



- (۱) واژه زیر را تعریف کنید : مکان هندسی
- (۲) جمله زیر را با کلمه مناسب تکمیل کنید.
- نقطه M روی عمود منصف پاره خط AB است اگر و فقط اگر فاصله M از A و B باشد
- (۳) قضیه : نیمساز یک زاویه، مکان هندسی نقطه ای در صفحه آن زاویه است که فاصله آن از دو ضلع زاویه برابر باشد
- (۴) جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.
- مکان هندسی نقطه ای در صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد است.
- (۵) مکان هندسی مرکز دایره هایی را پیدا کنید که از نقطه مفروض A می گذرند و شعاع آنها برابر R است.
- (۶) دایره $C(O, 6)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه ای از صفحه این دایره را تعیین کنید که از آن نقطه مماس هایی به طول ۸ بر این دایره می توان رسم کرد.
- (۷) دایره $C(O, R)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه ای را تعیین کنید که مماس های رسم شده از این نقطه بر دایره، بر هم عمود باشند.
- (۸) در دایره $C(O, R)$ وترهای به طول K رسم شده اند، مکان هندسی نقطه ی M وسط این وترها را تعیین کنید.
- (۹) سکه ای به شعاع ۲ سانتی متر را روی صفحه ی مربع شکلی به ضلع ۱۲ سانتی متر پرتاب می کنیم، مکان هندسی نقطه ای درون مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آنجا قرار گیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع شود.
- (۱۰) پاره خط AB به اندازه ی L واحد از صفحه ی مختصات چنان می لغزد که همواره دو سر آن، A و B بر روی محورهای مختصات قرار دارند. مکان هندسی نقطه ی M وسط AB کدام است؟
- (۱۱) مطلوب است مکان هندسی نقطه هایی که مجموع مربع های فاصله هایشان از دو خط عمود بر هم، مساوی مقدار ثابت a^2 باشد.
- (۱۲) مکان هندسی نقطه ای از صفحه را پیدا کنید که از یک خط داده شده ی d به فاصله معلوم k باشد. ($k > 0$)
- (۱۳) دو نقطه ی A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله ی ۳ سانتی متر باشد.
- (۱۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله اند، چیست؟
- (۱۵) مکان هندسی مرکزهای همه ی دایره هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ی ثابت A مماس اند، چیست؟
- (۱۶) مکان هندسی مرکز همه ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس اند، چیست؟
- (۱۷) مکان هندسی مرکزهای همه ی دایره هایی با شعاع ثابت r' که بردایره ی $C(O, r)$ در صفحه ی این دایره مماس خارج اند، چیست؟
- (۱۸) دو خط L و L' در نقطه O متقاطع اند، نقاطی در صفحه این دو خط مشخص کنید که از دو خط به یک فاصله و از نقطه O به فاصله ی R_{cm} باشد مسئله چند جواب دارد؟ ($R \neq 0$)
- (۱۹) مکان هندسی مرکز تویی که روی یک سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم می غلتد را با رسم شکل بیابید.
- (۲۰) مکان هندسی مرکز دایره هایی از فضا که در یک نقطه مشخص بر یک خط داده شده مماس باشند را به کمک استدلال استقرایی حدس بزنید.
- (۲۱) جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.
- مکان هندسی مرکز دایره ای که در خارج یک دایره داده شده واقع است و روی محیط آن می غلتد می باشد.
- (۲۲) نقاط A ، B ، C و D در صفحه مفروض اند. نقطه ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).
- (۲۳) نقاط A ، B و C در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ی ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید).

۲۴) نقطه‌ی A و خط d در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A به فاصله‌ی ۲ سانتی متر و از d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید).

۲۵) هرگاه صفحه ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکلی است؟

۲۶) هرگاه دو خط d و L موازی باشند، از دوران d حول L سطحی ایجاد می شود که آن را یک سطح استوانه ای می نامیم. حال فرض کنید صفحه‌ی P، یک سطح استوانه ای را قطع کند. در حالت های مختلف در باره‌ی سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).

۲۷) مکان هندسی مجموعه‌ی نقاطی از صفحه را بیابید که مجموع فاصله های آنها از دو خط عمود بر هم برابر k باشد.

۲۸) دو نقطه‌ی A و B و خط d در یک صفحه واقعند. نقطه ای روی خط d بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد. آیا مسئله همواره جواب دارد؟ بحث کنید. (مسأله چند جواب دارد؟ (بحث کنید))

۲۹) نمودار مقابل محل قرار گرفتن ساختمان شهرداری، مجسمه S و فواره‌ی F را نشان می دهد.

می خواهیم میله‌ی پرچم را در محلی نصب کنیم که از مجسمه و فواره به یک فاصله باشد و از مقابل ساختمان شهرداری به فاصله‌ی ۹ متر باشد. مکان هندسی محل نصب میله‌ی پرچم را تعیین کنید.

۳۰) مکان هندسی نقطه ای در فضا را پیدا کنید که از یک خط داده شده‌ی L به فاصله d باشد.

۳۱) مکان هندسی رأس های مثلثی هایی که در قاعده مشترک و مساحت برابر دارند را تعیین کنید.

۳۲) مکان هندسی نقطه ای از صفحه را پیدا کنید که از دو خط موازی به یک فاصله باشد.

۳۳) مکان هندسی مرکز دایره هایی را بیابید که بر دو خط متوازی مماس باشند.

۳۴) مکان هندسی وسط های پاره خط هایی را که دو سرشان روی دو خط موازی واقعند، پیدا کنید.

۳۵) مکان هندسی نقطه ای در فضا را پیدا کنید که از دو صفحه موازی به یک فاصله باشد.

۳۶) دو صفحه‌ی P و Q و خط d با هم موازیند. مکان هندسی نقطه ای از فضا که از دو صفحه‌ی موازی P و Q به یک فاصله

باشد و از خط موازی d به فاصله‌ی معلوم k باشد را به کمک استدلال استقرایی بیابید. (در مورد جواب های مسئله بحث کنید).

۳۷) دایره مکان هندسی چه نقطه ای از صفحه است.

۳۸) مکان هندسی نقطه ای از یک صفحه که از نقطه ثابتی واقع در آن صفحه به فاصله ثابتی است چیست؟

۳۹) مکان هندسی نقطه ای از فضا که از نقطه ثابتی واقع در آن به فاصله ثابتی است چیست؟

۴۰) مکان هندسی مرکز دایره هایی که از دو نقطه‌ی متمایز A و B واقع در یک صفحه می گذرند چیست؟

۴۱) سه نقطه متمایز A، B و C در یک صفحه داده شده اند. نقطه ای از این صفحه را بیابید که از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله و از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم R باشد.

۴۲) مکان هندسی مرکز دایره ای را تعیین کنید که در نقطه مشخص A بر یک خط داده شده مماس باشد و این دایره از نقطه‌ی ثابت B خارج آن خط بگذرد.

۴۳) با استفاده از خط کش و پرگار مربعی رسم کنید که پاره خط مفروض DE قطر آن باشد. (روش رسم را توضیح دهید.) (مراحل

D • ————— • E

رسم را توضیح دهید.)

۴۴) در یک صفحه دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی متر از هم قرار دارند. فقط یک نقطه مانند M در صفحه وجود دارد که به فاصله‌ی ۳ سانتی متر از A و m سانتی متر از B قرار دارند. مقدار m کدام است؟

۴۵) در یک صفحه دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی متر از هم قرار دارند. دو نقطه‌ی M و M' در صفحه وجود دارد که به فاصله‌ی ۳ سانتی متر از A و m سانتی متر از B قرار دارند. چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟

۴۶) مکان هندسی نقطه ای در فضا که از دو صفحه موازی M و R به یک فاصله باشد و از نقطه ثابت P، به فاصله d باشد را به کمک استدلال استقرایی بیابید.

۴۷) نقطه‌ی ثابت A رأس مثلث‌هایی مانند ABC است که اندازه‌ی ضلع AC در آن‌ها همواره ثابت است. مکان هندسی نقطه‌ی M وسط ضلع کدام است؟

۴۸) معادله دایره‌ای به مرکز $O'(3, 1)$ و شعاع ۴ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم به دست آورید.

۴۹) تحقیق کنید رابطه $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ معادله یک دایره است سپس مختصات مرکز و شعاع آن را یافته و نمودار آن را رسم کنید.

۵۰) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, -2)$ بوده و از نقطه $(2, 3)$ بگذرد.

۵۱) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی $(1, -1)$ بگذرد و خطوط $y = x + 1$ و $y = 1 - x$ شامل دو قطر آن باشند.

۵۲) معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(-2, 5)$ و $B(4, -3)$ دو سر قطری از آن باشد.

۵۳) معادله دایره‌ای را بنویسید که معادله قطرهای آن به صورت $2m(x + y) + 2mx + (m - 1)y = 0$ بوده و شعاعش برابر ۳ باشد.

۵۴) دو دایره‌ی به معادله‌های $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ مفروض اند. اندازه‌ی وتر از دایره‌ی بزرگتر که بر دایره‌ی کوچکتر مماس است کدام است؟

۵۵) دو دایره‌ی به معادله‌های $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$ و $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ مفروض اند. اندازه بزرگترین قطعه مماسی که یک سر آن بر روی دایره بزرگتر و سر دیگر آن قطعه‌ی تماس بر روی دایره کوچکتر باشد، را بیابید.

۵۶) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن روی خط $y = x + 3$ بوده و در نقطه‌ای به عرض ۲ بر محور y ها مماس گردد.

۵۷) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن روی خط $x = y + 2$ بوده و در نقطه‌ای به طول ۵ بر محور طول ها مماس باشد.

۵۸) دایره‌ای بر دو نقطه‌ی $(0, -9)$ و $(-3, 0)$ گذشته و بر محور x ها مماس است. این دایره محور y ها را در نقطه‌ی دیگر، با کدام عرض قطع می‌کند؟

۵۹) دو دایره از نقطه $(4, 2)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس اند. قطر دایره بزرگتر کدام است؟

۶۰) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکزش روی خط $y = 3x + 4$ و در ربع سوم بر هر دو محور مماس باشد.

