



بسمه تعالی

حسابان ۲

پایه ی دوازدهم ریاضی و فیزیک

فصل اول: تابع

درس دوم

تابع درجه سوم

توابع چند جمله ای از درجه n

هر تابع بصورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ که در آن n عددی

صحیح و نامنفی (حسابی) است و a_n و a_{n-1} و $\dots$ و a_2 و a_1 و a_0 اعداد حقیقی اند ($a_n \neq 0$) را یک

تابع چند جمله ای از درجه n می نامیم. * منظور از درجه بزرگترین توان x است *

* دامنه هر تابع چند جمله ای مجموعه اعداد حقیقی است. (مگر اینکه دامنه را محدود کرده باشیم)

* در توابع چند جمله ای رادیکال، قدرمطلق، جزء صحیح، عامل مثلثاتی، لگاریتمی و ... وجود ندارند

برای مثال توابع زیر چند جمله ای نیستند

$$1) f(x) = 3x^{-2} + 2x^{-1} + 5$$

$$2) f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

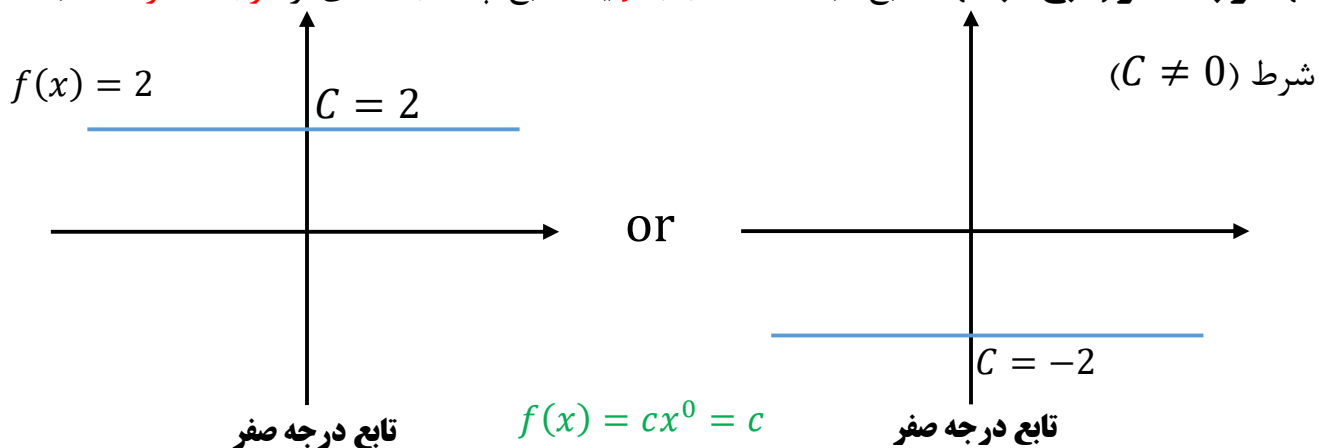
$$3) f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} = (x^2 + x + 1)^{-1}$$

$$4) f(x) = \sin x$$

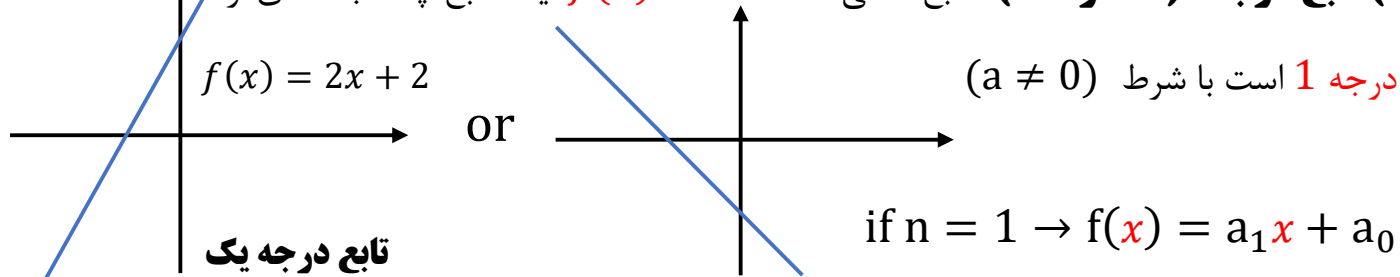
معرفی چند تابع معروف:

چند نمونه مهم از تابع هایی که تا به حال با آنها آشنا شده ایم عبارتند از:

۱) **درجه صفر (تابع ثابت):** تابع ثابت $f(x) = C$ یک تابع چند جمله ای از **درجه صفر** است با

