



مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

سؤالات امتحانی درس: حسابان (۲) ریاضی و فیزیک

Einaky.com

آزمون نوبت اول (۱)

پایه دوازدهم

ردیف	سؤالات	نمره
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف. نمودار $y = f(-x)$ قرینه نمودار $y = f(x)$ نسبت به است. ب. نقطه $(6, 8)$ روی نمودار $y = f(x)$ است نقطه متناظر آن در $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$ نقطه است. پ. اگر دامنه و برد تابع $f(x) = \cos x$ به ترتیب $D_f = [0, 2\pi]$ و $R_f = [-1, 1]$ باشد، در این صورت دامنه و برد تابع $-f\left(\frac{x}{3}\right)$ به ترتیب برابر است با و	۱/۲۵
۲	اگر $f(x) = \log x$ باشد نمودار تابع $y = -f(x-1)$ را رسم کنید.	۰/۵
۳	نمودار تابع f به صورت مقابل است: الف. نمودار تابع $g(x) = f(2x+1)$ را به کمک آن رسم کنید. ب. تابع f در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی و در چه بازه‌هایی ثابت است؟	۱/۵ (مشابه خرداد ۹۱)
۴	نمودار تابع زیر فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار $y = x $ به دست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.	۰/۷۵
۵	مقادیر m و n را چنان به دست آورید که چندجمله‌ای $x^2 + mx + n$ بر $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر باشد.	۱ (ادی ۸۹)
۶	نشان دهید عبارت $3^{14} + 3^7$ بر ۱۱ بخش پذیر است.	۰/۷۵
۷	اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی و تابع g اکیداً نزولی باشد، نشان دهید که تابع $f-g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است.	۱
۸	الف. نمودار $f(x) = \sqrt{1-x}$ را رسم کرده و نشان دهید که f وارون پذیر است. ب. ضابطه f^{-1} را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.	۱/۷۵
۹	ضابطه تابعی مثلثاتی (کسینوس) را با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید. $T = \pi, \max = 3, \min = -1$	۱/۲۵
۱۰	الف. اگر $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ باشد، مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را باهم مقایسه کنید. ب. معادله $\sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0$ را حل کنید.	۲ (خرداد ۹۶)
۱۱	اگر دوره تناوب تابع $y = \tan(ax) + 1$ برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، مقدار a را پیدا کنید.	۰/۷۵
۱۲	در شکل زیر نشان دهید رابطه بین زاویه دید شخص (θ) با فاصله افقی آن (با تابلو نقاشی) به صورت $\tan \theta = \frac{3x}{x^2 + 4}$ است. 	۱/۵

ردیف	سؤالات	نمره
۱۳	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + \tan^2 x}{x^2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 + x}{x^2}$ پ) $\lim_{x \rightarrow (-2^-)} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 5x + 6}$ ت) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - x + 3x^3}{(1 + x^2)(1 + 2x)}$ ث) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x + x^2}{1 - 4x}$	۳/۵
۱۴	مجانب‌های قائم و افقی تابع $y = \frac{1 + x^2 + 2x}{x^2 - 1}$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۵	نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد. الف. $f(1) = f(-1) = 0$ ب. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ پ. خط $y = 1$ مجانب افقی آن باشد.	۱
۲۰	جمع نمره	

پاسخ تشریحی آزمون (۱)

$$f(x) = x^2 + mx + n$$

۵

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = 0$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 + 2m + n = 0 & (0/25) \\ 1 - m + n = 0 & (0/25) \end{cases} \Rightarrow 2 + 3m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -2 \end{cases} \quad (0/5)$$

$$2^7 + 3^{14} = 2^7 + (3^2)^7 = (2 + 3^2)(\quad) = 11(\quad) = 11k$$

(0/25)

(0/5)

۶

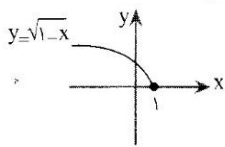
۷ گ اکیداً نزولی پس g - اکیداً صعودی است. f اکیداً صعودی است.

(0/5) بنابراین جمع دو تابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی است پس

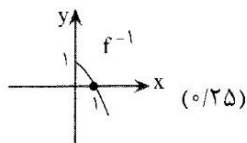
$f + (-g)$ یعنی $f - g$ اکیداً صعودی است. (0/5)

۸ الف. هر خط افقی نمودار زیر را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند

پس تابع f یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. (0/5)



(0/25)



(0/25)

ب.

$$y = \sqrt{1-x} \xrightarrow{(\quad)^2} y^2 = 1-x \Rightarrow x = 1-y^2 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1-x^2, x \geq 0 \quad (0/25)$$

۱ الف. محور y ها (0/25)

$$\left(6, \frac{1}{2}\right) = (6, 4) \quad (0/5)$$

ب.

