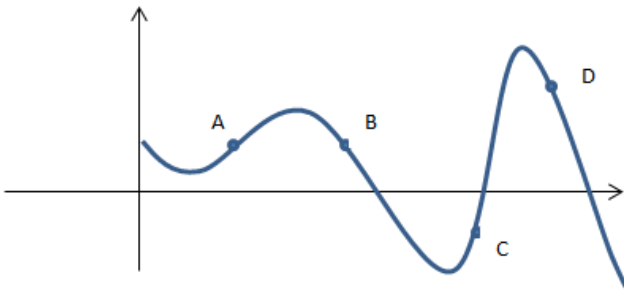




سوالات امتحان درس: حسابان ۲	رشته : ریاضی فیزیک	تعداد صفحه: ۲	مدت امتحان : ۱۳۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	دوره متوسطه دوم	تاریخ امتحان : / /	ساعت شروع :

سؤالات پاسخ نامه دارد.

ردیف	استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی، جذر و درصد) بلامانع است.	بارم
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ روی بازه $[-\infty, 3]$ اکیدا صعودی است. ب) تابع $y = x^3 + 1$ در بازه $[0, 1]$ پایین تر از نمودار تابع $y = x^2 + 1$ قرار دارد. ج) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد آنگاه در این نقطه مشتق پذیر است. د) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0, 1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه ای از این بازه است.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) نمودار تابع $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ را می توان با واحد انتقال نمودار $y = x^3$ به سمت رسم کرد. ب) برای آنکه تابع $y = ax + b$ در دامنه اش هم صعودی باشد و هم نزولی مقدار a باید برابر با باشد. ج) دوره تناوب و مقدار ماکسیمم و مینیمم تابع $y = 2\sin\frac{\pi x}{4} - \sqrt{3}$ به ترتیب برابر با و است.	۱/۵
۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b & x > 1 \\ x^3 - 2x & x \leq 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر است. $a - b$ کدام است؟ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ ب) تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ چند نقطه بحرانی دارد؟ (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳	۱
۴	نشان دهید $(2x - 1)$ یک مقسوم علیه چند جمله ای $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 2$ است. سپس مقسوم علیه های درجه اول دیگر $f(x)$ را بیابید	۱/۲۵
۵	معادله مثلثاتی زیر را حل کنید. $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$	۱/۲۵
۶	مجانبهای افقی و قائم تابع زیر را به دست آورید. $y = \frac{2x + 5}{ x - 1}$	۱

۷	حاصل حدهای زیر را به دست آورید.	۱/۵	الف) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 2}{3 - x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x}{3x - 1}$												
۸	با توجه به نمودار جدول را کامل کنید.	۱	 <table border="1" data-bbox="479 758 1144 871"><tr><td>شیب</td><td>-۲</td><td>-۱</td><td>۰/۵</td><td>۲</td></tr><tr><td>نقطه</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	شیب	-۲	-۱	۰/۵	۲	نقطه						
شیب	-۲	-۱	۰/۵	۲											
نقطه															
۹	با استفاده از تعریف مشتق معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt{x - 2}$ را در نقطه $x = 3$ به دست آورید	۱/۵													
۱۰	مشتق بگیرید . (ساده کردن مشتق الزامی نیست).	۱/۲۵	$f(x) = \sqrt{x^3 - 5x} \sin \frac{x}{2} + \cos x$												
۱۱	اگر $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ باشد آنگاه مشتق تابع $f(\tan x)$ را در $x = \frac{\pi}{4}$ به دست آورید.	۰/۷۵													
۱۲	با توجه به مقادیر تابع f در جدول زیر مقدار f' را برای نقاط داده شده حدس بزنید.	۰/۷۵	<table border="1" data-bbox="323 1337 1221 1516"><tr><td>x</td><td>۴</td><td>۸</td><td>۱۲</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>۱۵۰</td><td>۱۱۰</td><td>۹۰</td></tr><tr><td>مقدار تقریبی $f'(x)$</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	x	۴	۸	۱۲	$f(x)$	۱۵۰	۱۱۰	۹۰	مقدار تقریبی $f'(x)$			
x	۴	۸	۱۲												
$f(x)$	۱۵۰	۱۱۰	۹۰												
مقدار تقریبی $f'(x)$															
۱۳	جسمی را از سطح زمین به طور عمودی رو به بالا پرتاب می کنیم. اگر ارتفاع این جسم از زمین از معادله $h(t) = -3t^2 + 24t$ به دست آید ، سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد با زمین را به دست آورید.	۰/۷۵													
۱۴	مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^2 + x + 1 $ را در بازه $[-2, 2]$ بیابید.	۱/۷۵													
۱۵	جهت تقعر و نقاط عطف نمودار تابع $f(x) = x^4 + 2x^3 - 36x^2 + 8$ زیر را مشخص کنید.	۱/۷۵													
۱۶	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = (x - 1)^2(x + 3)$ را رسم کنید.	۲													