۶۱) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که نقطه‌ی $O(2, -1)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله‌ی $4x + 3y + 5 = 0$ مماس باشد.

۶۲) شعاع دایره‌ای را بیابید که مرکز آن بر روی نیمساز ناحیه‌ی دوم واقع شده و از نقطه‌ی $A(-2, -1)$ گذشته و بر خط به معادله‌ی $y = 2x$ مماس شود.

۶۳) به ازای کدام مقدار m خط به معادله‌ی $y = mx + 1$ بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ مماس است؟

۶۴) معادله دایره‌ای را بنویسید که معادله قطرهای آن به صورت $(m + 2)x + (m - 1)y = 3$ بوده و بر خط $3x - 4y = -13$ مماس باشد.

۶۵) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-4, 2)$ بوده و بر خط $2x - 6 = 0$ مماس باشد.

۶۶) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(1, -2)$ بوده و روی خط به معادله‌ی $3x + 4y = 10$ وتری به طول ۸ جدا کند.

۶۷) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(1, 3)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ مماس بیرونی باشد.

۶۸) معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(1, -1)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$ مماس درونی باشد.

۶۹) وضعیت هر یک از جفت دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ و $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0$

ب) $x^2 + y^2 - 2x = 1$ و $x^2 + y^2 = 1$

ج) $x^2 + y^2 = 9$ و $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

د) $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$

۷۰) اندازه مماس مشترک خارجی و داخلی دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 8y = 32$ و $(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 1$ را بیابید.

۷۱) معادله خطی که در نقطه $A(a, b)$ واقع بر دایره $x^2 + y^2 = R^2$ برای این دایره مماس باشد، به صورت $ax + by = R^2$ می باشد.

۷۲) در نقطه $A(-1, -1)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله این خط مماس را به دست آورید.

۷۳) معادله دایره ای که از نقاط $A(2, 3)$ و $B(-2, 1)$ بگذرد و مرکزش روی خط $x - y = 1$ باشد بیابید.

۷۴) به ازای کدام مجموعه ی مقادیر a ، منحنی به معادله $x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 2ax + 4y + 4a = 0$ یک دایره است؟

۷۵) وضعیت هریک از نقاط $A(-1, -1)$ و $B(1, -2)$ و $C(2, 3)$ و $D(4, -1)$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ تعیین کنید.

۷۶) طول قطعه مماسی که از نقطه $A(1, 3)$ بر دایره $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$ رسم شود را بیابید.

۷۷) طول کوتاهترین وتری از دایره $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 24 = 0$ که از نقطه $A(1, 1)$ می گذرد را بیابید.

۷۸) وضعیت هر یک از جفت دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 - 2x = 4$

ب) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ و $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

ج) $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 5 = 0$

د) $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

۷۹) نقاط $A(-1, -1)$ و $B(1, 1)$ و $C(1, -3)$ رؤس مثلث ABC هستند. معادله دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید.

سپس معادله مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

۸۰) وضعیت هر یک از خطوط و دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $3x + 4y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$

ب) $x + y = 2$ و $x^2 + y^2 = 2$

ج) $x + y = 1$ و $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$

۸۱) مکان هندسی نقاطی مانند $P(x, y)$ را پیدا کنید که فاصله آنها از نقطه $A(-6, 4)$ ، $\sqrt{2}$ برابر فاصله آنها از نقطه $B(-3, 2)$ باشد.

۸۲) از نقطه $(5, 0)$ دو مماس بر دایره $x^2 + y^2 = 5$ رسم می کنیم تا بدایره در نقاط A و B مماس شوند مختصات A و B را پیدا کنید.

(۱) واژه زیر را تعریف کنید: مکان هندسی

جواب: مکان هندسی، مجموعه‌ی همه‌ی نقطه‌های صفحه یا فضا است که دارای ویژگی مشترکی هستند، یعنی هر نقطه در این مجموعه دارای این ویژگی است و هر نقطه که آن ویژگی را دارد عضو این مجموعه می‌باشد.

(۲) جمله زیر را با کلمه مناسب تکمیل کنید.

نقطه M روی عمود منصف پاره خط AB است اگر و فقط اگر فاصله M از A و B باشد.

جواب: به یک فاصله

(۳) قضیه: نیمساز یک زاویه، مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه آن زاویه است که فاصله آن از دو ضلع زاویه برابر باشد.

جواب: بر اساس تعریف مکان هندسی، اثبات دو مرحله دارد:

مرحله اول: نقطه M را روی نیمساز $\hat{BXY}$ در نظر می‌گیریم و از M خطوطی بر اضلاع BX و BY عمود می‌کنیم تا آنها را

به ترتیب در H و K قطع کند بنابراین $\triangle BMH \cong \triangle BMK$ (ز ض ز) پس $MH = MK$

مرحله دوم: اگر نقطه M از دو ضلع BX و BY به فاصله یکسان باشد،

چون $\triangle BMH \cong \triangle BMK$ (وتر و یک ضلع) پس $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ یعنی خطی که از B و M می‌گذرد نیمساز زاویه است.

(۴) جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد است.

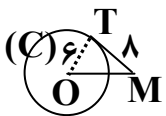
جواب: نیمساز زاویه

(۵) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را پیدا کنید که از نقطه مفروض A می‌گذرند و شعاع آنها برابر R است.

جواب: دایره به مرکز A و شعاع R است. (رسم شکل به عهده دانش آموز)

(۶) دایره $C(O, 6)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه این دایره را تعیین کنید که از آن نقطه مماس‌هایی به طول ۸ بر

این دایره می‌توان رسم کرد.



جواب: $OM = \sqrt{36 + 64} = 10$ بنابراین مکان هندسی مورد نظر دایره به مرکز O و شعاع ۱۰ می‌باشد.

(۷) دایره $C(O, R)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که مماس‌های رسم شده از این نقطه بر دایره، بر هم

عمود باشند.



جواب: فرض کنیم مسئله حل شده باشد و M یکی از نقطه‌هایی باشد که از آن، دو مماس عمود بر هم

MT و MT' بر دایره‌ی $C(O, R)$ رسم شده است. از O به نقطه‌های تماس T و T' وصل می‌کنیم.

چهار ضلعی $OTMT'$ مربع است. زیرا چهار زاویه‌ی قائمه دارد و دو ضلع مجاورش نیز برابرند ($OT = OT' = R$). در این

مربع، $OM = R\sqrt{2}$ مقدار ثابتی است. بنابراین مکان هندسی نقطه‌ی M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R\sqrt{2}$ است.

(۸) در دایره $C(O, R)$ وترهای به طول K رسم شده‌اند، مکان هندسی نقطه‌ی M وسط این وترها را تعیین کنید.

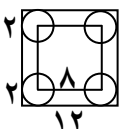
جواب: فرض کنیم $AB = K$ وتری از دایره‌ی $C(O, R)$ باشد.

فاصله‌ی نقطه‌ی O مرکز دایره از نقطه‌ی M وسط وتر AB همواره مقدار ثابت است زیرا است.



$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{K}{2}\right)^2}$$

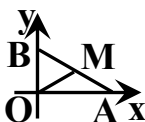
پس مکان هندسی نقطه‌ی M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{R^2 - \left(\frac{K}{2}\right)^2}$ است.



(۹) سکه‌ای به شعاع ۲ سانتی متر را روی صفحه‌ی مربع شکلی به ضلع ۱۲ سانتی متر پرتاب می‌کنیم،

مکان هندسی نقطه‌ای درون مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آنجا قرار گیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع شود.

جواب: مکان هندسی سطح مربعی به ضلع $12 - 4 = 8$ است.



(۱۰) پاره خط AB به اندازه‌ی L واحد از صفحه‌ی مختصات چنان می‌لغزد که همواره دو سر آن، A و B بر روی

محورهای مختصات قرار دارند. مکان هندسی نقطه‌ی M وسط AB کدام است؟

جواب: طبق شکل مقابل OM ، میانه‌ی وارد بر وتر AB است، پس داریم: $OM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} L$ پس OM شعاع دایره‌ای

به مرکز مبدأ و شعاع $\frac{1}{2}L$ است بنابراین مکان هندسی مورد نظر دایره ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $\frac{1}{2}L$.

(۱۱) مطلوب است مکان هندسی نقطه هایی که مجموع مربع های فاصله هایشان از دو خط عمود بر هم، مساوی مقدار ثابت a^2 باشد.

جواب : مکان هندسی مورد نظر دایره ای است به مرکز O (محل برخورد دو خط) و به شعاع $|a|$ زیرا :

$$MA^2 + MB^2 = a^2 \Rightarrow OA^2 + MA^2 = a^2 \Rightarrow OM^2 = a^2 \Rightarrow OM = |a|$$

(۱۲) مکان هندسی نقطه ای از صفحه را پیدا کنید که از یک خط داده شده d به فاصله معلوم k باشد. ($k > 0$)

جواب : چند نقطه به فاصله معلوم k از خط d را در نظر گرفته و به هم وصل می کنیم، دو خط موازی خط d و به فاصله k که در دو طرف خط d قرار گرفته اند جواب مساله می باشند.

(۱۳) دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله 3 سانتی متر باشد.

حل : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمودمنصف AB

و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله 3 سانتی متر باشد، دو خط موازی

d به فاصله 3 سانتی متر از آن هستند. بنابراین نقطه ی برخورد خط L

(عمودمنصف AB) و دو خط موازی d' و d'' جواب مسئله است (نقاط M_1 و M_2).

بحث در وجود جواب : اگر L یکی از دو خط d' و d'' را قطع کند

دیگری را هم قطع می کند و مسئله مانند شکل، ۲ جواب دارد. اگر با دو خط

موازی باشد، مسئله جواب ندارد و اگر L بر یکی از دو خط d' و d''

منطبق باشد، مسئله بی شمار جواب دارد.