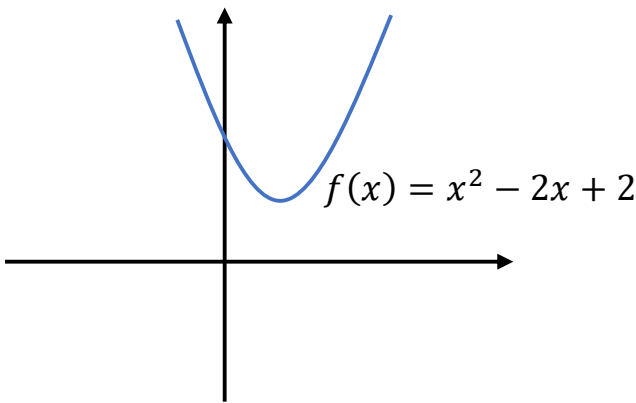


۲) **تابع درجه ۱ (خط راست):** تابع خطی $f(x) = ax + b$ یک تابع چند جمله ای از



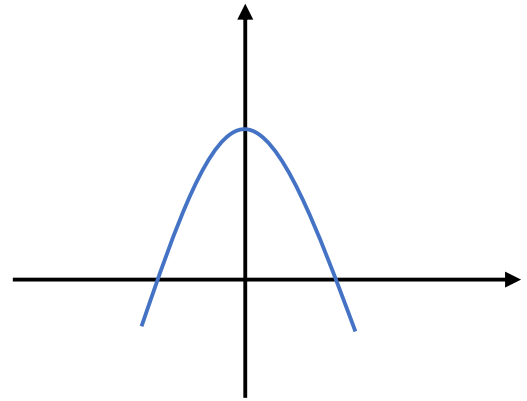
(۳) تابع درجه ۲ (سهمی): سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، یک تابع چند جمله ای از درجه ۲ است

با شرط $(a \neq 0)$ $if\ n = 2 \rightarrow f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$



تابع درجه دو

or



تابع درجه دو

(۳) تابع درجه ۳: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ یک تابع چند جمله ای از درجه ۳ است با

شرط $(a \neq 0)$ $if\ n = 3 \rightarrow f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

***تذکر:** برای تابع ثابت $f(x) = 0$ (محور x ها)، درجه تعریف نمی شود.

کاردر کلاس

در زیر چند تابع چند جمله ای نوشته شده اند، درجه هر کدام را مشخص کنید؟

تابع ثابت و غیر صفر است، پس درجه آن صفر است. 1) $f(x) = 5 = 5x^0$

درجه ۱ 3) $g(x) = 2x - 3$ درجه ۳ 2) $h(x) = x^3 + x - 4$

درجه ۲ 5) $n(x) = (x - 1)^2 + 3$ درجه ۴ 4) $m(x) = 2x - x^4$

ابتدا چند جمله ای را ساده و مرتب می کنیم: 6) $p(x) = x^2(1 - x)^3$

چند جمله ای از درجه ۵ است. $p(x) = x^2(1 - 3x + 3x^2 - x^3) = x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5 \xrightarrow{\text{مرتب}} -x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x^2$

ابتدا چند جمله ای را ساده و مرتب می کنیم 7) $q(x) = x^2 - x(x + 2) + 2x$

بدون درجه $q(x) = x^2 - x^2 - 2x + 2x = 0 \rightarrow q(x) = 0$

تذکر ۱: حاصل جمع، تفریق یا ضرب توابع چند جمله ای نیز یک تابع چند جمله ای خواهد بود.

تذکر ۲: اگر یک چند جمله ای از درجه n را به توان طبیعی m برسانیم، حاصل یک چند جمله ای از درجه $m \times n$ خواهد بود.

