۱ـ اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ و $\frac{۱}{۲}A^{۲}B=I$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

با توجه به رابطهٔ $\frac{۱}{۲}A^{۲}B=I$، ماتریس B وارون ماتریس $\frac{۱}{۲}A^{۲}$ است،

بنابراین داریم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۲ & -۶ \\ -۸ & ۱۶ \end{bmatrix}\Rightarrow \frac{۱}{۲}A^{۲}=\begin{bmatrix} ۶ & -۳ \\ -۴ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۱}{۲}A^{۲}\right)^{-۱}=\frac{۱}{۶\times ۸-(-۳)(-۴)}\begin{bmatrix} ۸ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۳۶}\begin{bmatrix} ۸ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}=B$$

$$B \text{ مجموع درایه‌های ماتریس } =\frac{۱}{۳۶}(۸+۳+۴+۶)=\frac{۲۱}{۳۶}=\frac{۷}{۱۲}$$

۲- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & m \\ -m & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح m، تساوی $A+A^{-۱}=۲I$ برقرار است؟

۱) هیچ مقدار
۲) ۱

۳) ۲
۴) بی‌شمار

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & m \\ -m & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{m^۲}\begin{bmatrix} ۰ & -m \\ m & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A+A^{-۱}=۲I \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & m \\ -m & ۰ \end{bmatrix}+\frac{۱}{m^۲}\begin{bmatrix} ۰ & -m \\ m & ۲ \end{bmatrix}=۲I$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & m-\frac{۱}{m} \\ -(m-\frac{۱}{m}) & \frac{۲}{m^۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

باید داشته باشیم:

$$m-\frac{۱}{m}=۰ \Rightarrow m=\frac{۱}{m} \Rightarrow m^۲=۱ \Rightarrow m=\pm ۱$$

$$\frac{۲}{m^۲}=۲ \Rightarrow m^۲=۱ \Rightarrow m=\pm ۱$$

بنابراین به ازای دو مقدار ۱ و ۱- برای m، تساوی داده شده برقرار است.

۳ — اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^{۶}+(A^{-۱})^{۳}$ کدام است؟

۱) I

۲) $\bar{O}$

۳) $-۲I$

۴) A

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A\times A^{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=-I$$

$$\Rightarrow A^{۶}=(A^{۳})^{۲}=(-I)^{۲}=I \qquad (۱)$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۰-(-۱)}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^{-۱})^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^{-۱})^{۳}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=-I \quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow A^{۶}+(A^{-۱})^{۳}=I+(-I)=\bar{O}$$

۴ — اگر $A=\begin{bmatrix} \tan\alpha & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟ $(\alpha \neq \frac{k\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z})$

۱) $\begin{bmatrix} \tan\alpha & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} \cot\alpha & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} \tan\alpha & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} \cot\alpha & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

روش دوم: وارون ماتریس قطری $(a,b \neq ۰)\, A=\begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix}$ به صورت

$A^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{a} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{b} \end{bmatrix}$ است، پس داریم:

$$A=\begin{bmatrix} \tan\alpha & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{\tan\alpha} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{-۱} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cot\alpha & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

روش دوم: وارون ماتریس قطری $(a,b \neq ۰)\, A=\begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix}$ به صورت

$A^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{a} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{b} \end{bmatrix}$ است، پس داریم:

$$A=\begin{bmatrix} \tan\alpha & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{\tan\alpha} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{-۱} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cot\alpha & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

۵ — اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x & x \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲y \\ -۵ & z \end{bmatrix}$ و $۲A^{-۱}=B$ باشد، حاصل $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۵-

$$A=\begin{bmatrix} ۲x & x \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۶x-۵x}\begin{bmatrix} ۳ & -x \\ -۵ & ۲x \end{bmatrix}$$

$$=\frac{۱}{x}\begin{bmatrix} ۳ & -x \\ -۵ & ۲x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۳}{x} & -۱ \\ -\frac{۵}{x} & ۲ \end{bmatrix}$$

$$۲A^{-۱}=B \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۶}{x} & -۲ \\ -\frac{۱۰}{x} & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۲y \\ -۵ & z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۶}{x}=۳ \Rightarrow x=۲ \\ -\frac{۱۰}{x}=-۵ \Rightarrow x=۲ \\ ۲y=-۲ \Rightarrow y=-۱ \\ z=۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+y+z=۲-۱+۴=۵$$

ویژگی‌های وارون ماتریس

ویژگی ۱ وارونِ وارون هر ماتریس مربعی با خودِ آن ماتریس برابر است.

به عبارت دیگر اگر A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$$

ویژگی ۲ اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر و k عددی حقیقی و غیرصفر باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}}$$

به عبارت دیگر وارون، هم عدد را وارون می‌کند و هم ماتریس را.

ویژگی ۳ عمل وارون روی ضرب ماتریس‌ها با ترتیب برعکس صورت می‌پذیرد.

به عبارت دیگر اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر و ضرب‌پذیر باشند، آن‌گاه:

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

◄ این ویژگی قابل تعمیم است، یعنی برای ماتریس‌های وارون‌پذیر و ضرب‌پذیر A_1، A_2، ... ، A_n داریم:

$$(A_1A_2\ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

نتیجه: در حالت خاص، اگر $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ فرض شوند، آن‌گاه:

$$\boxed{(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n}$$

به عبارت دیگر وارونِ توان nاُم یک ماتریس با توان nاُم وارونِ آن ماتریس برابر است.

هشدار: عمل وارون روی جمع و تفریق ماتریس‌ها، قاعده‌ای ندارد. به عبارت دیگر:

$$(A \pm B)^{-1} = ??$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}|A| & ۸\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}$، در این صورت حاصل $|A|$ را یافته و از آنجا ماتریس وارون A را بیابید.