(۱۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله اند، چیست؟

جواب : مکان هندسی مورد نظر دو خط، نیمسازهای زاویه های ایجاد شده بین دو خط متقاطع است که بر هم عمود نیز هستند.

(۱۵) مکان هندسی مرکزهای دایره هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ی ثابت A مماس اند، چیست؟

جواب : فرض کنیم دایره ی به مرکز O و به شعاع r در نقطه ی A بر خط d مماس باشد. پس شعاع این دایره در نقطه ی A بر خط d عمود است. در نتیجه این مکان در صفحه یک خط که از A می گذرد و بر خط d عمود است می باشد. توجه نقطه ی A جزء مکان نیست.

(۱۶) مکان هندسی مرکز همه ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس اند، چیست؟

جواب : دو خط راست موازی خط d ، در دو طرف آن و به فاصله r از d می باشند.

(۱۷) مکان هندسی مرکزهای دایره هایی با شعاع ثابت r' که بردایره ی $C(O, r)$ در صفحه ی این دایره مماس خارج اند، چیست؟

جواب : اگر O مرکز دایره و r شعاع آن باشد و دایره به مرکز O' و شعاع r'

در خارج دایره به مرکز O روی محیط آن بغلند آنگاه فاصله O تا O'

همواره برابر مقدار ثابت $r + r'$ می باشد.

پس مکان هندسی مرکز O' دایره ای به مرکز O و شعاع $r + r'$ می باشد.

۱۸) دو خط L و L' در نقطه O متقاطع اند، نقاطی در صفحه این دو خط مشخص کنید که از دو خط به یک فاصله و از نقطه O به فاصله R_{cm} باشد مسئله چند جواب دارد؟ ($R \neq 0$)

جواب: چون نقطه مطلوب باید از دو خط L و L' به یک فاصله باشد پس آن نقطه روی نیمسازهای زاویه های دو خط متقاطع L و L' است. از طرفی نقطه مطلوب از نقطه O به فاصله R_{cm} است لذا آن نقطه روی دایره به مرکز O و به شعاع R قرار دارد بنابراین نقطه تلاقی دایره فوق و خطوط نیمساز جواب های مسئله است. مسئله چهار جواب دارد. (رسم شکل به عهده دانش آموز)

۱۹) مکان هندسی مرکز توپی که روی یک سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم می غلتد را با رسم شکل بیابید.

جواب: مرکز توپ همواره از خط فوق به یک فاصله می باشد پس مکان هندسی مرکز توپ خطی موازی خط فوق با فاصله برابر با شعاع توپ می باشد.

۲۰) مکان هندسی مرکز دایره هایی از فضا که در یک نقطه مشخص بر یک خط داده شده مماس باشند را به کمک استدلال استقرایی حدس بزنید.

جواب: فرض کنیم دایره ای به مرکز O و به شعاع R در نقطه A بر خط L مماس باشد. پس شعاع این دایره در نقطه A بر خط L عمود است. در نتیجه این مکان در فضا یک صفحه که از A می گذرد و بر خط L عمود است می باشد. (توجه الف) نقطه A جزء مکان نیست. ب) این مکان در صفحه یک خط که از A می گذرد و بر خط L عمود است می باشد. ۲۱) جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

مکان هندسی مرکز دایره ای که در خارج یک دایره داده شده واقع است و روی محیط آن می غلتد می باشد. جواب: یک دایره

۲۲) نقاط A, B, C و D در صفحه مفروض اند. نقطه ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

جواب: عمودمنصف پاره های AB و CD را رسم نموده و آنها را به ترتیب L و L' می نامیم محل تلاقی دو خط L و L'

(در صورت وجود) جواب مسئله است.

الف: اگر دو خط L و L' موازی باشند مسئله جواب ندارد. ب: اگر دو خط L و L' متقاطع باشند مسئله فقط یک جواب دارد. ج: اگر دو خط L و L' بر هم منطبق باشند مسئله بیشمار جواب دارد.

۲۳) نقاط A, B, C در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله 3 سانتی متر باشد (بحث کنید).

جواب: مکان هندسی نقطه هایی از یک صفحه که از دو نقطه A و B به یک فاصله هستند، خط عمودمنصف پاره خط AB است، پس عمودمنصف پاره خط AB را رسم می کنیم و آن را Δ می نامیم. از طرف دیگر، مکان هندسی نقطه هایی از این صفحه که از نقطه C به فاصله 3 سانتی متر قرار دارند، دایره ای به مرکز C و به شعاع 3 سانتی متر است. این

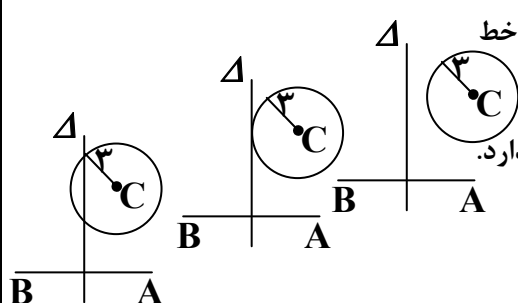
دایره را رسم می کنیم و آن را دایره $C_1(C, R)$ می نامیم. نقطه یا نقطه های برخورد خط

Δ و دایره $C_1(C, R)$ جواب مسئله اند. مسئله حداکثر دارای دو جواب است.

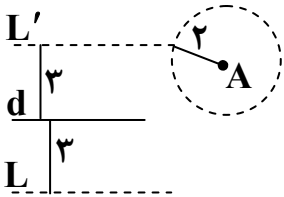
الف) اگر خط Δ و دایره $C_1(C, R)$ نقطه ای مشترک نداشته باشند مسئله جواب ندارد.

ب) اگر خط Δ بر دایره $C_1(C, R)$ مماس باشد مسئله فقط یک جواب دارد.

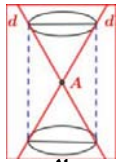
ج) اگر خط Δ و دایره $C_1(C, R)$ متقاطع باشند مسئله دو جواب دارد.



۲۴) نقطه‌ی A و خط d در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله‌ی ۲ سانتی متر و از d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید).

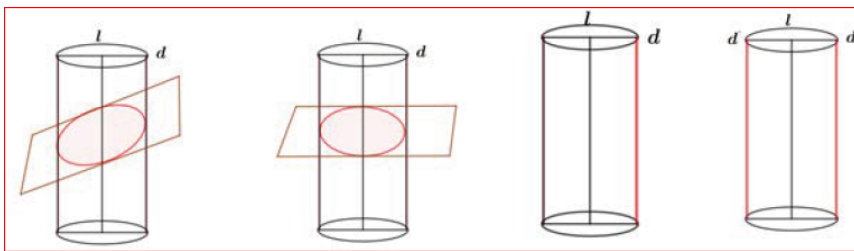


جواب: چون نقطه‌ی مطلوب از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۲ سانتی متر است لذا مکان آن دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۲ سانتی متر می باشد. از طرفی نقطه‌ی مطلوب از خط d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر است لذا مکان آن دو خط موازی L و L' و به فاصله‌ی ۳ سانتی متر از خط d می باشند، بنابراین



نقاط تلاقی دو مکان (در صورت وجود) جواب مسأله است. مسأله حداکثر ۴ جواب دارد. (رسم شکل بعهدہ دانش آموز)
۲۵) هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکلی است؟
جواب: دو خط متقاطع

۲۶) هرگاه دو خط d و L موازی باشند، از دوران d حول L سطحی ایجاد می شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می نامیم. حال فرض کنید صفحه‌ی P، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف در باره‌ی سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).



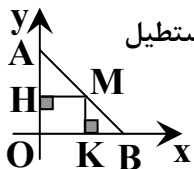
جواب: از راست حال اول: صفحه P از L بگذرد (دو خط موازی با L به فاصله شعاع استوانه از L).
حالت دوم: صفحه P بر سطح استوانه مماس باشد (یک خط به فاصله شعاع استوانه).

حالت سوم: صفحه P عمود بر محور L باشد که سطح مقطع دایره است.

حالت چهارم صفحه P با محور L متقاطع باشد ولی بر آن عمود نباشد که سطح مقطع بیضی می شود.

۲۷) مکان هندسی مجموعه‌ی نقاطی از صفحه را بیابید که مجموع فاصله‌های آنها از دو خط عمود بر هم برابر k باشد.

جواب: روش اول: هرگاه مجموع فاصله‌ی هر یک از نقاط A و B از دو محور عمود بر هم برابر ۵ باشد و M نقطه‌ای دلخواه روی AB باشد. از نقطه‌ی M عمودهای MK و MH را بر دو محور فرود می آوریم.



داریم: $MH = OK, \hat{B} = 45^\circ \Rightarrow KB = MK \Rightarrow MH + MK = OK + KB = k$ مستطیل OHMK

بنابراین مجموع فاصله‌ی هر نقطه‌ی دلخواهی روی AB از دو محور دو محور عمود بر هم برابر k است.

به همین ترتیب، مسئله سه جواب دیگر در سه ناحیه مختصاتی دیگر خواهد داشت که نهایتاً مربعی به طول قطر OA یا ۲k را می دهند.

روش دوم: فرض کنیم $M(x, y)$ نقطه‌ای از مکان باشد داریم: $|x| + |y| = k$

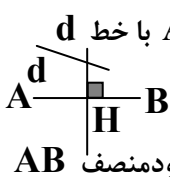
پس: $x < 0, y > 0 \Rightarrow -x + y = k$ و $x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y = k$

و $x > 0, y < 0 \Rightarrow x - y = k$ و $x < 0, y < 0 \Rightarrow -x - y = k$

با رسم نمودار معادله‌ی خطوط فوق دیده می شود که مکان هندسی مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله‌های آنها از دو خط عمود بر هم برابر k باشد، مربعی به طول قطر ۲k

۲۸) دو نقطه‌ی A و B و خط d در یک صفحه واقعند. نقطه‌ای روی خط d بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد.