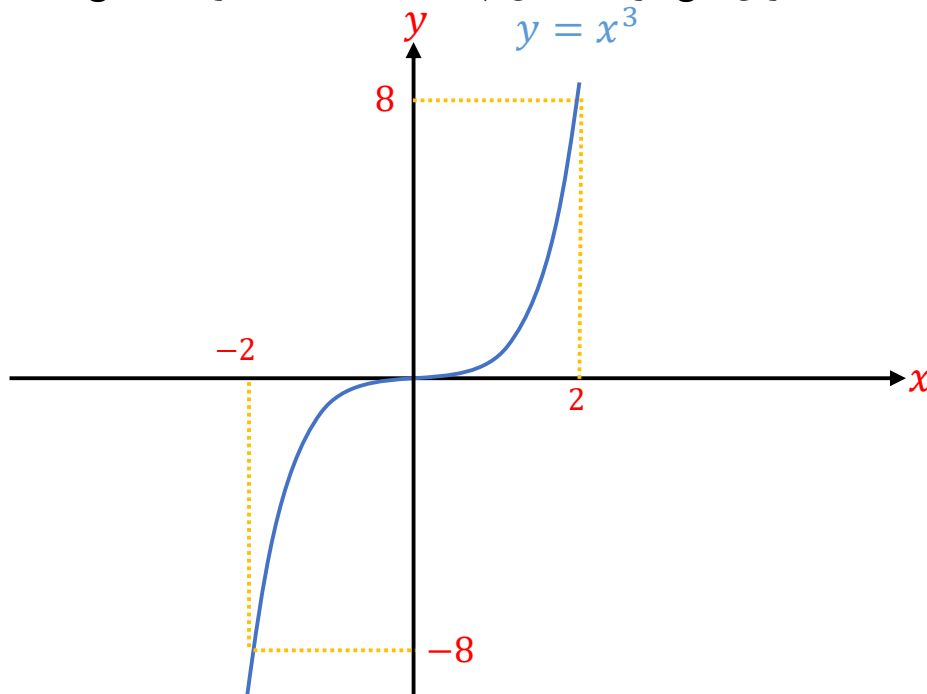
تذکره ۳: اگر درجه چند جمله ای $p(x)$ برابر n و درجه چند جمله ای $q(x)$ برابر m باشد، آنگاه درجه

چند جمله ای $p(x) \times q(x)$ برابر است با: $m + n$

رسم تابع درجه سوم $f(x) = x^3$ با دامنه R :

الف) ساده ترین تابع درجه ۳ بین چند جمله ای های درجه ۳ تابع $y = x^3$ است نمودار آن را رسم کنید؟

x	y
2	8
1	1
0	0
-1	-1
-2	-8

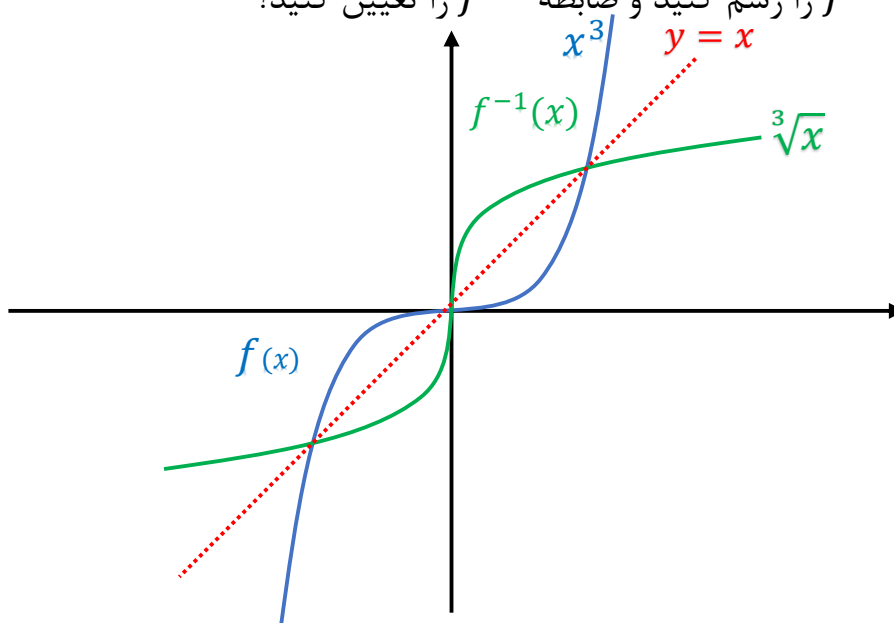


$$D_f = R_f = R$$

ب) به کمک نمودار رسم شده برای تابع $f(x) = x^3$ نشان دهید که این تابع وارون پذیر است؟

حل: همان طور که می بینیم این تابع یک به یک است (هر خط موازی محور x ها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع می کند) بنابراین وارون پذیر است.

