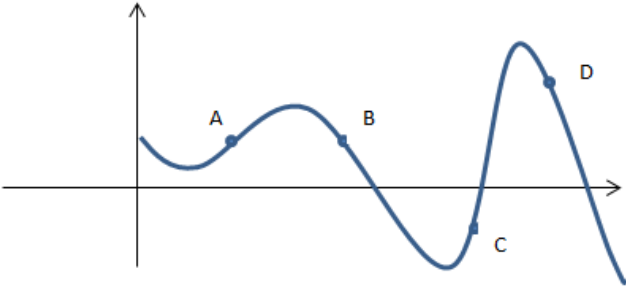




| | | | |
|------------------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|
| سوالیات امتحان درس: حسابان ۲ | رشته: ریاضی فیزیک | تعداد صفحه: ۲ | مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه |
| نام و نام خانوادگی: | دوره متوسطه دوم | تاریخ امتحان: / / | ساعت شروع: |

سؤالات پاسخ نامه دارد.

| ردیف | استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی، جذر و درصد) بلامانع است. | بارم |
|------|---|------|
| ۱ | درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ روی بازه $[-\infty, 3]$ اکیدا صعودی است. ب) تابع $y = x^3 + 1$ در بازه $[0, 1]$ پایین تر از نمودار تابع $y = x^2 + 1$ قرار دارد. ج) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد آنگاه در این نقطه مشتق پذیر است. د) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0, 1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه ای از این بازه است. | ۱ |
| ۲ | جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) نمودار تابع $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ را می توان با واحد انتقال نمودار $y = x^3$ به سمت رسم کرد. ب) برای آنکه تابع $y = ax + b$ در دامنه اش هم صعودی باشد و هم نزولی مقدار a باید برابر با باشد. ج) دوره تناوب و مقدار ماکسیمم و مینیمم تابع $y = 2\sin\frac{\pi x}{4} - \sqrt{3}$ به ترتیب برابر با و است. | ۱/۵ |
| ۳ | گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b & x > 1 \\ x^3 - 2x & x \leq 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر است. $a - b$ کدام است؟ ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ب) تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ چند نقطه بحرانی دارد؟ ۱ (۱) صفر ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) | ۱ |
| ۴ | نشان دهید $(2x - 1)$ یک مقسوم علیه چند جمله ای $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 2$ است. سپس مقسوم علیه های درجه اول دیگر $f(x)$ را بیابید | ۱/۲۵ |
| ۵ | معادله مثلثاتی زیر را حل کنید. $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$ | ۱/۲۵ |
| ۶ | مجانبهای افقی و قائم تابع زیر را به دست آورید. $y = \frac{2x + 5}{ x - 1}$ | ۱ |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------------|--|-----|--|----|-----|--------|------|-----|----|----------------------|--|---|--------------------------------------|--|--|