آیا مسئله همواره جواب دارد؟ بحث کنید. (مسأله چند جواب دارد؟ (بحث کنید))



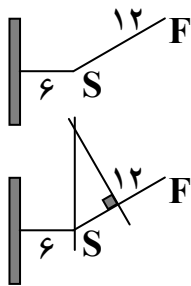
جواب: ابتدا دو نقطه‌ی A و B را به هم وصل کرده، سپس عمودمنصف آن را رسم می کنیم. محل تقاطع پاره خط AB با خط d جواب مسأله است.

۱) اگر عمودمنصف پاره خط AB بر خط d منطبق شود مسأله بیشمار جواب دارد.

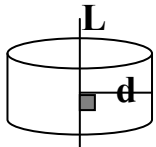
۲) اگر عمودمنصف پاره خط AB با خط d متقاطع باشد، محل تقاطع آن ها جواب مسأله است و مسأله یک جواب دارد.

۳) اگر عمودمنصف پاره خط AB با خط d موازی و غیرمنطبق بر d باشد. مسأله جواب ندارد.

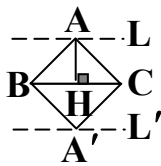
۲۹) نمودار مقابل محل قرار گرفتن ساختمان شهرداری، مجسمه S و فواره F را نشان می دهد. می خواهیم میله‌ی پرچم را در محلی نصب کنیم که از مجسمه و فواره به یک فاصله باشد و از مقابل ساختمان شهرداری به فاصله‌ی ۹ متر باشد. مکان هندسی محل نصب میله‌ی پرچم را تعیین کنید.



جواب : یک مکان هندسی نقطه‌ای که از دیواره‌ی ساختمان شهرداری به فاصله‌ی ۹ متری می باشد خطی به فاصله‌ی ۹ متر و موازی دیواره‌ی ساختمان شهرداری می باشد. در ضمن مکان هندسی دیگر نقطه‌ای که از S و F به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره خط SF می باشد این دو مکان را رسم می کنیم. نقطه‌ی تلاقی این دو مکان محل نصب میله‌ی پرچم است.



۳۰) مکان هندسی نقطه‌ای در فضا را پیدا کنید که از یک خط داده شده‌ی L به فاصله d باشد. جواب : سطح جانبی استوانه‌ای است که خط L محور تقارن آن است. به طوری که فاصله‌ی هر نقطه‌ی روی سطح از خط L برابر d باشد.



۳۱) مکان هندسی رأس‌های مثلثی‌هایی که در قاعده مشترک و مساحت برابر دارند را تعیین کنید. جواب : اگر BC قاعده‌های مثلث‌ها مشترک و مساحت آنها برابر باشند باید ارتفاع هم برابر باشد، می دانیم فاصله دو خط موازی مقداری ثابت است پس مکان هندسی رأس سوم مثلث دو خط L و L' است که موازی قاعده‌ی BC یکی بالای آن و دیگری پایین قاعده به فاصله ارتفاع قرار دارند.

۳۲) مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را پیدا کنید که از دو خط موازی به یک فاصله باشد.

جواب : این مکان، خط راستی است موازی آن دو و به یک فاصله از آنها (رسم شکل به عهده دانش آموز)

۳۳) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را بیابید که بر دو خط متوازی مماس باشند.

جواب : این مکان، خط راستی است موازی آن دو و به یک فاصله از آنها (رسم شکل به عهده دانش آموز)

۳۴) مکان هندسی وسط‌های پاره خط‌هایی را که دو سرشان روی دو خط موازی واقعند، پیدا کنید.

جواب : این مکان، خط راستی است موازی آن دو و به یک فاصله از آنها (رسم شکل به عهده دانش آموز)

۳۵) مکان هندسی نقطه‌ای در فضا را پیدا کنید که از دو صفحه موازی به یک فاصله باشد.

جواب : این مکان، صفحه‌ای است موازی آن دو صفحه و به یک فاصله از آنها (رسم شکل به عهده دانش آموز)

۳۶) دو صفحه‌ی P و Q و خط d با هم موازیند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو صفحه‌ی موازی P و Q به یک فاصله باشد و از خط موازی d به فاصله‌ی معلوم k باشد را به کمک استدلال استقرایی بیابید. (در مورد جواب‌های مسئله بحث کنید).

جواب : یک مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو صفحه‌ی موازی P و Q به یک فاصله باشد صفحه‌ای است موازی آن دو و به فاصله‌ی یکسان از آن دو. مکان هندسی دیگر نقطه‌ای در فضا که از یک خط داده شده‌ی L به فاصله k باشد. سطح جانبی استوانه‌ای است که خط L محور تقارن آن است. به طوری که فاصله‌ی هر نقطه‌ی روی سطح از خط L برابر k باشد. این دو مکان را رسم می کنیم. نقطه‌ی تلاقی این دو مکان جواب مسئله است. بحث : الف : اگر این دو مکان نقطه‌ی مشترک نداشته باشند مسئله جواب ندارد. ب : اگر این دو مکان بر هم مماس باشند مکان نقاط واقع بر یک خط می باشد. ج : اگر این دو مکان متقاطع باشند مکان نقاط واقع بر دو خط موازی است. (رسم شکل به عهده دانش آموز)

۳۷) دایره مکان هندسی چه نقطه‌ای از صفحه است.

جواب : دایره مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه است که از یک نقطه ثابت داده شده در آن صفحه به فاصله‌ی معین باشد. (رسم شکل به عهده دانش آموز)

۳۸) مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از نقطه ثابتی واقع در آن صفحه به فاصله ثابتی است چیست؟

جواب : یک دایره است که آن نقطه ثابت، مرکز و آن مقدار ثابت، شعاع دایره نامیده می شوند. مانند دایره (C) به مرکز O و به شعاع R ، که به صورت $C(O, R)$ نمایش داده می شود. (رسم شکل به عهده دانش آموز)

۳۹) مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از نقطه ثابتی واقع در آن به فاصله ثابتی است چیست؟

جواب : یک کره است که آن نقطه ثابت، مرکز و آن مقدار ثابت، شعاع کره نامیده می شوند. (رسم شکل به عهده دانش آموز)

(۴۰) مکان هندسی مرکز دایره هایی که از دو نقطه‌ی متمایز A و B واقع در یک صفحه می‌گذرند چیست؟

جواب: از دو نقطه‌ی متمایز A و B در صفحه بیشمار دایره می‌گذرد که مرکز این دایره‌ها از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله‌اند.

در نتیجه مکان هندسی مورد مرکز دایره‌ها، خط عمودمنصف پاره خط AB می‌باشد. (رسم شکل به عهده دانش آموز)

(۴۱) سه نقطه متمایز A ، B و C در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که از دو نقطه‌ی B و C به یک

فاصله و از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم R باشد.

جواب: مکان هندسی نقطه‌هایی از یک صفحه که از دو نقطه B و C به یک فاصله هستند، خط عمودمنصف پاره خط BC است، پس عمودمنصف پاره خط BC را رسم می‌کنیم و آن را Δ می‌نامیم. از طرف دیگر، مکان هندسی نقطه‌هایی از این صفحه که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی R قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R است. این دایره را $C(A, R)$ می‌نامیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد خط Δ و دایره $C(A, R)$ جواب مسئله‌اند. به تعداد

نقطه‌های برخورد این دو، مسئله دارای جواب است.

(۴۲) مکان هندسی مرکز دایره‌ای را تعیین کنید که در نقطه مشخص A بر یک خط داده شده مماس باشد و این دایره از نقطه‌ی ثابت

B خارج آن خط بگذرد.

جواب: مکان هندسی مرکز دایره‌ای که در نقطه مشخص A بر خط L مماس باشد روی خطی مانند L' که در نقطه‌ی A بر L عمود است قرار دارد آن را رسم می‌کنیم. هم چنین مکان هندسی مرکز دایره‌ای که از نقطه‌های A و B بگذرد روی خط عمودمنصف پاره خط AB است آن را رسم می‌کنیم محل برخورد این دو مکان (در صورت وجود) نقطه‌ی مطلوب است.

(۴۳) با استفاده از خط کش و پرگار مربعی رسم کنید که پاره خط مفروض DE قطر آن باشد. (روش رسم را توضیح دهید.) (مراحل

رسم را توضیح دهید.)

جواب: ابتدا عمودمنصف پاره خط DE را رسم می‌کنیم سپس به مرکز O (وسط DE) و به شعاع DO یک دایره رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با عمودمنصف را A و B می‌نامیم. چهارضلعی $ADBE$ مربع مورد نظر است. (رسم شکل به عهده دانش آموز)

(۴۴) در یک صفحه دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی متر از هم قرار دارند. فقط یک نقطه مانند M در صفحه وجود دارد که

به فاصله‌ی ۳ سانتی متر از A و m سانتی متر از B قرار دارند. مقدار m کدام است؟

جواب: مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۳ سانتی متر هستند، دایره‌ای به مرکز A با شعاع ۳ سانتی متر می‌باشد. مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی B به فاصله‌ی m سانتی متر هستند، دایره‌ای به مرکز B با شعاع m سانتی متر می‌باشد.

نقطه‌ی مشترک دو دایره‌ی جواب مسأله است. برای اینکه مسأله فقط یک جواب داشته باشد به دست می‌آوریم:

حالت اول: دو دایره مماس خارج باشند. $AM + MB = AB \Rightarrow 3 + m = 4 \Rightarrow m = 1$

حالت دوم: دو دایره مماس داخل باشند. $BM - AM = AB \Rightarrow m - 3 = 4 \Rightarrow m = 7$

(۴۵) در یک صفحه دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی متر از هم قرار دارند. دو نقطه‌ی M و M' در صفحه وجود دارد که به

فاصله‌ی ۳ سانتی متر از A و m سانتی متر از B قرار دارند. چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟

جواب: مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۳ سانتی متر هستند، دایره‌ای به مرکز A با شعاع ۳ سانتی متر می‌باشد. مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی B به فاصله‌ی m سانتی متر هستند، دایره‌ای به مرکز B با شعاع m سانتی متر می‌باشد.