موفق باشید

راهنمای تصحیح امتحان درس حسابان 2		رشته ریاضی و فیزیک	مدت امتحان: 120 دقیقه
پایه دوازدهم		دوره دوم متوسطه	تاریخ برگزاری امتحان:
ردیف	سؤالات		
1	الف) نادرست ب) درست ج) نادرست د) نادرست هر مورد (0/25)		
2	الف) 2، چپ ب) صفر ج) $4-2\sqrt{3}$ ، $2-\sqrt{3}$ هر مورد (0/25)		
3	الف) گزینه 3 ب) گزینه 1 هر مورد (0/5) $a=1, b=-2 \rightarrow a-b=3$ (0/5) $f'(x) = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$ (0/5) صورت ریشه ندارد و ریشه های مخرج به دامنه تابع تعلق ندارد پس این تابع فاقد نقطه بحرانی است.		
4	$2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$ (0/25) $f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{2})^2 - 4 \times \frac{1}{2} + 2 = 2 \times \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 2 + 3 = 0 \rightarrow f(\frac{1}{2}) = 0$ (0/25) پس f بر $(2x-1)$ بخش پذیر است (0/25) $\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 - 4x + 2 \\ -2x^3 + x^2 \\ \hline -4x + 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x-1 \\ x^2-2 \\ \hline \end{array}$ $f(x) = (2x-1)(x^2-2) = (2x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ (0/5) f مقسوم علیه های دیگر $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ (0/5) $-4x+2$ $+4x-2$ 		
5	$\tan x = X \quad X^2 - (1+\sqrt{3})X + \sqrt{3} = 0 \rightarrow$ (0/25) (0/25) $a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} X=1 \rightarrow \tan x=1 \rightarrow x=K\pi + \frac{\pi}{4} & (0/25) \\ X=\frac{c}{a} \rightarrow \tan x=\sqrt{3} \rightarrow x=K\pi + \frac{\pi}{3} & (0/25) \end{cases}$ (0/25)		
6	1 $x -1=0 \rightarrow x =1 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow$ مجانبهای قائم $\rightarrow \begin{cases} x=1 & (0/25) \\ x=-1 & (0/25) \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{ x } = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x} = -2 \end{cases} \rightarrow$ مجانبهای افقی $\begin{cases} y=2 & (0/25) \\ y=-2 & (0/25) \end{cases}$		

1/5	الف) $\frac{[3^+]-2}{3-3^+}=\frac{3-2}{0^-}=\frac{1}{0^-}=-\infty$ (0/5) ب) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ x ^{-x}(0.25)}{3x(0.25)}=\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x-x}{3x}(0.25)=\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{3x}=-\frac{2}{3(0.25)}$					7												
1	شیب	-2	-1	0/5	2 هر مورد (0/25)	8												
	نقطه	D	B	A	C													
1/5	$f'(a)=\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Rightarrow f'(3)=\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ (0/25) $=\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3} \times \frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\overbrace{x-2-1}^{(x-3)}}{(x-3) \times (1+1)} = \frac{1}{2}$ (0/25) (0/25) (0/25) $m=\frac{1}{2} \longrightarrow x=3$ در معادله خط مماس $\longrightarrow \begin{cases} y-y_1=m(x-x_1) \\ y-1=\frac{1}{2}(x-3) \end{cases}$ (0/25) $\longrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ (0/25)					9												
1/25	$f'(x)=\underbrace{\frac{3x^2-5}{2\sqrt{x^3-5x}} \times \sin \frac{x}{2}}_{(0/5)} + \underbrace{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \times \sqrt{x^3-5x}}_{(0/5)} - \underbrace{\sin x}_{(0/25)}$					10												
0/75	$y=f(\tan x) \rightarrow y'=f'(\tan x) \times (1+\tan^2 x) \rightarrow$ (0/25) $y'=\underbrace{\frac{1}{\tan^2 x} \times (1+\tan^2 x)}_{(0/25)} \rightarrow y'_{(\frac{\pi}{4})}=\frac{1}{\tan^2 \frac{\pi}{4}} (1+\tan^2)=2$ (0/25)					11												
0/75	<table><tr><td>x</td><td>4</td><td>8</td><td>12</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>150</td><td>110</td><td>90</td></tr><tr><td>مقدار تقریبی $f'(x)$</td><td>$\frac{110-150}{8-4}=-\frac{40}{4}=-10$</td><td>$\frac{90-150}{12-4}=\frac{-60}{8}=-7.5$</td><td>$\frac{90-110}{12-8}=\frac{-20}{4}=-5$</td></tr></table> هر مورد (0/25)					x	4	8	12	f(x)	150	110	90	مقدار تقریبی $f'(x)$	$\frac{110-150}{8-4}=-\frac{40}{4}=-10$	$\frac{90-150}{12-4}=\frac{-60}{8}=-7.5$	$\frac{90-110}{12-8}=\frac{-20}{4}=-5$	12
x	4	8	12															
f(x)	150	110	90															
مقدار تقریبی $f'(x)$	$\frac{110-150}{8-4}=-\frac{40}{4}=-10$	$\frac{90-150}{12-4}=\frac{-60}{8}=-7.5$	$\frac{90-110}{12-8}=\frac{-20}{4}=-5$															