| ۱/۵ | الف) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 2}{3 - x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x}{3x - 1}$ | ۷ | حاصل حدهای زیر را به دست آورید. | | | | | | | | | | | | |
| ۱ |  <table border="1" data-bbox="480 762 1146 877"> <tbody> <tr> <td>شیب</td> <td>-۲</td> <td>-۱</td> <td>۰/۵</td> <td>۲</td> </tr> <tr> <td>نقطه</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | شیب | -۲ | -۱ | ۰/۵ | ۲ | نقطه | | | | | ۸ | با توجه به نمودار جدول را کامل کنید. | | |
| شیب | -۲ | -۱ | ۰/۵ | ۲ | | | | | | | | | | | |
| نقطه | | | | | | | | | | | | | | | |
| ۱/۵ | با استفاده از تعریف مشتق معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt{x - 2}$ را در نقطه $x = 3$ به دست آورید | ۹ | | | | | | | | | | | | | |
| ۱/۲۵ | $f(x) = \sqrt{x^3 - 5x} \sin \frac{x}{2} + \cos x$ | ۱۰ | مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). | | | | | | | | | | | | |
| ۰/۷۵ | اگر $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ باشد آنگاه مشتق تابع $f(\tan x)$ را در $x = \frac{\pi}{4}$ به دست آورید. | ۱۱ | | | | | | | | | | | | | |
| ۰/۷۵ | با توجه به مقادیر تابع f در جدول زیر مقدار f' را برای نقاط داده شده حدس بزنید. | ۱۲ | | | | | | | | | | | | | |
| | <table border="1" data-bbox="326 1339 1222 1518"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>۴</td> <td>۸</td> <td>۱۲</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>۱۵۰</td> <td>۱۱۰</td> <td>۹۰</td> </tr> <tr> <td>مقدار تقریبی $f'(x)$</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | x | ۴ | ۸ | ۱۲ | $f(x)$ | ۱۵۰ | ۱۱۰ | ۹۰ | مقدار تقریبی $f'(x)$ | | | | | |
| x | ۴ | ۸ | ۱۲ | | | | | | | | | | | | |
| $f(x)$ | ۱۵۰ | ۱۱۰ | ۹۰ | | | | | | | | | | | | |
| مقدار تقریبی $f'(x)$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| ۰/۷۵ | جسمی را از سطح زمین به طور عمودی رو به بالا پرتاب می کنیم. اگر ارتفاع این جسم از زمین از معادله $h(t) = -3t^2 + 24t$ به دست آید، سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد با زمین را به دست آورید. | ۱۳ | | | | | | | | | | | | | |
| ۱/۷۵ | مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^2 + x + 1 $ را در بازه $[-2, 2]$ بیابید. | ۱۴ | | | | | | | | | | | | | |
| ۱/۷۵ | جهت تقعر و نقاط عطف نمودار تابع $f(x) = x^4 + 2x^3 - 36x^2 + 8$ زیر را مشخص کنید. | ۱۵ | | | | | | | | | | | | | |
| ۲ | جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = (x - 1)^2(x + 3)$ را رسم کنید. | ۱۶ | | | | | | | | | | | | | |

