



بسمه تعالی

# تقسیم و بخش پذیری

حسابان ۲



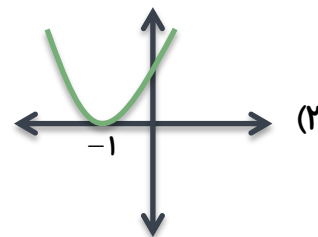
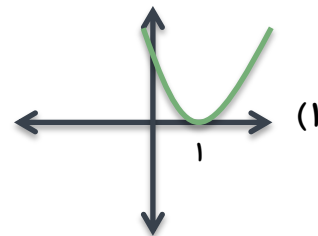
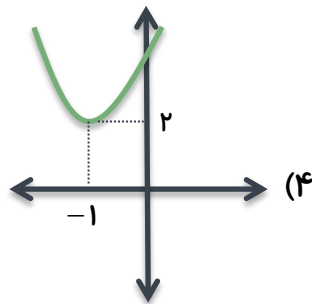
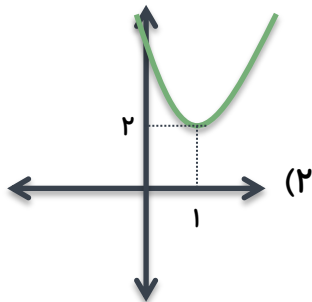
# یادآوری

توابع یکنوا و اکیدا یکنوا

تابع درجه سوم و ویژگی های آن



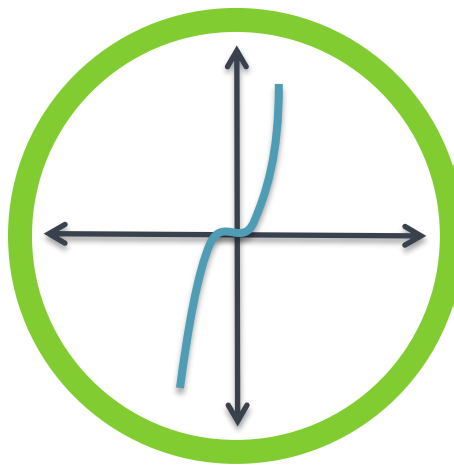
تست ۱ (یادآوری): نمودار تابع  $f(x) = |(x-1)^3| + 2$  کدام است؟



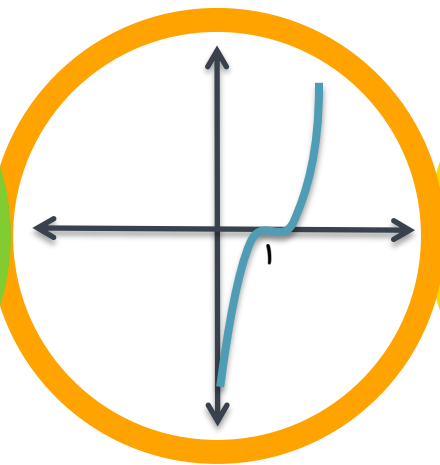
زیر محور  $y$  ها را حذف  
قرینه ی آن را با تابع اضافه می کنیم

۲ واحد به سمت بالا

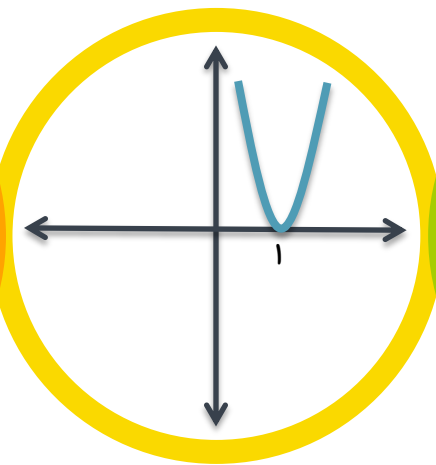
یک واحد به سمت راست



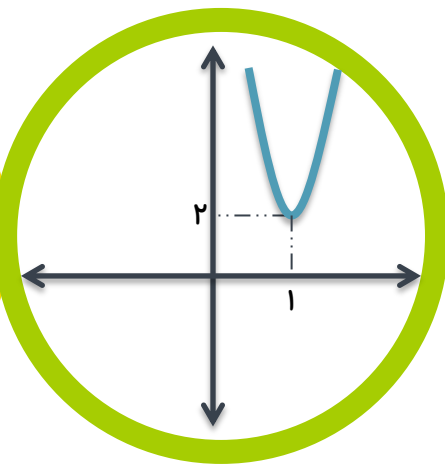
$$y = x^3$$



$$y = (x - 1)^3$$



$$y = |(x - 1)^3|$$



$$y = |(x - 1)^3| + 2$$

# تقسیم و بخش پذیری

صورت کلی قضیه تقسیم برای چند جمله ای ها :

$$f(x) = P(x)Q(x) + R(x)$$

Diagram illustrating the division of a polynomial  $f(x)$  by a polynomial  $P(x)$  to yield a quotient  $Q(x)$  and a remainder  $R(x)$ .

