



مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

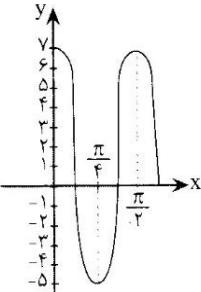
سوالات امتحانی درس: حسابان (۲) ریاضی و فیزیک

Einaky.com

آزمون نوبت اول

پایه دوازدهم

ردیف	سوالات	نمره:
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. الف. تابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ در تمام دامنه خود یکنوا است. ب. تابع $f(x) = [x]$ تابعی ثابت است. پ. اگر $1 \leq x \leq 0$ باشد، در این بازه نمودار x^3 پایین‌تر از نمودار x است.	۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف. تابع f را متناظر می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی T موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و ب. دوره تناوب تابع $y = 2\sin(-3x) + 1$ برابر است با پ. تابع x $y = \tan x$ در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ اکیداً است. ت. تابع x $y = 2\sin x$ در بازه $(-\pi, 7\pi)$ ماقریزم و مینیمم دارد. ث. اگر $T = \pi$ و $\max = 3$ و $\min = -2$ مربوط به تابع مثلثاتی سینوس باشد، ضابطه تابع برابر است با	۲
۳	اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g(x) = 1 + \sqrt{x-3}$ با چه انتقالی می‌توان از روی نمودار f به نمودار تابع g رسید؟	۰/۵
۴	نمودار تابع f به صورت مقابل است: الف. نمودار تابع $y = -2f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ را رسم کنید. ب. دامنه و برد تابع جدید را به دست آورید.	۱/۵
۵	الف. نقطه $(2, 2)$ روی نمودار $f(x)$ قرار دارد. این نقطه در تابع $g(x) = f(2-x)$ با چه نقطه‌ای متناظر است؟ ب. نمودار تابع فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است، ضابطه این تابع را بنویسید.	۰/۵
۶	نمودار تابع زیر رارسم کنید و با استفاده از نمودار تعیین کنید که تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی و در چه بازه‌هایی ثابت است؟ $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ 4 & -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$	۰/۷۵
۷	نامعادلات زیر را حل کنید. الف. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x+1} \leq \frac{1}{64}$ ب. $\log(3x+1) \geq \log(x+2)$	۱/۲۵
۸	در چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ ، a و b را طوری بیابید که باقی‌مانده تقسیم آن بر $-x-1$ برابر ۴ بوده و بر $x+2$ بخش‌بذیر باشد.	۱
۹	عبارت $1 - x^4$ را به سه صورت مختلف تجزیه کنید.	۱
۱۰	الف. به کمک نمودار $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ تابع $f(x) = x^3$ را در بازه $[-1, 1]$ رسم کنید. ب. نشان دهید که f وارون پذیر است. پ. ضابطه f^{-1} را به دست آورده و آن را رسم کنید.	۲

ردیف	سوالات	نمره
۱۱	نمودار داده شده مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \cos bx + c$ و یا $f(x) = a \sin bx + c$ است. با توجه به نمودار و تشخیص دوره 	۱
۱۲	معادلات زیر را حل کنید. (الف) $\tan^2 x - 3 = 0$ (ب) $2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$	۲
۱۳	اگر $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ و α زاویه‌ای باز باشد، مقدار $\cos 2\alpha$ را بدست آورید.	۰/۷۵
۱۴	مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ را بدست آورید.	۱/۲۵
۱۵	حدود زیر را در صورت وجود بدست آورید. (الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty^+} \frac{-x - 2}{x^2 + 4x + 4}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{1+x^2}$ (پ) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 2x^3}{1-x^3}$ (ت) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - \sin 2x}{x}$	۲/۲۵
	جمع نمره	۲۰

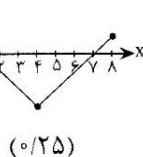
پاسخ تشریحی آزمون (۲)

$$f(x) = a \sin bx + c$$

$$f(x) = \pm \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{2} \quad (0/25)$$

کافی است نمودار f را ۳ واحد به راست و یک واحد به بالا ببریم تا به نمودار g برسیم. (۰/۵)

الف. x (طول) را دو برابر و y را -۲ برابر کرده با یک جمع می‌کنیم:
 $(4, 0) \Rightarrow (8, 1)$ (۰/۲۵)
 $(2, 2) \Rightarrow (4, -2)$ (۰/۲۵)
 $(0, 0) \Rightarrow (0, 1)$ (۰/۲۵)



$$D = [0, 8], \quad R = [-2, 1] \quad (0/5)$$

ب.

$$g(x) = f(2-x) = f(-x+2) \quad \text{الف.} \quad (0/5)$$

از $x = 2$ تا کم و سپس قرینه‌اش می‌کنیم پس:

$$(3, 2) \xrightarrow{x-2} (+1, 2) \Rightarrow (-1, 2) \quad (0/5)$$

$$y = -\sqrt{-(x-4)} = -\sqrt{-x+4} \quad (0/75)$$

ب.