نقاط مشترک دو دایره‌ی جواب مسأله است. محدوددهی M را برای اینکه مسأله دو جواب داشته باشد به دست می‌آوریم:

$$BM - AM < AB < BM + AM \Rightarrow m - 3 < 4 < m + 3$$

$$\Rightarrow 1 < m < 7 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 4 \text{ یا } 5 \text{ یا } 6$$

۴۶) مکان هندسی نقطه ای در فضا که از دو صفحه موازی M و R به یک فاصله باشد و از نقطه ثابت P ، به فاصله d باشد را به کمک استدلال استقرایی بیابید.

جواب: یک مکان هندسی نقطه ای که از دو صفحه موازی M و R به یک فاصله باشد صفحه ای است موازی آن دو و به فاصله یکسان از آن دو. مکان هندسی دیگر نقاطی که از نقطه ثابت P ، به فاصله d باشد سطح کره ای به مرکز P و به شعاع d است. این دو مکان را رسم می کنیم. نقطه ای تلاقی این دو مکان جواب مسئله است. (رسم شکل به عهده دانش آموز)

۴۷) نقطه ای ثابت A رأس مثلث هایی مانند ABC است که اندازه ی ضلع AC در آن ها همواره ثابت است. مکان هندسی نقطه ای M وسط ضلع کدام است؟

جواب: دایره ای به مرکز A و شعاع نصف AC (رسم شکل به عهده دانش آموز)

۴۸) معادله دایره ای به مرکز $O'(3,1)$ و شعاع ۴ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم به دست آورید.

حل: به کمک دستور بالا معادله ی استاندارد دایره ی فوق نوشته می شود: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$
اگر در این معادله، $y = -x$ قرار دهیم، نقاط برخورد دایره با نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم به دست می آید:

$$(x-3)^2 + (-x-1)^2 = 16 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 3$$

لذا دایره فوق نیمساز ناحیه ی اول و سوم را در نقاط $A(-1,1)$ و $B(3,-3)$ قطع می کند.

۴۹) تحقیق کنید رابطه $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ معادله یک دایره است سپس مختصات مرکز و شعاع آن را یافته و نمودار آن را رسم کنید.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \Rightarrow C(1,-2) \text{ و } R=2$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = a^2 + b^2 - 4c = 4 + 16 - 4 = 16 > 0$$

$$C(\alpha = -\frac{a}{2} = 1, \beta = -\frac{b}{2} = -2) \text{ و } R = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{16} = 2$$

۵۰) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(-1,-2)$ بوده و از نقطه $(2,3)$ بگذرد.

$$R = \sqrt{(2+1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{34} \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 34 \text{ (۰/۲۵)}$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \text{ (۰/۲۵)} \xrightarrow{C(-1,-2)} (x+1)^2 + (y+2)^2 = R^2$$

$$\xrightarrow{\text{از نقطه (۲,۳) می گذرد}} 3^2 + 5^2 = R^2 \Rightarrow R^2 = 34 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 34 \text{ (۰/۲۵)}$$

۵۱) معادله ی دایره ای را بنویسید که از نقطه ی $(1,-1)$ بگذرد و خطوط $y = x + 1$ و $y = 1 - x$ شامل دو قطر آن باشند.

جواب: محل برخورد دو قطر مرکز دایره است.

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ و } O(0,1) \text{ و } R = OA = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$$

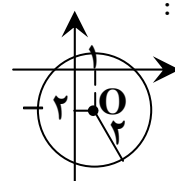
۵۲) معادله دایره ای را بنویسید که نقاط $A(-2,5)$ و $B(4,-3)$ دو سر قطری از آن باشد.

$$C(\frac{-2+4}{2}, \frac{5+(-3)}{2}) = (1,1) \text{ و } R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2 + (-3-5)^2} = 5$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$$

۵۳) معادله دایره ای را بنویسید که معادله قطرهای آن به صورت $2m(x+y) + 2mx + (m-1)y = 0$ بوده و شعاعش برابر ۳ باشد.

جواب: روش اول: به m دو مقدار دلخواه نسبت می دهیم تا معادله ی دو قطر دایره حاصل شود، محل برخورد این دو قطر، مرکز دایره



رسم شکل

$$\begin{cases} m = 0 \Rightarrow -y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ m = 1 \Rightarrow 2x + 2y + 2x = 0 \xrightarrow{y=0} x = 0 \end{cases} \Rightarrow O(0,0) \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2$$

می باشد.

$$2m(x+y) + 2mx + (m-1)y = 0 \Rightarrow (2x+y)m - y = 0$$

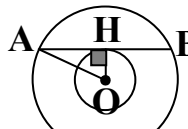
روش دوم:

$$\begin{cases} 2x + 0 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ -y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow O(0,0) \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2$$

در صورتی که این رابطه مستقل از m باشد می توان نوشت:

(۵۴) دو دایره‌ی به معادله های $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ مفروض اند. اندازه‌ی وتر از دایره‌ی بزرگتر که بر دایره‌ی کوچکتر مماس است کدام است؟

جواب:

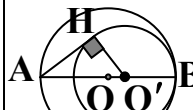


$$O = O' = (2, -1) \text{ و } R = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4 + 80} = 5 \text{ و } R' = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4 + 16} = 3$$

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow AH = 4 \Rightarrow AB = 8$$

(۵۵) دو دایره‌ی به معادله های $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ و $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$ مفروض اند. اندازه بزرگترین قطعه مماسی که یک سر آن بر روی دایره بزرگتر و سر دیگر آن قطعه‌ی تماس بر روی دایره کوچکتر باشد، را بیابید.

جواب:



$$O = (4, 3) \text{ و } R = \frac{1}{2} \sqrt{64 + 36 - 36} = 4 \text{ و } O' = (3, 3) \text{ و } R' = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 36 - 36} = 3$$

$$OO' = 1 \text{ و } AO' = 4 + 1 = 5 \text{ و } \Delta AHO': AH^2 = AO'^2 - O'H^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow AH = 4$$

(۵۶) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن روی خط $y = x + 3$ بوده و در نقطه ای به عرض ۲ بر محور y ها مماس گردد.

جواب:

$$y = 2 \Rightarrow 2 = x + 3 \Rightarrow x = -1 \text{ و } O(-1, 2) \text{ و } R = |\alpha| = 1 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

(۵۷) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن روی خط $x = y + 2$ بوده و در نقطه ای به طول ۵ بر محور طول ها مماس باشد.

جواب:

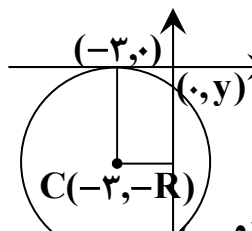
$$W(\alpha, \beta = \alpha - 2) \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow \beta = \alpha - 2 = r \text{ (۰/۲۵)} \text{ و } \alpha = 5 \Rightarrow \beta = 5 - 2 = 3 \text{ (۰/۲۵)} = r$$

$$\Rightarrow (x-5)^2 + (y-3)^2 = 9 \text{ (۰/۲۵)}$$

(۵۸) دایره ای بر دو نقطه‌ی $(0, -9)$ و $(-3, 0)$ گذشته و بر محور x ها مماس است. این دایره محور y ها را در نقطه‌ی دیگر، با کدام عرض قطع می کند؟

جواب: روش اول: مرکز دایره در ناحیه سوم و قدرمطلق عرض مرکز در این حالت برابر شعاع دایره است و معادله‌ی دایره به صورت

زیر است:



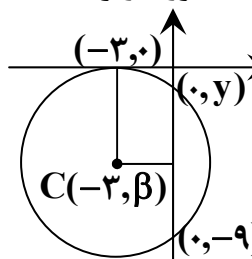
$$C: (x+3)^2 + (y+R)^2 = R^2 \xrightarrow{(0, -9) \in C} (0+3)^2 + (-9+R)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow 9 + 81 - 18R + R^2 = R^2 \Rightarrow R = 5 \Rightarrow (x+3)^2 + (y+5)^2 = 25$$

بنابراین محل تقاطع با محور y ها برابر است با:

$$x = 0 \Rightarrow (0+3)^2 + (y+5)^2 = 25 \Rightarrow (y+5)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} y+5 = 4 \Rightarrow y = -1 \\ y+5 = -4 \Rightarrow y = -9 \end{cases}$$

روش دوم: مرکز دایره در ناحیه سوم و قدرمطلق عرض مرکز در این حالت برابر شعاع دایره است و معادله‌ی دایره به صورت زیر است:



$$C: (x+3)^2 + (y-\beta)^2 = \beta^2 \xrightarrow{(0, -9) \in C} (0+3)^2 + (-9-\beta)^2 = \beta^2 \Rightarrow \beta = -5$$

$$\beta = \frac{-9+y}{2} = -5 \Rightarrow y = -1$$

۵۹) دو دایره از نقطه $(۴, ۲)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس اند. قطر دایره بزرگتر کدام است؟

جواب: چون نقطه $(۴, ۲)$ در ناحیه اول است پس مرکز دایره روی خط $y = x$ (نیمساز ناحیه اول) قرار دارد یعنی $C(r, r)$ پس:

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \xrightarrow{(۴, ۲)} (۴-r)^2 + (۲-r)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 12r + 20 = 0$$

$$\Rightarrow (r-۲)(r-10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r=۲ \Rightarrow d=۴ \\ r=10 \Rightarrow d=۲0 \end{cases}$$

۶۰) معادله دایره ای را بنویسید که مرکزش روی خط $y = ۳x + ۴$ و در ربع سوم بر هر دو محور مماس باشد.