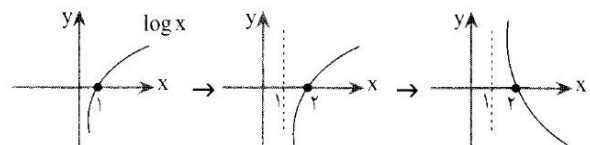
$$R = [-1, 1] \text{ و } D = [0, 4\pi] \quad (0/5)$$

پ.

(0/25)

(0/25)

۲



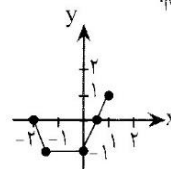
۳ الف. طول نقاط را یکی کم و سپس بر ۲ تقسیم می‌کنیم بنابراین

$$(-2, 0) \Rightarrow (-2, 0)$$

$$(-2, -1) \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \quad (1, -1) \Rightarrow (0, -1) \quad (0/5)$$

$$(2, 0) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (3, 1) \Rightarrow (1, 1)$$

سپس با این نقاط جدید نمودار را رسم می‌کنیم:



(0/25)

ب. f در بازه $[-3, -2]$ نزولی (0/25)، در بازه $[-2, 1]$ تابع ثابت و

در بازه $[1, 3]$ صعودی است. (0/5)

۴ $|x|$ نسبت به محور x ها قرینه $(-|x|)$ ، یک واحد به چپ

$(-|x+1|)$ و یک واحد به پایین آمده $(-|x+1|-1)$ پس

ضابطه این تابع $y = -|x+1| - 1$ می‌شود. (0/75)

الف. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} + 1 = -\infty + 1 = -\infty$

توجه: وقتی $x \rightarrow 0$ می‌رود $\tan x$ میل می‌کند بنابراین در همسایگی صفر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ در نظر می‌گیریم.

ب. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(3x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x+1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ (۰/۷۵)

پ. $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^2 - 2x - 1}{(x+2)(x+2)} = \frac{4+4-1}{(0^-)(0)} = \frac{7}{0^-} = -\infty$ (۰/۷۵)

ت. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2(2x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{2x^3} = \frac{3}{2}$ (۰/۷۵)

ث. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x^2 - 2x)}{-(4x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{-4x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{4} = \mp\infty$ (۰/۵)

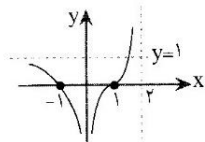
۱۴

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y = 1$ مجانب افقی (۰/۲۵)

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ (۰/۲۵)

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x^2+2x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-1}$
 پس $x = -1$ مجانب قائم نیست. (۰/۵)

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x^2+2x}{x^2-1} = \frac{4}{0^\pm} = \pm\infty \Rightarrow$ (۰/۵) $x = 1$ مجانب قائم است.



(۱)

۱۵

$y = a \cos bx + c$

$\begin{cases} \max = |a| + c \\ \min = -|a| + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 3 \\ -|a| + c = -1 \end{cases}$ (۰/۵)

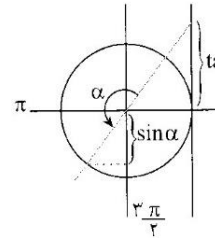
$\Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$ (۰/۲۵)

$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$ (۰/۲۵)

$y = \pm 2 \cos(\pm 2x) + 1 = \pm 2 \cos 2x + 1$ (۰/۲۵)

۱۰

الف. $\sin \alpha < \tan \alpha$ (۰/۲۵)



(۰/۲۵)

ب.

$\sqrt{2} \sin x \cos x - \sqrt{2} \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$

$\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ یا (۰/۵)

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ (۰/۲۵)

$T = \frac{\pi}{a^2} \Rightarrow \frac{\pi}{a^2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$ (۰/۲۵)

۱۱

$\tan \alpha = \frac{1}{x}, \tan \beta = \frac{4}{x}$ (۰/۵)

۱۲

$\theta = \beta - \alpha \Rightarrow \tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$ (۰/۲۵)

$= \frac{\frac{4}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{4}{x} \times \frac{1}{x}} = \frac{\frac{3}{x}}{\frac{x^2 + 4}{x^2}} = \frac{3x}{x^2 + 4}$ (۰/۵)