ج) نمودار تابع f^{-1} را رسم کنید و ضابطه f^{-1} را تعیین کنید؟



ضابطه وارون (f^{-1}) برابر:

$$y = x^3 \xRightarrow{x \text{ بر حسب } y} \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^3} \rightarrow x = \sqrt[3]{y} \xRightarrow{\text{جای } x \text{ ولا عوض می کنیم}} y = \sqrt[3]{x} \text{ or } f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

نکته: نمودار نسبت به مبدا مختصات متقارن است پس داریم:

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{or} \quad f(x) + f(-x) = 0$$

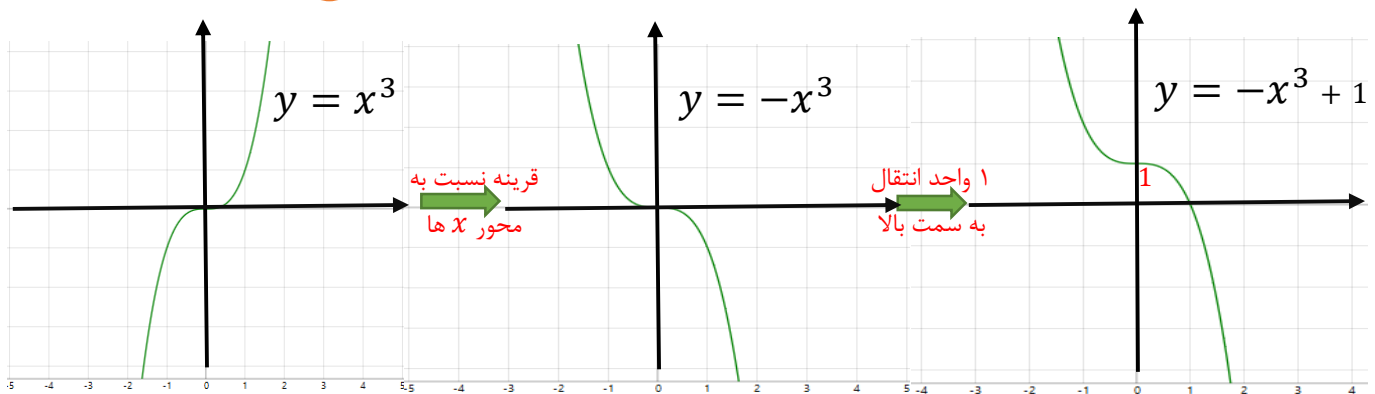
تذکره: با استفاده از خواص انتقال در حالت کلی می توانیم نمودار توابعی به صورت $y = k(x - a)^3 + b$

($k \neq 0$) و a و b اعداد حقیقی را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنیم.

کاردکلاس

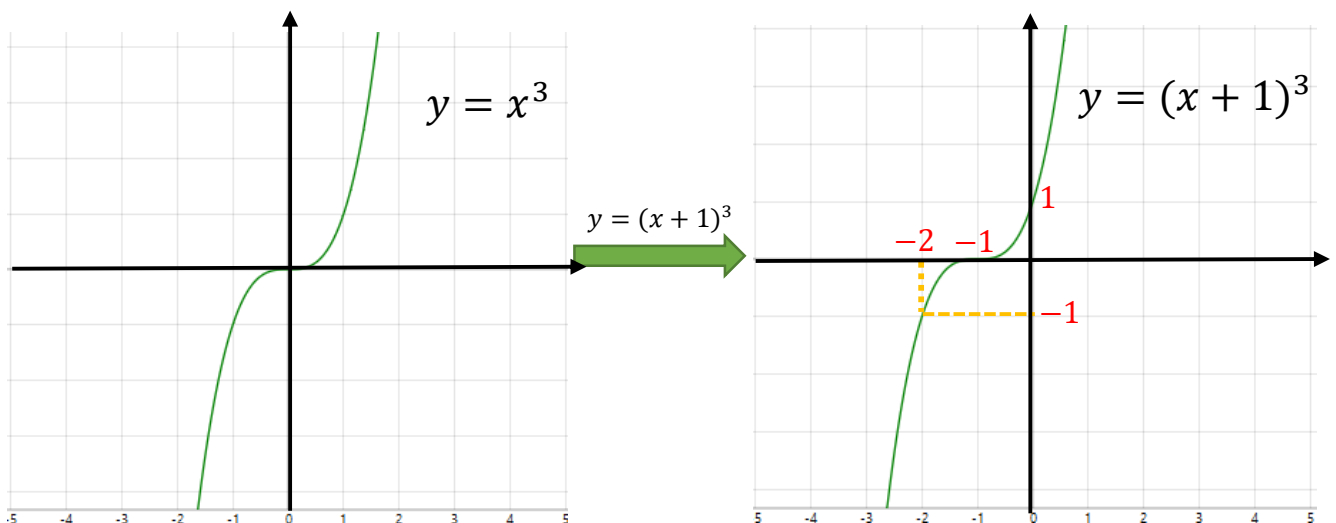
هر یک از توابع زیر را با کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید. (انتقال مختص y)