جواب: چون دایره در ربع سوم بر هر دو محور مماس است پس مرکز دایره بر روی خط $y = x$ واقع است. از طرفی مرکز دایره روی

خط $y = ۳x + ۴$ نیز می باشد پس: $x = y = -۲$ و در نتیجه: $O(-۲, -۲)$ و $R = |-۲| = ۲$ لذا معادله دایره به صورت زیر

$$(x+۲)^2 + (y+۲)^2 = ۲^2 \Rightarrow x^2 + 4x + y^2 + 4y + 4 = 0$$

خواهد بود.

۶۱) معادله دایره ای را بنویسید که نقطه $O(۲, -۱)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله $۴x + ۳y + ۵ = 0$ مماس باشد.

جواب: روش اول: خط مماس بر شعاع دایره در نقطه تماس با آن عمود است

لذا فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر شعاع دایره است.

$$4x + 3y + 5 = 0$$

$$C(\alpha, \beta) \Rightarrow r = OH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow r = \frac{|4 \times 2 + 3(-1) + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = 2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

روش دوم: نقطه تلاقی خط مماس را با خطی که از نقطه O بر خط مماس عمود باشد را بدست می آوریم

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \Rightarrow m = -\frac{4}{3} \Rightarrow m' = -\frac{1}{m} = \frac{3}{4} \Rightarrow y+1 = \frac{3}{4}(x-2) \Rightarrow 3x - 4y - 10 = 0$$

$$\begin{cases} 4x + 3y + 5 = 0 \\ 3x - 4y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -\frac{11}{5} \end{cases}$$

$$R = \sqrt{\left(2 - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(-1 + \frac{11}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{64 + 36}{25}} = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

۶۲) شعاع دایره ای را بیابید که مرکز آن بر روی نیمساز ناحیه دوم واقع شده و از نقطه $A(-۲, -۱)$ گذشته و بر خط به معادله

$y = ۲x$ مماس شود.

جواب: چون مرکز دایره بر روی نیمساز ناحیه دوم یعنی خط $y = -x$ واقع است پس مختصات مرکز این دایره به صورت $\alpha < 0$ و

$O(\alpha, -\alpha)$ می باشد. بدیهی است که شعاع دایره برابر فاصله مرکز دایره از نقطه $A(-۲, -۱)$ و همچنین برابر فاصله مرکز

دایره از خط مماس $y = ۲x$ می باشد.

$$\sqrt{(-2-\alpha)^2 + (-1+\alpha)^2} = \frac{|2\alpha + \alpha|}{\sqrt{4+1}} \Rightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha + 5 = \frac{9\alpha^2}{5} \Rightarrow \alpha^2 + 10\alpha + 25 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha+5)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = -5 \Rightarrow R = \frac{|3\alpha|}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

۶۳) به ازای کدام مقدار m خط به معادله $y = mx + 1$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ مماس است؟

$$C(1, -2) \text{ و } R = \frac{1}{2}\sqrt{4+6-4 \times 0} = \sqrt{5} \text{ و } y = mx + 1 \Rightarrow mx - y + 1 = 0$$

جواب: روش اول:

$$R = \frac{|m+2+1|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow m^2 + 6m + 9 = 5m^2 + 5 \Rightarrow 4m^2 - 6m - 4 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{8} = 2 \text{ یا } m = -\frac{1}{2}$$

روش دوم: $y = mx + 1 \Rightarrow x^2 + (mx+1)^2 - 2x + 4mx + 4 = 0 \Rightarrow (m^2+1)x^2 + (6m-2)x + 5 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (6m-2)^2 - 20(m^2+1) = 0 \Rightarrow 16m^2 - 24m - 16 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 6m - 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{10} = 2 \text{ یا } m = -\frac{1}{2}$$

(۶۴) معادله دایره ای را بنویسید که معادله قطرهای آن به صورت $(m+2)x + (m-1)y = 3$ بوده و بر خط $2x - 4y = -13$ مماس باشد.

جواب: $\begin{cases} m=1 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=1.5 \\ m=-2 \Rightarrow -3y=3 \Rightarrow y=-1 \end{cases} \Rightarrow O(1.5, -1) \text{ و } R = \frac{|3+4+13|}{\sqrt{9+16}} = 4 \text{ و } (x-1.5)^2 + (y+1)^2 = 16$

(۶۵) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(-4, 2)$ بوده و بر خط $2x - 6 = 0$ مماس باشد.

جواب: روش اول: نقطه تلاقی خط مماس را با خطی که از نقطه O بر خط مماس عمود باشد را بدست می آوریم

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ و } m' = 0 \Rightarrow y = 2 \xrightarrow{2x-6=0} A(3, 2) \Rightarrow$$

$$R = \sqrt{(3+4)^2 + (2-2)^2} = 7 \Rightarrow (x+4)^2 + (y-2)^2 = 49$$

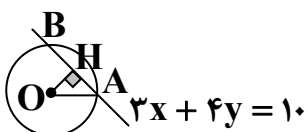
روش دوم: $2x - 6 = 0 \Rightarrow R = \frac{|-8+0-6|}{\sqrt{4+0}} = 7 \Rightarrow (x+4)^2 + (y-2)^2 = 49$

روش سوم: $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 = a \text{ و } r = |\alpha - a| = |-4 - 3| = 7 \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (\alpha - a)^2$

$$\Rightarrow (x+4)^2 + (y-2)^2 = 49$$

(۶۶) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(1, -2)$ بوده و روی خط به معادله $3x + 4y = 10$ وتری به طول ۸ جدا کند.

(راهنمایی: می دانیم که عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر رسم شود آن وتر را نصف می کند.)



جواب: $AB = 8 \Rightarrow BH = 4 \text{ و } OH = \frac{|3-8-10|}{\sqrt{9+16}} = 3 \Rightarrow$

$$r^2 = OH^2 + BH^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

(۶۷) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(1, 3)$ بوده و بر دایره به معادله $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ مماس

بیرونی باشد.

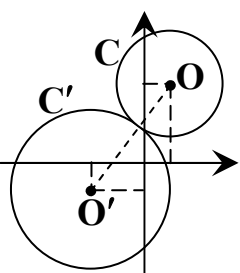
حل: مختصات مرکز و شعاع دایره فوق را به دست می آوریم:

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 9 \Rightarrow O'(-2, -1) \text{ و } r' = 3$$

و خط الکرکزین دو دایره ی مماس خارج برابر است با:

$$d = OO' = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

بنابراین داریم:

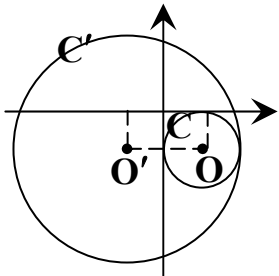


$$d = r + r' = 5 \Rightarrow r + 3 = 5 \Rightarrow r = 2$$

و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره ی (C) را می نویسیم :

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$$

۶۸) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه ی $O(1, -1)$ بوده و بر دایره به معادله ی $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$ مماس درونی باشد.



حل : مختصات مرکز و شعاع دایره فوق را به دست می آوریم :

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9 \Rightarrow O'(-1, -1) \text{ و } r' = 3$$

$$d = OO' = |r - r'|$$

و خط ال مرکزین دو دایره ی مماس داخل برابر است با :

$$d = OO' = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1+1)^2} = 2$$

بنابراین داریم :

$$d = |r - r'| = 2 \Rightarrow |r - 3| = 2 \Rightarrow r - 3 = \pm 2 \Rightarrow r = 5 \text{ یا } r = 1$$

و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره ی (C) را می نویسیم :

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25 \text{ یا } (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$$

۶۹) وضعیت هر یک از جفت دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ و $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0$

ب) $x^2 + y^2 - 2x = 1$ و $x^2 + y^2 = 1$

ج) $x^2 + y^2 = 9$ و $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

د) $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$

(راهنمایی : مختصات مرکز و طول شعاع های هر دو دایره را به دست آورده و پس از تعیین طول خط ال مرکزین از اطلاعات خود از هندسه ۲ استفاده کنید.)

جواب : الف) روش اول :

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16 \Rightarrow O(2, 3) \text{ و } r = 4$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 + (y-7)^2 = 1 \Rightarrow O'(5, 7) \text{ و } r' = 1$$

$$OO' = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = 5 \Rightarrow OO' = r + r' = 5 \Rightarrow$$

دو دایره مماس بیرونی اند.

روش دوم :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0 \end{cases} \xrightarrow{-} 6x + 8y - 76 = 0 \Rightarrow y = \frac{-3x}{4} + \frac{19}{2}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \\ y = \frac{-3x}{4} + \frac{19}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{-3x}{4} + \frac{19}{2}\right)^2 - 4x - 6\left(\frac{-3x}{4} + \frac{19}{2}\right) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{57x}{4} + \frac{361}{4} - 4x + \frac{9x}{2} - 57 - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\times 16} 25x^2 - 228x + 1444 - 64x + 72x - 960 = 0$$

$$\Rightarrow 25x^2 - 220x - 484 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 48400 + 48400 = 0$$

دو دایره مماس اند.

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{220}{50} = 4.4 \Rightarrow y = \frac{-3 \times 55}{4} + \frac{19}{2} = \frac{-165 + 38}{4} = -\frac{127}{4} \Rightarrow M(4.4, -\frac{127}{4}) \text{ (اضافی) نقطه‌ی تماس}$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow O(1,0) \text{ و } r = \sqrt{2} \text{ (ب) روش اول:}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow O'(0,0) \text{ و } r' = 1$$

$$OO' = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1 \text{ و } r - r' = \sqrt{2} - 1 \text{ و } r + r' = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow r - r' < OO' < r + r' \Rightarrow$$

دو دایره متقاطع اند.

روش دوم: معادله دو دایره را در یک دستگاه حل می کنیم.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{-} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow (0,1) \text{ و } (0,-1)$$

دو دایره متقاطع اند.