The diagram shows the equation  $f(x) = P(x)Q(x) + R(x)$  with color-coded terms and arrows indicating their roles:

- $f(x)$  (brown) is the dividend (مقسوم).
- $P(x)$  (red) is the divisor (مقسوم علیه).
- $Q(x)$  (blue) is the quotient (خارج قسمت).
- $R(x)$  (green) is the remainder (باقی مانده).

Below the equation, a vertical line separates the terms into two groups:

- Left group:  $f(x)$  and  $P(x)$ .
- Right group:  $Q(x)$  and  $R(x)$ .

The vertical line is labeled with a colon ( $:$ ) on the left and a horizontal line on the right, indicating the division operation.

## نکات مربوط به باقی مانده $(R(x))$

در عبارت  $f(x) = P(x)Q(x) + R(x)$ :

همواره درجه ی  $R(x)$  از  $P(x)$  کوچکتر است. 

اگر  $R(x) = 0$  آنگاه  $f(x)$  بر  $P(x)$  بخش پذیر است. 

باقی مانده تقسیم چند جمله ای  $f(x)$  بر  $\underbrace{ax+b}_{P(x)}$  برابر  $f(-\frac{b}{a})$  می باشد. 



**تست ۲:** باقیمانده تقسیم چند جمله ای  $P(x)$  بر  $x - 2$  و  $x + 3$  به ترتیب  $-1$  و  $4$  است. باقیمانده

تقسیم  $P(x)$  بر  $x^2 + x - 6$  کدام است؟

$$2x - 1 \quad (4)$$

$$-x + 2 \quad (3)$$

$$x + 1 \quad (2)$$

$$x - 1 \quad (1)$$

چون درجه عبارت مقسوم علیه ما  $(x^2 + x - 6)$  می باشد پس درجه ی باقی مانده ی ما حداکثر ۱ می باشد یعنی:



$$R(x) = ax + b$$

$$f(x) = (x^2 + x - 6)Q(x) + ax + b \rightarrow \begin{cases} x - 2: f(2) = 1 \rightarrow 2a + b = 1 \\ x + 4: f(-3) = -4 \rightarrow -3a + b = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$R(x) = x - 1$$





**تست ۳:** چند جمله ای  $P(X) = (X^2 - 2)^n + (X - X^3 - 1)^{n-1}$  بر چند تا از عبارت های زیر قطعا بخش پذیر است؟

الف)  $X - 1$

ب)  $X + 1$

پ)  $X + 2$

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

بررسی گزینه ها:

$$\text{الف) } X = 1 \rightarrow P(1) = (1)^2 - 2^n + (1 - (1)^3 - 1)^{n-1} = (-1)^n + (-1)^{n-1}$$

$n$  و  $n-1$  دو عدد پشت سر هم بوده و قطعاً یکی از این دو زوج است در نتیجه یک جمله توان زوج داشته و مثبت شده



(+1) و دیگری به توان فرد رسیده و منفی باقی می ماند (-1) در نتیجه مجموع آن ها صفر و بخش پذیر است.

$$\text{ب) } X = -1 \rightarrow P(-1) = ((-1))^2 - 2^n + ((-1) - (-1)^3 - 1)^{n-1} = (-1)^n + (-1)^{n-1}$$



به همان شیوه ی بالا اثبات می شود!

$$\text{پ) } X = -2 \rightarrow P(X) = ((-2))^2 - 2^n + ((-2) - (-2)^3 - 1)^{n-1} = (2)^n + (5)^{n-1}$$



## تجزیه عبارات خاص

$$۱) x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + a x^{n-2} + \dots + a^{n-2} x + a^{n-1})$$

(به ازای تمامی مقادیر  $n$ )