الف) $y = -x^3 + 1$



ب) $y = (x + 1)^3$

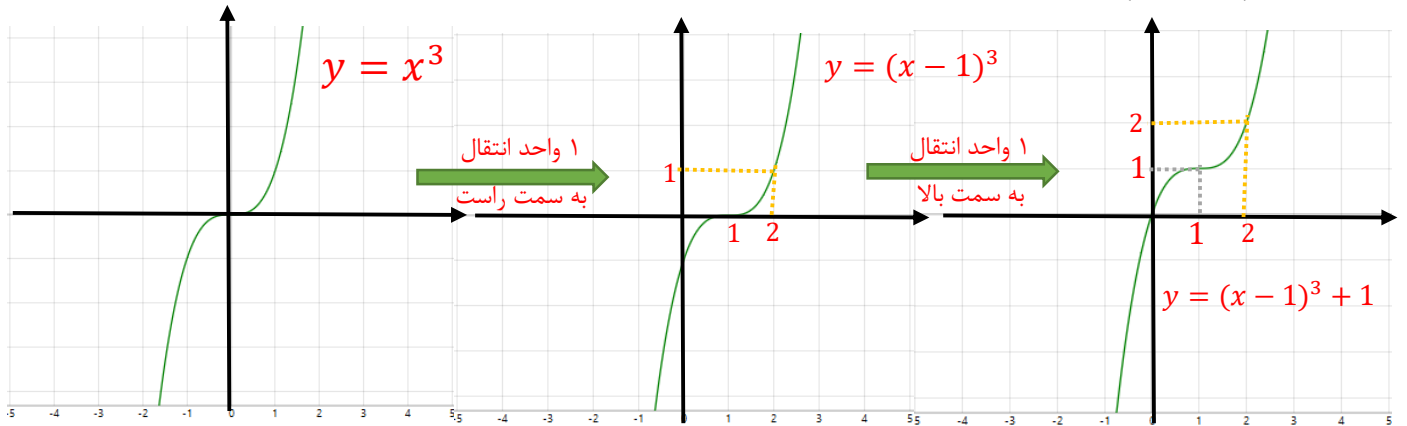
این تابع همان $y = x^3$ است که یک واحد به سمت چپ منتقل شده است (انتقال مختص x)



پ) $y = x^2(x - 3) + 3x$

درضابطه فقط فقط باید x دیده شود

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 \rightarrow y = (x - 1)^3 + 1$$



تمرین ۱:

تابع های خواسته شده را رسم کنید .