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow O(0,0) \text{ و } r = 3$$

(ج)

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \Rightarrow O'(1,-1) \text{ و } r' = 1$$

$$OO' = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2} \text{ و } r - r' = 3 - \sqrt{2} \Rightarrow OO' < r - r' \Rightarrow \text{دو دایره متداخل اند.}$$

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow O(0,0) \text{ و } r = 2$$

(د)

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 = 1 \Rightarrow O'(4,2) \text{ و } r' = 1$$

$$OO' = \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow OO' > r + r' \Rightarrow \text{دو دایره متخارج اند.}$$

(۷۰) اندازه مماس مشترک خارجی و داخلی دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 8y = 32$ و $(x-7)^2 + (y-4)^2 = 1$ را بیابید.

جواب: نقاط $O(1,-4)$ و $O'(7,4)$ مراکز دو دایره و $R = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 64 + 128} = 7$ و $R' = 1$ شعاع های دو دایره و

$$OO' = \sqrt{(7-1)^2 + (4+4)^2} = 10 \text{ خط المرکزین این دو دایره می باشند. بنابراین:}$$

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ اندازه مماس مشترک خارجی}$$

$$EE' = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2} = \sqrt{100 - 64} = 6 \text{ و اندازه مماس مشترک داخلی}$$

(۷۱) معادله خطی که در نقطه $A(a,b)$ واقع بر دایره $x^2 + y^2 = R^2$ بر این دایره مماس باشد، به صورت $ax + by = R^2$ می باشد.

جواب: روش اول: مرکز دایره نقطه‌ی $O(0,0)$ و نقطه‌ی $A(a,b)$ روی دایره می باشد



پس: $m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{b}{a}$ و $a^2 + b^2 = R^2$ چون خط مماس در نقطه A بر شعاع دایره عمود است پس

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{a}{b} \text{ حال معادله خطی را می نویسیم که از نقطه } A \text{ گذشته و دارای شیب } -\frac{a}{b} \text{ باشد.}$$

$$y - y_O = m'(x - x_O) \Rightarrow y - b = \frac{-a}{b}(x - a) \Rightarrow ax + by = a^2 + b^2 \Rightarrow ax + by = R^2$$

روش دوم: اگر $M(x, y)$ نقطه‌ی دلخواهی روی خط مماس باشد داریم: $\vec{OA} \perp \vec{AM}$ و $\vec{OA}(a, b)$ و $\vec{AM}(x - a, y - b)$

$$\Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{AM} = 0 \Rightarrow ax - a^2 + by + b^2 = 0 \Rightarrow ax + by = a^2 + b^2 \xrightarrow{a^2 + b^2 = R^2} ax + by = R^2$$

روش سوم: اگر $M(x, y)$ نقطه‌ی دلخواهی روی خط مماس باشد داریم: چون $\vec{OA} \perp \vec{AM}$ پس:

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2$$

$$\Rightarrow 2ax + 2by = 2(a^2 + b^2) = 2R^2 \Rightarrow ax + by = R^2$$

(۷۲) در نقطه‌ی $A(-1, -1)$ روی دایره‌ی $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید.

حل: روش اول: با توجه به اینکه شعاع دایره در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس عمود است. با تعیین مختصات مرکز دایره شیب $\vec{OA}$ را تعیین می‌کنیم و از آنجا شیب مماس را به دست آورده و معادله آن را تعیین می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9 \Rightarrow O(2, -1)$$

$$m_{OA} = \frac{-1 + 1}{2 + 1} = 0 \Rightarrow m_d = \infty \Rightarrow x + 1 = 0 \text{ معادله مماس}$$

$$x_1x + y_1y + \frac{a}{2}(x + x_1) + \frac{b}{2}(y + y_1) + c = 0$$

روش دوم:

$$\Rightarrow -x - y + \frac{(-4)}{2}(x - 1) + \frac{2}{2}(y - 1) - 4 = 0 \Rightarrow -3x - 3 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$$

(۷۳) معادله دایره‌ای که از نقاط $A(2, 3)$ و $B(-2, 1)$ بگذرد و مرکزش روی خط $x - y = 1$ باشد بیابید.

جواب: روش اول: توجه کنید که قطر هر دایره از مرکز آن می‌گذرد، پس مرکز این دایره روی خط به معادله‌ی $x - y = 1$ قرار دارد. در نتیجه می‌توانیم مختصات مرکز آن را به صورت $C(\alpha + 1, \alpha)$ در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی مرکز دایره از هر نقطه‌ی دلخواه واقع بر آن، برابر با شعاع دایره است. چون دو نقطه‌ی $A(2, 3)$ و $B(-2, 1)$ بر این دایره واقع اند. پس:

$$R = CA = CB \Rightarrow \sqrt{(\alpha + 1 - 2)^2 + (\alpha - 3)^2} = \sqrt{(\alpha + 1 + 2)^2 + (\alpha - 1)^2}$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)^2 + (\alpha - 3)^2 = (\alpha + 3)^2 + (\alpha - 1)^2 \Rightarrow -12\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow O(1, 0)$$

$$\Rightarrow R = CA = \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 10$$

روش دوم: معادله‌ی ضمنی دایره را می‌نویسیم:

از طرفی قطر هر دایره از مرکز آن می‌گذرد، پس مختصات مرکز دایره در معادله‌ی قطر دایره صدق می‌کند. لذا داریم:

$$C(\alpha = -\frac{a}{2}, \beta = -\frac{b}{2}) \text{ و } x - y = 1 \Rightarrow -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 1 \Rightarrow -a + b = 2 \quad (1)$$

$$\begin{cases} A(2, 3) \Rightarrow 4 + 9 + 2a + 3b + c = 0 \quad (2) \\ B(-2, 1) \Rightarrow 4 + 1 - 2a + b + c = 0 \quad (3) \end{cases} \xrightarrow{(2) - (3)} 4a + 2b + 8 = 0 \Rightarrow 2a - b = -4 \quad (4)$$

$$(1), (4) \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a - b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases} \xrightarrow{(3)} c = -9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$$

روش سوم: اگر دایره از دو نقطه‌ی $A(2, 3)$ و $B(-2, 1)$ عبور کند، عمودمنصف پاره خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند، از مرکز دایره عبور می‌کند. لذا کافی است عمودمنصف پاره خط AB را نوشته با خط داده شده، یعنی $x - y = 1$ قطع دهیم. مرکز

دایره حاصل می گردد. $y - 2 = -2x \Rightarrow 2x + y = 2$ و $M(0, 2)$ و $m' = -\frac{1}{m_{AB}} = -2$ و $m_{AB} = \frac{3-1}{2+2} = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow C \begin{cases} \alpha = x = 1 \\ \beta = y = 0 \end{cases} \Rightarrow R = CA = \sqrt{(1-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 10$$

(۷۴) به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a ، منحنی به معادله‌ی $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 2ax + 4y + 4a = 0$ یک دایره است؟

جواب: برای اینکه معادله‌ی مقطع مخروطی $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 2ax + 4y - 4a = 0$ معادله‌ی دایره باشد، باید ابتدا ضرایب

x^2 و y^2 را برابر قرار دهیم: $a^2 - 7 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$ حال با جایگذاری $a = \pm 3$ در معادله، آن را به شکل

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ تبدیل و شرط } \Delta_0 = a^2 + b^2 - 4c \text{ را کنترل می کنیم:}$$

اگر $a = 3$ باشد داریم:

$$2x^2 + 2y^2 + 6x + 4y - 12 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 3x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow \Delta_0 = 4 + 9 + 24 > 0$$

اگر $a = -3$ باشد داریم:

$$2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 12 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 - 3x + 2y + 6 = 0 \Rightarrow \Delta_0 = 4 + 9 - 24 < 0$$

پس $a = 3$ قابل قبول و $a = -3$ غیرقابل قبول است.

(۷۵) وضعیت هر یک از نقاط $A(-1, -1)$ و $B(1, -2)$ و $C(2, 3)$ و $D(4, -1)$ را نسبت به دایره

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0 \text{ تعیین کنید.}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 10 \Rightarrow O(1, -2) \text{ و } r = \sqrt{10} \text{ جواب:}$$

$$OA = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow OA < r \Rightarrow \text{نقطه‌ی } A(-1, -1) \text{ درون دایره است.}$$

$$OB = \sqrt{(1-1)^2 + (-2+2)^2} = 0 \Rightarrow \text{نقطه‌ی } B(1, -2) \text{ درون دایره و مرکز آن است.}$$

$$OC = \sqrt{(2-1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{26} \Rightarrow OC > r \Rightarrow \text{نقطه‌ی } C(2, 3) \text{ بیرون دایره است.}$$

$$OD = \sqrt{(4-1)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow OD = r \Rightarrow \text{نقطه‌ی } D(4, -1) \text{ روی دایره است.}$$

(۷۶) طول قطعه مماسی که از نقطه‌ی $A(1, 3)$ بر دایره‌ی به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$ رسم شود را بیابید.

$$C(3, -4) \text{ و } R = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 64 + 12} = \sqrt{28} \text{ جواب: روش اول:}$$

$$CA = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53} \text{ و } AT^2 = CA^2 - R^2 = 53 - 28 = 25 \Rightarrow AT = 5$$

$$\text{طول مماس} = AT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 + 4y_1 + 3} = \sqrt{1 + 9 - 6 + 24 - 3} = 5 \text{ روش دوم:}$$

لازم به ذکر است دانش آموزان عزیز مجاز به بکارگیری روش دوم در امتحانات خرداد ماه نمی باشند.

(۷۷) طول کوتاهترین وتری از دایره‌ی $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 24 = 0$ که از نقطه‌ی $A(1, 1)$ می گذرد را بیابید.

$$C(3, 4) \text{ و } R = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 64 + 96} = 7 \text{ و } CA = \sqrt{(1-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{13} \text{ جواب: روش اول:}$$

$$\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = R^2 - CA^2 = 49 - 13 = 36 \Rightarrow BC^2 = 144 \Rightarrow BC = 12$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 8y - 24 \Rightarrow -\frac{BC^2}{4} = 1 + 1 - 6 - 8 - 24 \Rightarrow BC = 12$$

روش دوم :

لازم به ذکر است دانش آموزان عزیز مجاز به بکارگیری روش دوم در امتحانات خرداد ماه نمی باشند.

