equiv 35 \quad (0/25) \Rightarrow 5x \equiv 35 \quad (0/25) \xrightarrow{(5,11)=1 \quad (0/25)} x \equiv 7 \quad (0/25) \Rightarrow x = 11k + 7 \quad (0/25)$	1/25	
6	الف) دو برابر $(0/25)$ (نتیجه ابتدای صفحه 40) ب) $k$ (تعريف گراف منظم صفحه 35) ت) مینیمال $(0/25)$ (تعريف صفحه 44) پ) مینیمم $(0/25)$ (تعريف صفحه 46)	1	
7	الف) $N_G[a] = \{a, b, e, d\} \quad (0/5)$ (مشابه مثال صفحه 36) ب) دور به طول 4 $(0/25)$ (تعريف دور صفحه 38) $a, b, e, d, a$ نوشته، نمره داده شود. پ) مسیر به طول 3. $(0/25)$ و مسیر $a, d, e, b, c$ $\Rightarrow$ مسیر به طول 4 $(0/25)$ $a, e, b, c$ (مشابه مثال صفحه 38)	1/25	
8	$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1 \quad (0/25) \Rightarrow 9 + 12 = p - 1 \quad (0/25) \Rightarrow p = 22 \quad (0/25)$	0/75	
9	الف) گراف رو به رو از مرتبه 6 و دارای تنها یک مجموعه احاطه‌گریکتا $\{a, b\}$ است. (تمرين 9 صفحه 53) رسم گراف $(0/25)$  ب) گراف مقابله دارای سه مجموعه احاطه‌گری به اندازه 2 است که عبارتند از: $\{a, d\}, \{f, c\}, \{e, b\}$ (ذکر یک مجموعه کافی است). $(0/25)$ . (تمرين 8 صفحه 53)	1	
10	برای گراف مورد سوال داریم $\gamma(G) = 3$ . از طرفی مجموعه $\{g, h, d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف است $(0/25)$ . لذا $3 \leq \gamma(G) \leq 3$ . بنابراین $\gamma(G) = 3$ (تمرين 50 صفحه 50).	1/25	
11	$\frac{7!}{2! \times 3!} \quad (0/5) = 42^\circ \quad (0/25)$ (مشابه مثال پایین صفحه 58)	0/75	
12	قسمت پ تمرین 8 صفحه 71 $x_1 + \dots + x_5 = 11 \quad , \quad x_2 \geq 2 \quad , \quad x_5 \geq 4 \quad (0/25)$ $x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11 \quad (0/25) \Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5 \quad (0/25) \Rightarrow$ جواب $\binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} \quad (0/5)$	1/25	

ادامه پاسخها در صفحه دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گستته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع:	مدت امتحان: 120 دقیقه
تاریخ امتحان		پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره																		
13	<p>با استفاده از جایگشت ۱ → ۲, ۲ → ۳, ۳ → ۴, ۴ → ۱ (۰/۵) مریع لاتین به صورت          (مشابه تمرين ۱۲ صفحه ۷۲)          مقابله داریم.          (برای جایگشت‌های دیگر نیز بارم مناسب در نظر بگیرید.)</p>	<table border="1"> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr> </table> <p>(۰/۵)</p>	3	2	1	4	1	4	3	2	4	1	2	3	2	3	4	1		
3	2	1	4																	
1	4	3	2																	
4	1	2	3																	
2	3	4	1																	
14	<p>متعادنند. زیرا عدد دو رقمی          تکراری در مریع وجود ندارد. (۰/۲۵)</p> <p>متعادنند. زیرا عدد دو رقمی          تکراری در مریع وجود ندارد. (۰/۲۵)</p>	<table border="1"> <tr><td>13</td><td>21</td><td>32</td></tr> <tr><td>32</td><td>13</td><td>21</td></tr> <tr><td>21</td><td>32</td><td>13</td></tr> </table> <p>(۰/۲۵)</p> <table border="1"> <tr><td>32</td><td>21</td><td>13</td></tr> <tr><td>11</td><td>33</td><td>22</td></tr> <tr><td>23</td><td>12</td><td>31</td></tr> </table> <p>(الف)</p>	13	21	32	32	13	21	21	32	13	32	21	13	11	33	22	23	12	31
13	21	32																		
32	13	21																		
21	32	13																		
32	21	13																		
11	33	22																		
23	12	31																		