1) $f(x) = -2(x - 2)^3$

2) $g(x) = 2x^3 + 1$

3) $h(x) = 1 - (x + 3)^3$

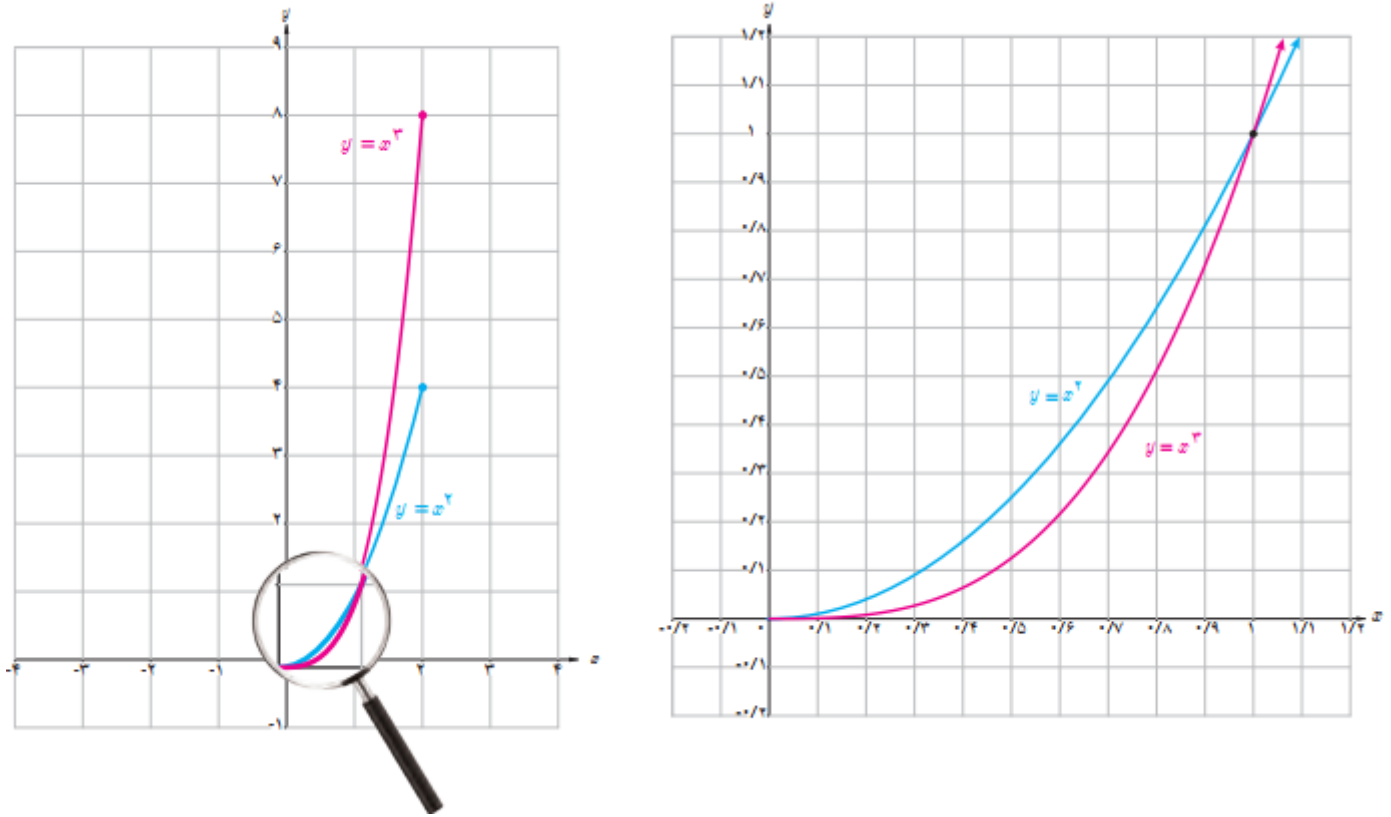
4) $k(x) = -x^3 - 2$

$q(x) = x^2(x - 6) + 4(3x - 1)$

$p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$

مثال ۲: نمودار هر یک از توابع $y = x$ و $y = x^2$ و $y = x^3$ را در یک دستگاه مختصات در فاصله $[0, 2]$ رسم کنید؟ سپس بیان کنید در فاصله $[0, 1]$ ، نمودار کدام تابع پایین تر و نمودار کدام تابع بالاتر است؟ در فاصله $[1, 2]$ چطور؟

حل :



همان طور که از نمودار پیداست، در فاصله $(0 و 1)$ تابع $y = x$ از همه بالاتر، سپس $y = x^2$ و در آخر $y = x^3$ از همه پایین تر است ولی در فاصله $(1 و 2)$ این ترتیب برعکس می شود یعنی نمودار $y = x$ از همه پایین تر سپس $y = x^2$ و در آخر $y = x^3$ از همه بالاتر است. توجه کنید که برای دو نقطه $x = 0$ و $x = 1$ هر سه توابع مقدار یکسانی دارند (باهم برابرند)

(۱) می دانیم برای $x > 1$ هر چه مقدار n بیشتر شود، حاصل x^n بیشتر می شود (هر چه توان طبیعی x بیشتر حاصل عددی بیشتر)، پس برای x های بزرگتر از یک داریم: $x^3 > x^2 > x$

(۲) در $x = 1$ مقدار x و x^2 و x^3 مساوی ۱ است پس هر سه نمودار از نقطه $(1 و 1)$ می گذرند

(۳) برای $0 < x < 1$ هر چه مقدار n بیشتر شود حاصل x^n کوچکتر می شود. پس برای x های بین صفر و یک داریم: $x^3 < x^2 < x$

(۴) در $x = 0$ مقدار x و x^2 و x^3 مساوی صفر است پس هر سه نمودار از نقطه $(0 و 0)$ خواهند گذشت

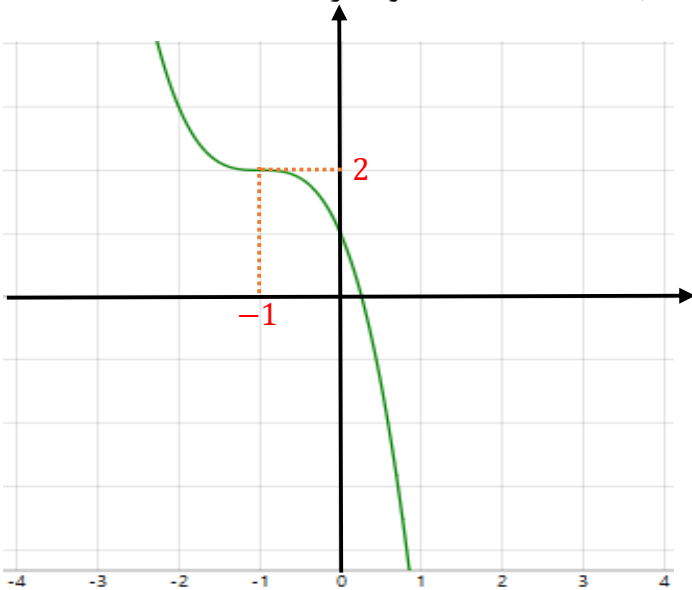
تذکر: در $x = -1$ مقدار x و x^3 برابر -1 ولی مقدار x^2 مساوی ۱ است.