الف. نادرست - در شاخه‌های خود یکنواست. (۰/۲۵)

ب. نادرست - صعودی است. (۰/۲۵)

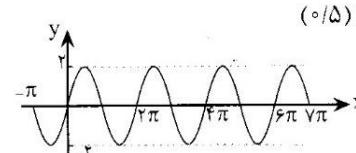
پ. درست (۰/۲۵)

الف. $f(x \pm T) = f(x)$ (۰/۲۵)

ب. (۰/۲۵)

پ. صعودی (۰/۲۵)

ت. ۴ ماکریم و ۴ مینیمم (۰/۵)



$$T = \frac{\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2$$

$$|a| + c = 2$$

$$-|a| + c = -2$$

$$c = \frac{-2+2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

ث.

١٢ الف.

$$\tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{3} \quad (\circ/25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} & (\circ/25) \\ \tan x = \tan(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3} & (\circ/25) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

ب.

$$(\circ/25) \quad (\circ/25)$$

$$2a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{يا} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (\circ/25)$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (\circ/25)$$

$$a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad (\circ/25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \quad (\circ/25)$$

ي.

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \rightarrow \cos \alpha = \frac{-5}{13} \quad 13$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = \frac{-119}{169} \quad (\circ/5)$$

راه دوم: از طریق فرمول $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ نیز می‌توان حاصل را به دست آورد.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y = 1 \quad 14$$

مجانب افقی $(\circ/25)$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ يا } x = 2 \quad (\circ/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-4}{\pm} \Rightarrow \pm\infty \Rightarrow x = 1 \quad (\circ/25)$$

مجانب قائم

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x-1} = 5 \Rightarrow$$

پس $x = 2$ مجانب قائم نیست. $(\circ/25)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-2}{x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(x+2)}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x+2} \quad 15$$

الف.

$$= \frac{-1}{\frac{1}{x}} = -\infty \quad (\circ/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad (\circ/5)$$

ب.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3}{-x} = -2 \quad (\circ/5)$$

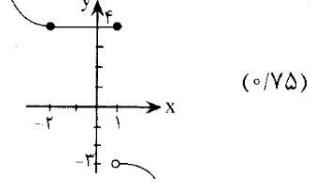
پ.

$$\frac{2-\infty}{\infty} = -\infty \quad (\circ/5)$$

ت.

٦ تابع f در بازه $(-\infty, -2]$ نزولی، در بازه $[1, +\infty)$ نزولی و در بازه

$[-2, 1]$ ثابت است. $(\circ/25)$



٧ $(\circ/25)$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-x+1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3 \quad \text{نحوی} \rightarrow -x+1 \geq 3 \Rightarrow x \leq -2 \quad \text{الف.}$$

ب. $(\circ/5)$

$$\log(3x+1) \geq \log(x+2) \rightarrow 3x+1 \geq x+2 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \quad \text{صعودی}$$

۸

$$p(1) = 4 \Rightarrow 1 + a + 1 + b = 4 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + b = 1 \end{cases} \quad (\circ/5)$$

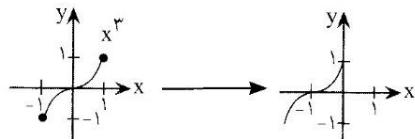
$$\Rightarrow \begin{cases} 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \\ b = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \end{cases} \quad (\circ/25)$$

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) \quad (\circ/25)$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1) \quad (\circ/25) \text{ يا } (x+1)(x^2 - x + 1) \quad (\circ/5)$$

٩ $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3 \quad (\circ/25)$

الف. کافی است نمودار x^3 را یک واحد به چپ منتقل کنیم.



١٠ الف. $(\circ/25)$

ب. خطوط افقی نمودار را در یک نقطه قطع می‌کند پس تابع f یکبهیک و در نتیجه وارون پذیر است. $(\circ/25)$

$$y = (x+1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{(x+1)^3} \quad \text{پ.}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{y} = x+1$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{y} - 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 1 \quad (\circ/5)$$

١١ $T = \frac{\pi}{2}$ $f(x) = a \cos bx + c$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 4 \quad (\circ/25)$$

$$\max = y = |a| + c$$

$$\min = -a = -|a| + c$$

$$c = \frac{y + (-a)}{2} = 1 \Rightarrow y = |a| + 1 \quad (\circ/25)$$

$$\Rightarrow |a| = 6 \quad (\circ/25)$$

با توجه به نمودار a و b هر دو مثبتند پس: $f(x) = 6 \cos 4x + 1 \quad (\circ/25)$