پاسخ سوالات اختیاری		
15	$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \quad (0/25) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \quad (0/25) \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0 \quad (0/25)$ چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است. (۰/۲۵)	$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \quad (0/25) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \quad (0/25) \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0 \quad (0/25)$ (۰/۲۵)
16	<p>الف) (تعريف گراف <math>k</math>-منتظم صفحه ۳۵)</p> <p>ب) رسم یکی از گراف‌های زیر کافی است. (۰/۵)</p> 	$3 \times 6 = 2q \Rightarrow q = 9 \quad (0/5)$ $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2q \quad (0/25)$
17	<p>فرض کنیم <math>G</math> یک گراف و <math>A</math> مجموعه همه رؤوس فرد <math>G</math> و <math>B</math> مجموعه همه رؤوس زوج گراف <math>G</math> باشد. در این صورت  <math>\sum_{v \in B} \deg(v) = 2k</math> و <math>\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2q \quad (0/25)</math>. از طرفی <math>\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)</math>: داریم          لذا <math>\sum_{v \in A} \deg(v) = 2q - 2k \quad (0/25)</math> می‌دانیم تعدادی زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می‌کنند بنابراین          تعداد اعضای <math>A</math> باید زوج باشد. (۰/۲۵) (صفحه ۴۰)</p>	$\sum_{v \in B} \deg(v) = 2k \quad (0/25)$ $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2q \quad (0/25)$ $\sum_{v \in A} \deg(v) = 2q - 2k \quad (0/25)$
18	<p>الف) (مشابه مثال صفحه ۵۷)</p>	$4! \times 3! \quad (0/5)$
19	<p>تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های یک به یک از مجموعه ۴ عضوی به          مجموعه‌ای ۸ عضوی (۰/۲۵)، یعنی: <math>(8)_4 = \frac{8!}{4!} = 168 \quad (0/5)</math> (۰/۲۵) (۰/۲۵)</p>	$(8)_4 = \frac{8!}{4!} = 168 \quad (0/5)$
20	$A = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \Rightarrow  A  = \left[ \frac{100}{6} \right] = 16 \quad (0/25)$ $B = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \Rightarrow  B  = \left[ \frac{100}{10} \right] = 10 \quad (0/25)$ $A \cap B = \{n \mid 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \Rightarrow  A \cap B  = \left[ \frac{100}{30} \right] = 3 \quad (0/25) \Rightarrow  A \cup B  = 16 + 10 - 3 = 23 \quad (0/25)$	$ A  = \left[ \frac{100}{6} \right] = 16 \quad (0/25)$ $ B  = \left[ \frac{100}{10} \right] = 10 \quad (0/25)$ $ A \cap B  = \left[ \frac{100}{30} \right] = 3 \quad (0/25)$

ادامه پاسخ‌ها در صفحه سوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع	مدت امتحان: 120 دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه			تاریخ امتحان
9			

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
21	در این مسئله $6 = k + 1 \Rightarrow k = 5$ و تعداد لانه ها 12 است ( $0/25$ ). پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش آموزان حداقل می بایست $73 = 6 \times 12 + 1$ باشد. ( $0/5$ )	1
22	برای برنامه ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع $A$ مربوط به ماشین ها و مربع $B$ مشخص کننده الیاف است. ( $72$ صفحه 14 سوال)	1
	$\begin{array}{ccc} W_1 & W_2 & W_3 \\ \begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} & = A & \begin{array}{ c c c } \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} = B \Rightarrow \begin{array}{ c c c } \hline 12 & 31 & 23 \\ \hline 33 & 22 & 11 \\ \hline 21 & 13 & 32 \\ \hline \end{array} \end{array}$ <p style="text-align: center;">(0/25)    (0/5)    (0/25)</p> <p style="text-align: right;">عدد سمت چپ هر درآید نشان دهنده ماشین و عدد سمت راست آن مشخص کننده نوع الیاف است.</p>	

20 جمع نمره

«همکاران گرامی لطفا برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»