تمرین ۲: نمودار توابع $y = x$ و $y = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt[3]{x}$ را در یک دستگاه مختصات در فاصله $[0, 1]$

رسم کنید و بیان کنید در این فاصله کدام یک از همه بالاتر و کدام یک پایین تر است؟

تذکر: برای $0 < x < 1$ هر چه فرجه رادیکال بیشتر شود، حاصل عددی بزرگتر خواهد بود.

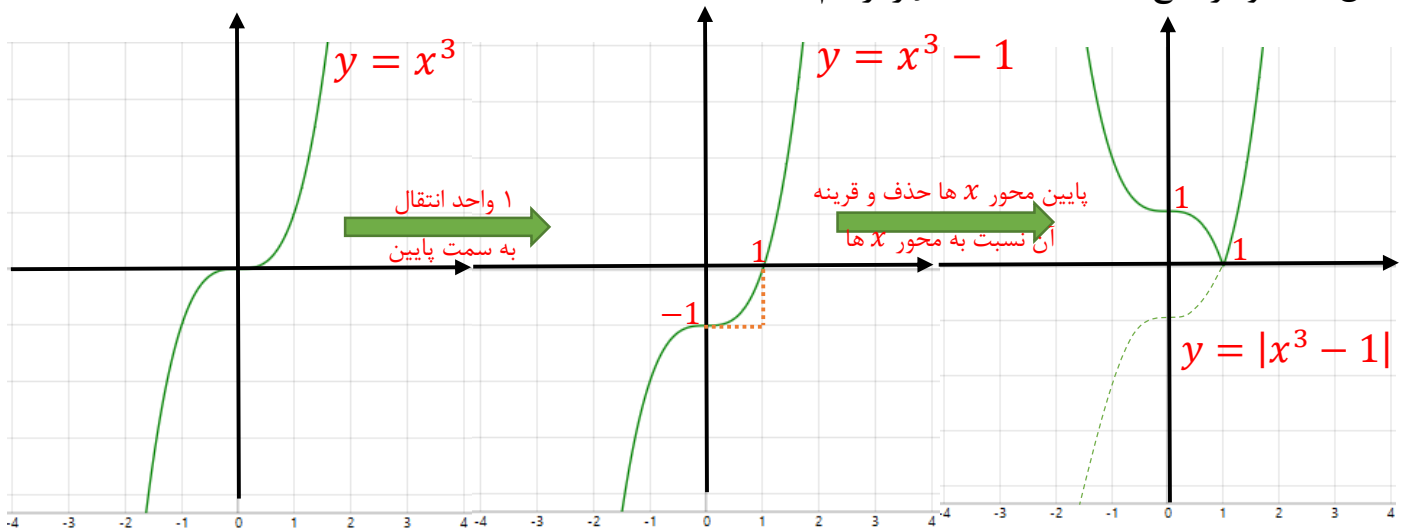
تمرین ۳: اگر نمودار مقابل مربوط به تابع $y = -(x + a)^3 + b$ باشد، a و b را بیابد؟



تمرین ۴: نمودار $f(x) = x^3$ در بازه $(-\infty, a)$ بالای نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار ندارد. بیشترین