باسمه تعالی

| مدت امتحان: 120 دقیقه | | رشته ریاضی و فیزیک | | راهنمای تصحیح امتحان درس حسابان 2 | |
|-----------------------|---|--------------------|--|-----------------------------------|------|
| تاریخ برگزاری امتحان: | | دوره دوم متوسطه | | پایه دوازدهم | |
| نمره | سؤالات | | | | ردیف |
| 1 | الف) نادرست (ب) درست (ج) نادرست (د) نادرست هر مورد (0/25) | | | | 1 |
| 1/5 | الف) 2، چپ (ب) صفر (ج) $2-\sqrt{3}, 4, 2-\sqrt{3}$ هر مورد (0/25) | | | | 2 |
| 1 | الف) گزینه 3 ب) گزینه 1 هر مورد (0/5) $a=1, b=-2 \rightarrow a-b=3$ (0/5) $f'(x) = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$ صورت ریشه ندارد و ریشه های مخرج به دامنه تابع تعلق ندارد پس این تابع فاقد نقطه بحرانی است. | | | | 3 |
| 1/25 | $2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$ (0/25) $f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{2})^2 - 4 \times \frac{1}{2} + 2 = 2 \times \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 2 + 3 = 0 \rightarrow f(\frac{1}{2}) = 0$ (0/25) پس f بر $(2x-1)$ بخش پذیر است (0/25) $\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 - 4x + 2 \quad \quad 2x - 1 \\ \underline{-2x^3 + x^2} \\ -4x + 2 \\ \underline{+4x - 2} \\ \dots \end{array}$ $f(x) = (2x-1)(x^2-2) = (2x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ f : مقسوم علیه های دیگر $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ (0/5) | | | | 4 |
| 1/25 | $\tan x = X \quad X^2 - (1+\sqrt{3})X + \sqrt{3} = 0 \rightarrow$ (0/25) $a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} X=1 \rightarrow \tan x = 1 \rightarrow x = K\pi + \frac{\pi}{4} & (0/25) \\ X = \frac{c}{a} \rightarrow \tan x = \sqrt{3} \rightarrow x = K\pi + \frac{\pi}{3} & (0/25) \end{cases}$ (0/25) | | | | 5 |
| 1 | $ x -1=0 \rightarrow x =1 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow$ مجانبهای قائم $\rightarrow \begin{cases} x=1 & (0/25) \\ x=-1 & (0/25) \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{ x } = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x} = -2 \end{cases} \rightarrow$ مجانبهای افقی $\begin{cases} y=2 & (0/25) \\ y=-2 & (0/25) \end{cases}$ | | | | 6 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------------|--|--|--|----------------|----|----------------|---|----|--|------|-----|-----|----|----------------|-------------------------|---|--|--|--|----|
| 1/5 | $\text{الف) } \frac{[3^+] - 2}{3 - 3^+} = \frac{3 - 2}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad (0/5)$ $\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ x ^{-x} (0.25)}{3x (0.25)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - x}{3x} (0.25) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{3x} = -\frac{2}{3} (0.25)$ | | | | 7 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | شیب | -2 | -1 | 0/5 | 2 | هر مورد (0/25) | 8 | | | | | | | | | | | | | |
| | نقطه | D | B | A | C | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1/5 | $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ $(0/25)$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3} \times \frac{\sqrt{x-2} + 1}{\sqrt{x-2} + 1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\overbrace{x-2-1}^{(x-3)}}{(x-3) \times (1+1)} = \frac{1}{2}$ $(0/25) \quad (0/25) \quad (0/25)$ $m = \frac{1}{2} \rightarrow x=3 \text{ در معادله خط مماس در } \begin{cases} y - y_1 = m(x - x_1) \\ y - 1 = \frac{1}{2}(x - 3) \end{cases} \quad (0/25)$ $\rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad (0/25)$ | | | | 9 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1/25 | $f'(x) = \underbrace{\frac{3x^2 - 5}{2\sqrt{x^3 - 5x}} \times \sin \frac{x}{2}}_{(0/5)} + \underbrace{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \times \sqrt{x^3 - 5x}}_{(0/5)} - \underbrace{\sin x}_{(0/25)}$ | | | | 10 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0/75 | $y = f(\tan x) \rightarrow y' = f'(\tan x) \times (1 + \tan^2 x) \rightarrow (0/25)$ $y' = \underbrace{\frac{1}{\tan^2 x} \times (1 + \tan^2 x)}_{(0/25)} \rightarrow y'_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\tan^2 \frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2) = 2 \quad (0/25)$ | | | | 11 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0/75 | <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>12</td> <td></td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>150</td> <td>110</td> <td>90</td> <td>هر مورد (0/25)</td> </tr> <tr> <td>مقدار تقریبی $f'(x)$</td> <td>$\frac{110-150}{8-4} = -\frac{40}{4} = -10$</td> <td>$\frac{90-110}{12-8} = \frac{-20}{4} = -5$</td> <td>$\frac{90-110}{12-8} = \frac{-20}{4} = -5$</td> <td></td> </tr> </table> | | | | x | 4 | 8 | 12 | | f(x) | 150 | 110 | 90 | هر مورد (0/25) | مقدار تقریبی $f'(x)$ | $\frac{110-150}{8-4} = -\frac{40}{4} = -10$ | $\frac{90-110}{12-8} = \frac{-20}{4} = -5$ | $\frac{90-110}{12-8} = \frac{-20}{4} = -5$ | | 12 |
| x | 4 | 8 | 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| f(x) | 150 | 110 | 90 | هر مورد (0/25) | | | | | | | | | | | | | | | | |
| مقدار تقریبی $f'(x)$ | $\frac{110-150}{8-4} = -\frac{40}{4} = -10$ | $\frac{90-110}{12-8} = \frac{-20}{4} = -5$ | $\frac{90-110}{12-8} = \frac{-20}{4} = -5$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |

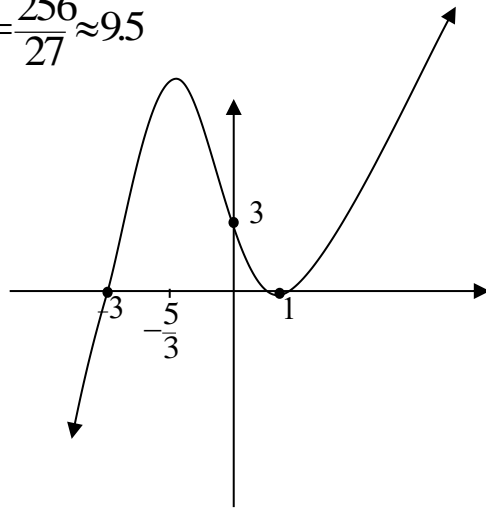
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|---|----|----------------|----|----------------|---|--------|--------|---|---|---------------|---|---|----|------|--|---|--|---|--|---|----|
| 0/75 | $h(t) = -6t + 24 \quad (0/25)$ $-3t^2 + 24 = 0 \rightarrow 3t(t-8) = 0 \begin{cases} t=0 \\ t=8 \end{cases}$ $h(0) = 24 \rightarrow \text{سرعت در لحظه پرتاب} \quad (0/25)$ $h(8) = -24 \rightarrow \text{سرعت در لحظه برخورد زمین} \quad (0/25)$ | 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1/75 | $ x+1 =x+1 \quad x \geq -1 \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - x - 1 & -2 \leq x < -1 \end{cases} \quad (0/25)$ $\rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & -1 < x < 2 \\ 2x-1 & -2 < x < -1 \end{cases} \quad (0/25)$ <p>نقاط بحرانی: $\begin{cases} f'(x) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} & (0/25) \\ f'(x) \text{ وجود ندارد} \rightarrow x = -1 & (0/25) \end{cases}$</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>x</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>$-\frac{1}{2}$</td> <td>2</td> <td>(0/25)</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>5</td> <td>1</td> <td>$\frac{3}{4}$</td> <td>7</td> <td></td> </tr> </table> <p>ماکزیمم مطلق $f(2) = 7 \quad (0/25)$</p> <p>مینیمم مطلق $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} \quad (0/25)$</p> | x | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 2 | (0/25) | f(x) | 5 | 1 | $\frac{3}{4}$ | 7 | | 14 | | | | | | | | |
| x | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 2 | (0/25) | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| f(x) | 5 | 1 | $\frac{3}{4}$ | 7 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1/75 | $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x \quad (0/25)$ $f''(x) = 12x^2 + 12x - 72 = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \quad (0/25)$ <p style="text-align: center;">طول نقاط عطف \rightarrow (0/25)</p> $\rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$ <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>x</td> <td></td> <td>-3</td> <td></td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>f''(x)</td> <td></td> <td>+</td> <td>o</td> <td>-</td> <td>o</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td></td> <td>∪</td> <td></td> <td>∩</td> <td></td> <td>∪</td> </tr> </table> <p style="text-align: right;">(0/75)</p> | x | | -3 | | 2 | | f''(x) | | + | o | - | o | + | f(x) | | ∪ | | ∩ | | ∪ | 15 |
| x | | -3 | | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| f''(x) | | + | o | - | o | + | | | | | | | | | | | | | | | | |
| f(x) | | ∪ | | ∩ | | ∪ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | $f(x) = 0 \rightarrow (x-1)^2(x+3) = 0 \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases} \quad D_f = R \quad (0/25)$ <p style="text-align: center;">طول نقاط برخورد با محور x ها $(1, 0), (-3, 0)$</p> <p style="text-align: center;">مختصات محل تلاقی با محور عرض ها $(0, 3)$</p> $x=0 \rightarrow (0-1)^2(0+3) \rightarrow y=3 \rightarrow (0, 3)$ $f'(x) = 2(x-1)(x+3) + (x-1)^2 = 0 \quad (0/25) \rightarrow$ $(x-1)[2(x+3) + (x-1)] = 0 \quad (0/25)$ | 16 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

$$(x-1)(3x+5)=0 \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{5}{3} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ریشه های مشتق} \\ \text{«طول نقاط اکسترمم»} \end{array} \quad (0/25)$$

| | | | | | | | | | | | | | |
|---------|-----------|----|----------------|---|----------------------|---|-----------|---|----------|---|---|---|-----------|
| x | $-\infty$ | -3 | $-\frac{5}{3}$ | 0 | 1 | 2 | $+\infty$ | | | | | | |
| $f'(x)$ | | + | | + | ∅ | - | | - | ∅ | + | | + | |
| f(x) | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↗ | $\frac{9}{5}$ max | ↘ | 3 | ↘ | 0 min | ↗ | 5 | ↗ | $+\infty$ |

جدول تغییرات (0/5)

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{64}{9} \times \frac{4}{3} = \frac{256}{27} \approx 9.5$$



رسم نمودار (0/5)