۷۸) وضعیت هر یک از جفت دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 - 2x = 4$

ب) $x^2 + (y-1)^2 = 1$ و $(x-1)^2 + y^2 = 1$

ج) $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 5 = 0$

د) $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

جواب : الف) $OO' = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1$ و $r' = \sqrt{5}$ و $O'(1,0)$ و $r = 2$ و $(x-1)^2 + y^2 = 5 \Rightarrow$

$r + r' = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow |r - r'| < OO' < r + r' \Rightarrow$ دو دایره متقاطع اند. $O(0,0)$

ب) $|r - r'| = \sqrt{5} - 2$ و $O'(1,0)$ و $r = 1$ و $OO' = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$ و $r' = 1$

دو دایره متقاطع اند.

ج) $|r - r'| = 0$ و $r + r' = 2 \Rightarrow |r - r'| < OO' < r + r' \Rightarrow$

$O(0,0)$ و $r = 2$ و $(x - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 + (y - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 = 4 \Rightarrow O'(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$

$OO' = \sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 0)^2 + (\frac{3\sqrt{2}}{2} - 0)^2} = 3$ و $|r - r'| = 0$

دو دایره مماس برون اند. $r + r' = 4 \Rightarrow OO' = r + r' \Rightarrow$ د) $r + r' = 4 \Rightarrow OO' = r + r' \Rightarrow$

$O(0,0)$ و $r = 1$ و $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow O'(3,1)$ و

دایره متخارج اند. $|r - r'| = 0$ و $r + r' = 2 \Rightarrow OO' > r + r' \Rightarrow$

۷۹) نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادله ی دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید.

سپس معادله ی مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

جواب : روش اول : مثلث ABC در راس C قائمه است (چرا؟ زیرا $AB^2 + AC^2 = BC^2$ و یا رسم شکل) بنابراین مرکز این

دایره نقطه وسط وتر یعنی $W(1,-1)$ و شعاع آن نصف اندازه وتر یعنی $R = \frac{\sqrt{0+16}}{2} = 2$ است.

لذا معادله دایره به صورت $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

روش دوم : برای بدست آوردن دایره محیطی مثلث بهتر است از معادله ضمنی دایره استفاده کنیم.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ \begin{cases} 1+1-a-b+c=0 \\ 1+1+a+b+c=0 \\ 1+9+a-3b+c=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \\ c=-2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

روش سوم : نقطه ی وسط AB : $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}) = (0,0)$

و شیب AB : $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2}{2} = 1$ شیب عمود منصف AB : $m' = -1$

معادله ی عمود منصف AB : $y + 0 = -(x - 0) \Rightarrow x + y = 0$

و نقطه ی وسط CB : $N(\frac{x_C + x_B}{2}, \frac{y_C + y_B}{2}) = (1, -1)$

و شیب CB : $m_{CB} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-4}{0} = \infty$ شیب عمود منصف CB : $m' = 0$

معادله ی عمود منصف CB : $y + 1 = 0(x - 1) \Rightarrow y = -1$ و نقطه ی برخورد دو عمود منصف : $W(1, -1)$ و شعاع

$R = WA = \sqrt{4 + 0} = 2$ لذا معادله دایره به صورت $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ می باشد.

معادله ی مماس بر این دایره را در رأس B : $m_{WB} = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow m'_{\text{مماس}} = 0 \Rightarrow y = 1$

۸۰) وضعیت هریک از خطوط و دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید: $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ و $3x + 4y = 0$ (الف)

(ب) $x + y = 2$ و $x^2 + y^2 = 2$

(ج) $x + y = 1$ و $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$

جواب : (الف) روش اول : از معادله ی خط $y = -\frac{3}{4}x$ ، را در معادله ی دایره جایگزین می کنیم (با این کار در صورت برخورد خط و

دایره، مختصات نقطه های برخورد از معادله حاصل به دست می آید.) :

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0 \Rightarrow x^2 + (-\frac{3}{4}x)^2 - 4x - 4(-\frac{3}{4}x) + 7 = 0 \Rightarrow 25x^2 - 16x + 112 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 256 - 11200 = -10944 < 0 \Rightarrow$$

معادله ی فوق ریشه حقیقی ندارد و در نتیجه خط و دایره نقطه برخوردی ندارند.

روش دوم : $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1 \Rightarrow O(2, 2)$ و $r = 1$

خط و دایره نقطه برخوردی ندارند. $d = OH = \frac{|3 \times 2 + 4 \times 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{14}{5} > r \Rightarrow$

(ب) روش اول : از معادله ی خط $y = 2 - x$ ، را در معادله ی دایره جایگزین می کنیم (با این کار در صورت برخورد خط و دایره، مختصات نقطه های برخورد از معادله حاصل به دست می آید.) :

$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow x^2 + (2 - x)^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0$$

معادله ی فوق ریشه مضاعف دارد و در نتیجه خط و دایره بر هم مماس اند. $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0 \Rightarrow$

روش دوم : $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow O(0, 0)$ و $r = \sqrt{2}$

خط و دایره بر هم مماس اند. $d = OH = \frac{|0 + 0 - 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2} = r \Rightarrow$

(ج) روش اول : از معادله ی خط $y = 1 - x$ ، را در معادله ی دایره جایگزین می کنیم (با این کار در صورت برخورد خط و دایره، مختصات نقطه های برخورد از معادله حاصل به دست می آید.) :

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2 \Rightarrow x^2 + (1 - x)^2 - 2x - 2(1 - x) = 2 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0$$

معادله ی فوق دو ریشه حقیقی دارد و در نتیجه خط و دایره متقاطع اند. $\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 24 = 28 > 0 \Rightarrow$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \Rightarrow O(1,1) \text{ و } r=2$$

روش دوم:

$$d = OH = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < r \Rightarrow$$

خط و دایره نقطه متقاطع اند.

(۸۱) مکان هندسی نقاطی مانند $P(x,y)$ را پیدا کنید که فاصله آنها از نقطه $A(-6,4)$ ، $\sqrt{2}$ برابر فاصله آنها از نقطه $B(-3,2)$ باشد.

جواب:

$$P(x,y) \text{ و } A(-6,4) \text{ و } B(-3,2) \text{ و } PA = \sqrt{2}PB \Rightarrow \sqrt{(x+6)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} \\ \Rightarrow (x+6)^2 + (y-4)^2 = 2[(x+3)^2 + (y-2)^2] \Rightarrow \dots \Rightarrow x^2 + y^2 = 26$$

مکان دایره به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{26}$

$$(x+6)^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{2}R)^2 = 2R^2 \Rightarrow (x+6)^2 + (y-4)^2 = 2R^2 \quad (1)$$

روش دوم:

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = R^2 \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 12x - 8y + 26 = x^2 + y^2 + 12x - 8y + 26 \Rightarrow x^2 + y^2 = 26$$

بنابراین مکان دایره به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{26}$

(۸۲) از نقطه $(5,0)$ دو مماس بر دایره $x^2 + y^2 = 5$ رسم می کنیم تا بدایره در نقاط A و B مماس شوند مختصات A و B را پیدا کنید.

$$M(5,0) \text{ و } O(0,0) \text{ و } A(x,y) \Rightarrow x^2 + y^2 = 5 \text{ و } OA(x,y) \text{ و } MA(x-5,y)$$

جواب: روش اول:

$$OA \cdot MA = x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Rightarrow x(x-5) + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + y^2 = 0 \Rightarrow 5 - 5x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$1 + y^2 = 5 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow A(1,2) \text{ و } B(1,-2)$$

$$M(5,0) \text{ و } MA = \sqrt{C(x_1,y_1)} = \sqrt{25 + 0 - 5} = \sqrt{20} \Rightarrow (x-5)^2 + (y-0)^2 = 20 \Rightarrow$$

روش دوم:

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 20 \xrightarrow{x^2 + y^2 = 5} 5 - 10x + 25 = 20 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$$

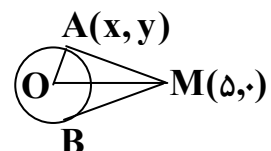
$$1 + y^2 = 5 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow A(1,2) \text{ و } B(1,-2)$$

$$(x=a, y=\pm\sqrt{5-a^2}) \Rightarrow y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x}{2y} \Rightarrow m = \frac{-a}{\pm\sqrt{5-a^2}} \Rightarrow$$

روش سوم:

$$y - (\pm)\sqrt{5-a^2} = \frac{-a}{\pm\sqrt{5-a^2}}(x-a) \xrightarrow{(5,0)} 0 - (\pm)\sqrt{5-a^2} = \frac{-a}{\pm\sqrt{5-a^2}}(5-a) \Rightarrow$$

$$-5 + a^2 = -5a + a^2 \Rightarrow -5 = -5a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow A(1,2) \text{ و } B(1,-2)$$



$$OA^2 + MA^2 = MO^2 \Rightarrow 5 + (x-5)^2 + y^2 = (5-0)^2 + (0-0)^2 \xrightarrow{x^2 + y^2 = 5} 5 + 5 - 10x + 25 = 25 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1^2 + y^2 = 5 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow A(1,2) \text{ و } B(1,-2)$$

روش چهارم:

$$5 + 5 - 10x + 25 = 25 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1^2 + y^2 = 5 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow A(1,2) \text{ و } B(1,-2)$$

$$\cos \hat{AOM} = \frac{R}{OM} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (1) \text{ و } \cos \hat{AOM} = \frac{x}{R} = \frac{x}{\sqrt{5}} \quad (2) \xrightarrow{1,2} \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{x}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = 1$$

روش پنجم:

$$1 + y^2 = 5 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow A(1,2) \text{ و } B(1,-2)$$