حل:

$$|A|=۵|A|-۸(۳)\Rightarrow ۴|A|=۲۴\to |A|=۶\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۶ & ۸\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}|A| & ۸\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{دترمینان از دو طرف}}$$

$$A^{*}=\begin{bmatrix}۵ & -۸\\ -۳ & ۶\end{bmatrix}$$

$$|A|=۳۰-۲۴=۶$$

$$\to A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}A^{*}=\frac{۱}{۶}\begin{bmatrix}۵ & -۸\\ -۳ & ۶\end{bmatrix}$$

مثال: اگر $2A = \begin{bmatrix} |A| & -4 \\ 1 & |A| \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A^{-1}|$ را به دست آورید.

$$2A = \begin{bmatrix} |A| & -4 \\ 1 & |A| \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{دترمینان از طرفین}} |2A| = |A|^2 - (-4) \Rightarrow (2)^2 |A| = |A|^2 + 4 \to 4|A| = |A|^2 + 4$$

$$|A|^2 - 4|A| + 4 = 0 \to \left(|A| - 2\right)^2 = 0 \to |A| = 2 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴a-۱ & -۱۴ \\ ۵ & a-۱۰ \end{bmatrix}$ باشد، به ازای کدام مقادیر a، ماتریس $۳A^{-۱}+B$ وارون‌پذیر نیست؟

۱) ۷ و ۱۱ ۲) ۳ و ۴ ۳) ۳ و ۷ ۴) ۴ و ۱۱

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۳\times۷-۶\times۴}\begin{bmatrix} ۷ & -۶ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}=-\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۷ & -۶ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۳A^{-۱}=\begin{bmatrix} -۷ & ۶ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۳A^{-۱}+B=\begin{bmatrix} -۷ & ۶ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴a-۱ & -۱۴ \\ ۵ & a-۱۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۴a-۸ & -۸ \\ ۹ & a-۱۳ \end{bmatrix}$$

شرط اینکه ماتریس $۳A^{-۱}+B$ وارون پذیر نباشد، آن است که دترمینان آن برابر صفر شود، بنابراین داریم:

$$\left|۳A^{-۱}+B\right|=۰\Rightarrow(۴a-۸)(a-۱۳)-(-۸)\times۹=۰$$

$$\Rightarrow ۴a^۲-۵۲a-۸a+۱۰۴+۷۲=۰\Rightarrow ۴a^۲-۶۰a+۱۷۶=۰$$

$$\xrightarrow{\div۴} a^۲-۱۵a+۴۴=۰\Rightarrow(a-۴)(a-۱۱)=۰\Rightarrow\begin{cases} a=۴ \\ a=۱۱ \end{cases}$$

۷— اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه ماتریس $A^{-۱}$ با کدام‌یک از ماتریس‌های زیر برابر است؟

۱) $A^{۱۰۰}$ ۲) $A^{۲۰۰}$ ۳) $A^{۳۰۰}$ ۴) $A^{۴۰۰}$

$$A^{۲}=AA=\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=AA^{۲}=\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

ماتریس A وارون‌پذیر است، بنابراین اگر طرفین رابطهٔ $A^{۳}=I$ را در $A^{-۱}$ ضرب کنیم، داریم:

$$A^{-۱}\times A^{۳}=A^{-۱}\times I\Rightarrow \underbrace{A^{-۱}\times A}_{I}\times A^{۲}=A^{-۱}\Rightarrow A^{۲}=A^{-۱}$$

در نتیجه ماتریس A^{n} به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^{n}=\begin{cases} A & :n=۳k+۱,k\in W \\ A^{-۱} & :n=۳k+۲,k\in W \\ I & :n=۳k \quad ,k\in W \end{cases}$$

با توجه به اینکه باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۲۰۰ بر ۳، برابر ۲ است، پس

$A^{۲۰۰}=A^{-۱}$ می‌باشد.

۸— اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}x & 1\\ y & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x\\ -1 & y\end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد و $B=\begin{bmatrix}x & -2y\\ -3y & 4x\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(2x)B^{-1}$ کدام است؟ $(x\neq 0)$

۱) $\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}-4 & -2\\ -3 & -1\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}x & 1\\ y & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x\\ -1 & y\end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (-x-y)(y+x) = -(x+y)^2 = 0 \Rightarrow x=-y$$

$$B=\begin{bmatrix}x & -2y\\ -3y & 4x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 2x\\ 3x & 4x\end{bmatrix}\Rightarrow |B| = -2x^2$$

$$B^{-1}=\frac{1}{-2x^2}\begin{bmatrix}4x & -2x\\ -3x & x\end{bmatrix}=\frac{1}{2x}\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2xB^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

مثال: اگر A ماتریس ۲×۲ و وارون‌پذیر باشد و ۳ = $|A|$ ، حاصل عبارت $|A^{۳}|-۳|A^{-۱}|+۵$ را بیابید.

حل:

$$|A^{۳}|-۳|A^{-۱}|+۵=|A|^{۳}-۳\left(\frac{۱}{|A|}\right)+۵=(۳)^{۳}-۳\left(\frac{۱}{۳}\right)+۵=۲۷-۱+۵=۳۱$$

مثال: اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $A^{-1} = 2A^{2}$ باشد، حاصل $|A|$ را بیابید.

حل:

$$A^{-1} = 2A^{2} \rightarrow |A^{-1}| = |2A^{2}| \Rightarrow \frac{1}{|A|} = 2^{3}|A^{2}| \Rightarrow \frac{1}{|A|} = 8|A|^{2} \Rightarrow 8|A|^{3} = 1 \rightarrow |A|^{3} = \frac{1}{8} \rightarrow |A| = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$