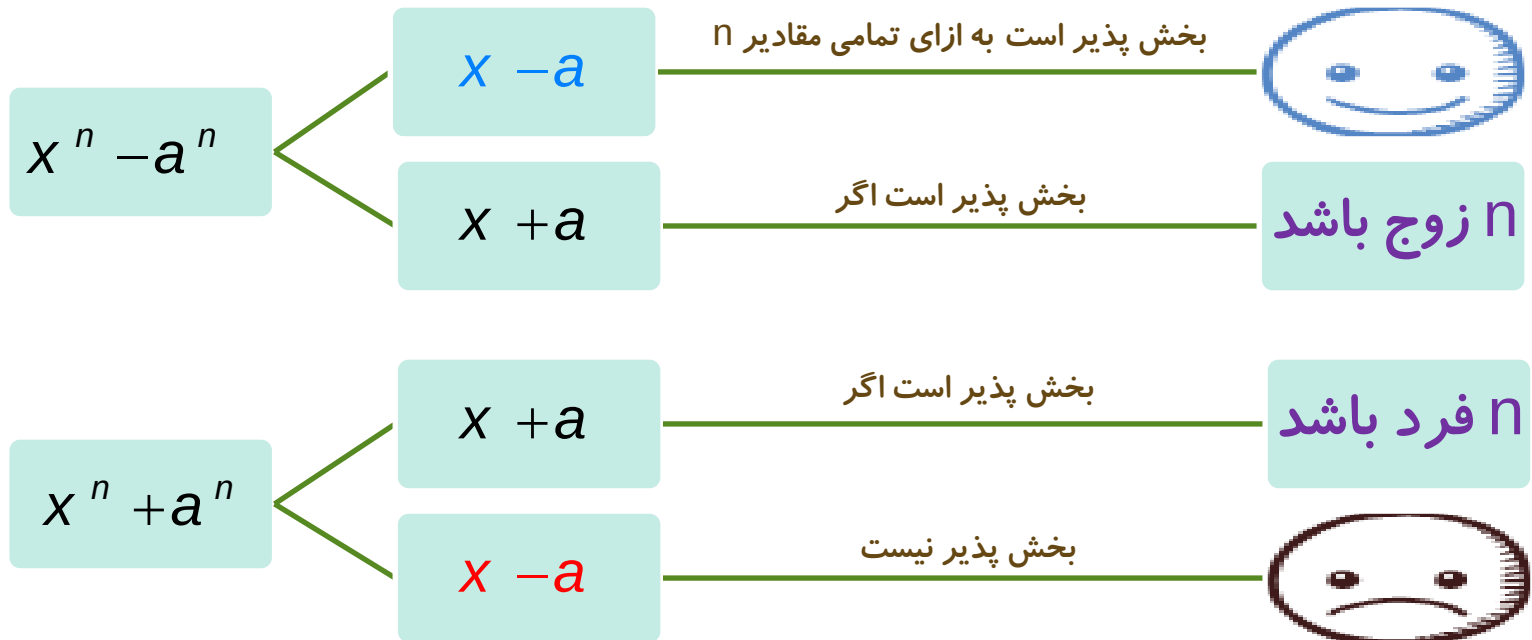
$$۲) x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - a x^{n-2} + \dots + \oplus a^{n-2} x \ominus a^{n-1})$$

(به ازای  $n$  های زوج)

$$۳) x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - a x^{n-2} + \dots \ominus a^{n-2} x \oplus a^{n-1})$$

(به ازای  $n$  های فرد)

## نکات بخش پذیری مربوط به اسلاید قبل





تست ۴:

مجموع جواب های معادله ی  $\frac{1-x+x^2-\dots+x^6-x^7+x^8}{1-x^3+x^6}=5$  کدام است؟

(۱) -۱

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) -۲

طبق نکته گفته شده داریم:

$$\begin{cases} (1+x^9) = (1+x)(1-x+x^2-\dots+x^6-x^7+x^8) \rightarrow 1-x+x^2-\dots+x^6-x^7+x^8 = \frac{1+x^9}{1+x} \\ (1+x^9) = (1+x^3)(1-x^3+x^6) \rightarrow 1-x^3+x^6 = \frac{1+x^9}{1+x^3} \end{cases}$$

$$\frac{1-x+x^2-\dots+x^6-x^7+x^8}{1-x^3+x^6} = \frac{\frac{1+x^9}{1+x}}{\frac{1+x^9}{1+x^3}} = \frac{1+x^3}{1+x} = 1-x+x^2 = 5$$

$$\rightarrow x^2 - x - 5 = 0 \rightarrow S = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-1}{1}\right) = +1$$

## توجه:

یکی دیگر از روش هایی که برای پیدا کردن باقی مانده تقسیم به کار میرود (به ویژه برای معادلاتی که مقسوم علیه آن درجه دوم باشد) به صورت زیر است:

\*بر خلاف روش های قبلی ما معادله ی مقسوم علیه  $ax^2 + bx + c = 0$  را حل نمی کنیم ولی با جابجا کردن جملات در طرفین

تساوی می توان با جایگذاری در معادله اصلی به نتایج جالبی برسیم!

$$\text{مثال: } ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{bx + c}{a} \\ ax^2 + bx = -c \\ \vdots \end{cases}$$

→ (نیاز به حفظ کردن نمی باشد)



تست ۵:

اگر عبارت  $-a + 10x - 14x^2 + 4x^3 + ax^4$  بر سه جمله ای  $x^2 - 2x + 1$  بخش پذیر

باشد  $a$  کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)



$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x + 1 &= 0 \rightarrow x^2 = 2x - 1 \\
 \rightarrow ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a \\
 &= ax^2 + 4x^2 - 14x + 10 - a \\
 &= ax(2x - 1) + 4(2x - 1) - 14x + 10 - a \\
 &= 2ax^2 - ax + 8x - 4 - 14x + 10 - a \\
 &= 2a(2x - 1) + (-a - 6)x + 6 - a \\
 &= (3a - 6)x + 6 - 3a
 \end{aligned}$$

چون بخش پذیر است پس باقی مانده ی ما باید **صفر** باشد یعنی:  $P(x^2 - 2x + 1) = 0$

$$\rightarrow 3a - 6 = 0 \rightarrow \boxed{a = 2}$$