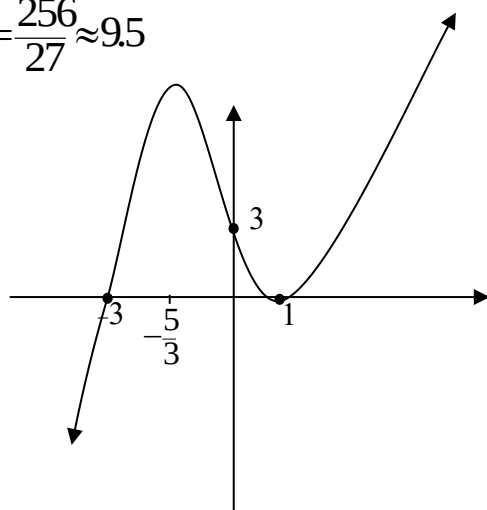
0/75	$h'(t)=-6t+24 \quad (0/25)$ $-3t^2+24=0 \longrightarrow 3(t-8)=0 \begin{cases} t=0 \\ t=8 \end{cases}$ $h(0)=24 \longrightarrow \text{سرعت در لحظه پرتاب} \quad (0/25)$ $h(8)=-24 \longrightarrow \text{سرعت در لحظه برخورد زمین} \quad (0/25)$	13																				
1/75	$ x+1 =x+1 \quad x \geq -1 \rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & -1 \leq x \leq 2 \\ x^2-x-1 & -2 \leq x < -1 \end{cases} \quad (0/25)$ $\rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & -1 < x < 2 \\ 2x-1 & -2 < x < -1 \end{cases} \quad (0/25)$ نقاط بحرانی: $\begin{cases} f'(x)=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2} & (0/25) \\ f'(x) \text{ وجود ندارد} \rightarrow x=-1 & (0/25) \end{cases}$ <table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>2</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>5</td><td>1</td><td>$\frac{3}{4}$</td><td>7</td></tr></table> ماکزیمم مطلق $f(2)=7 \quad (0/25)$ مینیمم مطلق $f(-\frac{1}{2})=\frac{3}{4} \quad (0/25)$	x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	2	f(x)	5	1	$\frac{3}{4}$	7	14										
x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	2																		
f(x)	5	1	$\frac{3}{4}$	7																		
1/75	$f'(x)=4x^3+6x^2-72x \quad (0/25)$ $f''(x)=12x^2+12x-72=0 \rightarrow x^2+x-6=0 \quad (0/25)$ طول نقاط عطف $\rightarrow$ (0/25) $\rightarrow (x+3)(x-2)=0 \begin{cases} x=-3 \\ x=2 \end{cases}$ <table><tr><td>x</td><td></td><td>-3</td><td></td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>f''(x)</td><td></td><td>+</td><td>○</td><td>-</td><td>○</td><td>+</td></tr><tr><td>f(x)</td><td></td><td>∪</td><td></td><td>∩</td><td></td><td>∪</td></tr></table> (0/75)	x		-3		2		f''(x)		+	○	-	○	+	f(x)		∪		∩		∪	15
x		-3		2																		
f''(x)		+	○	-	○	+																
f(x)		∪		∩		∪																
2	$f(x)=0 \rightarrow (x-1)^2(x+3)=0 \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases} \quad D_f=R \quad (0/25)$ طول نقاط برخورد با محور x ها $(1, 0), (-3, 0)$ مختصات محل تلاقی با محور عرض ها $x=0 \rightarrow (0-1)^2(0+3) \rightarrow y=3 \rightarrow (0, 3)$ $f'(x)=2(x-1)(x+3)+(x-1)^2=0 \quad (0/25) \rightarrow$ $(x-1)[2(x+3)+(x-1)]=0 \quad (0/25)$	16																				

ریشه های مشتق
 «طول نقاط اکسترمم» (0/25)
 $(x-1)(3x+5)=0$
 $\begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{5}{3} \end{cases}$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{5}{3}$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+		+	+	-	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{5}$ max	$\searrow$	3
					$\searrow$	0	min
						$\nearrow$	5
							$\nearrow$
							$+\infty$

جدول تغییرات (0/5)

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{64}{9} \times \frac{4}{3} = \frac{256}{27} \approx 9.5$$



رسم نمودار (0/5)