مقدار a را بیابید؟

مثال ۵: نمودار تابع $y = |x^3 - 1|$ را رسم کنید ؟



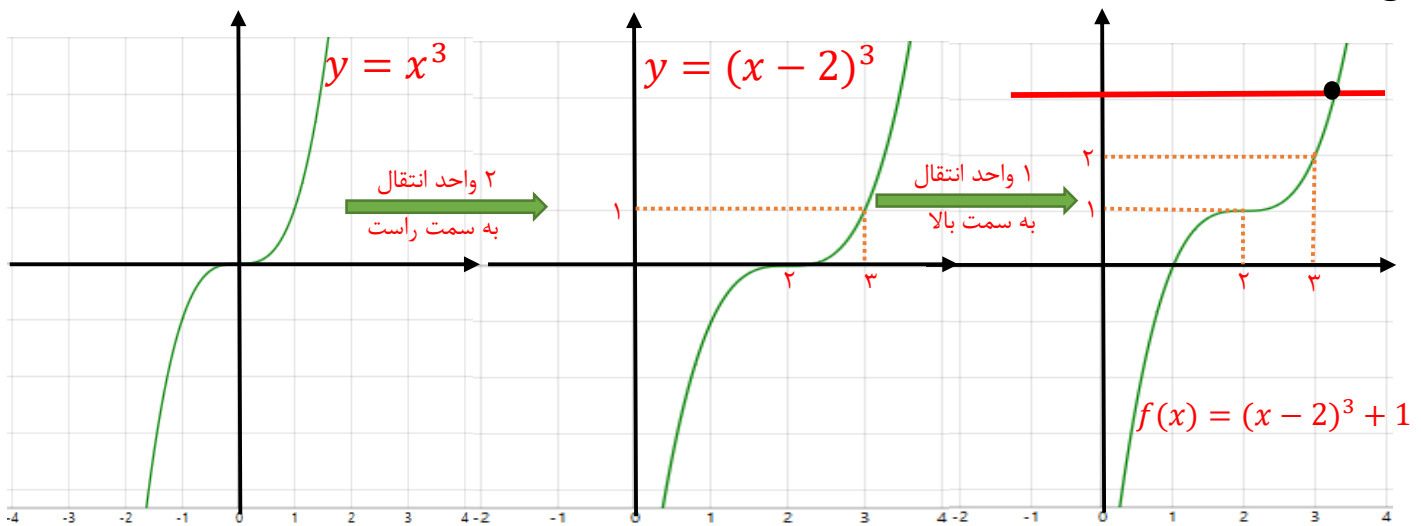
تمرین کتاب

تمرین ۶: تابع $f(x) = (x - 2)^3 + 1$ را در نظر بگیرید .

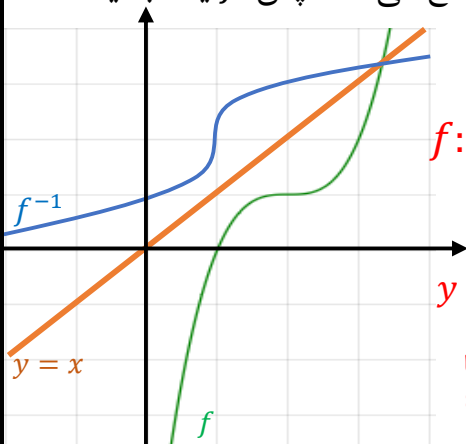
الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

ب) نشان دهید که f وارون پذیر است و نمودار f^{-1} را رسم کنید.

ج) ضابطه f^{-1} را به دست آورید.



ب) با توجه به آزمون خط افقی: هر خط افقی نمودار را فقط در یک نقطه قطع می کند پس f یک به یک است و هر تابع یک به یک وارون پذیر است.



f :	x	1	2	3
	y	0	1	2

f^{-1} :	x	0	1	2
	y	1	2	3

ج)

$$y = (x - 2)^3 + 1 \xrightarrow{\text{بر حسب } x} y - 1 = (x - 2)^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \sqrt[3]{y - 1} = x - 2$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض می کنیم}} \sqrt[3]{x - 1} + 2 = f^{-1}$$

مثال: نمودار تابع $f(x) = 6x^2 - x^3 - 12x$ را رسم کنید؟

$$f(x) = -(x^3 - 6x^2 + 12x)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$f(x) = -(x^3 - 3x^2(2) + 3x(2^2) - 2^3 + 2^3)$$

$$f(x) = -\left(\underbrace{x^3 - 3x^2(2) + 3x(2^2) - 2^3}_{-b^3} + 2^3\right) = -(x - 2)^3 + 2^3$$

$$f(x) = -(x - 2)^3 + 8$$

تمرین ۷: رسم نمودار بر عهده دانش آموزان

مثال: برای رسم نمودار تابع $g(x) = (x + a)^3 - b$ باید نمودار $f(x) = x^3$ را ۲ واحد به چپ و ۴ واحد به بالا منتقل کنیم a و b را بیابید؟

$$f(x) = x^3 \xrightarrow{\text{واحد به چپ } 2} y = (x + 2)^3 \xrightarrow{\text{واحد به بالا } 4} y = (x + 2)^3 + 4$$

بنابراین $a = 2$ و $b = -4$ خواهد بود.

تمرین ۸: اگر نمودار تابع $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ بصورت شکل مقابل باشد حاصل

$a - b + 2c$ را بیابید؟

