

فصل سوم



حد پی نهایت

و

حد در پی نهایت

این فصل را با ما بخوان

تا از ما شوی ...

درس اول

حد بی نهایت

بخش پذیری چندجمله ای ها بر $x-a$



اگر چندجمله ای $f(x)$ را بر $x-a$ تقسیم کنیم، آنگاه خارج قسمت این تقسیم، چندجمله ای مانند $Q(x)$ می باشد و این تقسیم باقی مانده ای دارد که این باقی مانده، عددی مانند R است:

$$f(x) = (x-a)Q(x) + R$$

رابطه تقسیم به صورت مقابل است:



قضیه

در تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر دو جمله ای درجه اول $x-a$ ، باقی مانده تقسیم برابر $R = f(a)$ است.

$$(x-a=0 \Rightarrow x=a)$$

به عنوان مثال، باقی مانده تقسیم $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ بر $x-2$ ، برابر است با:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow R = f(2) = 2(2)^3 - 4(2)^2 + 5(2) - 1 = 9$$

نتیجه

اگر $f(a) = 0$ باشد، آنگاه $f(x)$ بر $x-a$ بخش پذیر است.



تست

اگر $f(x) = x^3 - 4x^2 + ax$ بر $x-3$ بخش پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

2 (4

3 (3

-3 (2

-2 (1



تست

اگر $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد و باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x + 1$ برابر

18- باشد، مقدار $f(1)$ کدام است؟

- (1) -2 (2) -4 (3) 5 (4) 6



مثال

نشان دهید چندجمله ای $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 10x + 16$ بر $x + 2$ بخش پذیر است. سپس $f(x)$ را

به صورت حاصل ضرب عامل ها بنویسید.

رفع ابهام $\frac{0}{0}$ با استفاده از تجزیه چندجمله ای ها

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + 3x + 2}$



رفع ابهام $\frac{0}{0}$ به کمک قاعده هوییتال

در قاعده هوییتال از صورت کسر به طور جداگانه و از مخرج کسر نیز جداگانه مشتق می گیریم و به ترتیب در

صورت و مخرج می نویسیم و سپس حاصل حد را به دست می آوریم. عدد به دست آمده، حاصل $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

می باشد.



تست

حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 5x + 4}$ کدام است؟

4 (4

2 (3

1 (2

$\frac{1}{2}$ (1

تست

اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = 3$ ، مقدار $a + b$ کدام است؟

-14 (4

-12 (3

8 (2

6 (1

تست

اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + ax + 5} = b$ و $b \neq 0$ ، مقدار b کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (4

$-\frac{1}{4}$ (3

$\frac{1}{4}$ (2

$\frac{1}{2}$ (1

نکته

وقتی $x \rightarrow 0$ ، آن گاه حد هر چند جمله ای با حد یک جمله ای با کم ترین توان برابر است. برای مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 4x) \xrightarrow{\text{کم توان}} \lim_{x \rightarrow 0} (4x) = 0$$



تست

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 4x}$ کدام است؟

- (1) 1 (2) -1 (3) $-\frac{1}{2}$ (4) صفر

هم ارزی ها در حدهای مثلثاتی



$$\sin u \sim u, \quad \tan u \sim u$$

اگر $u \rightarrow 0$ ، آن گاه:

تست

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + 2x)}{\tan(x^2 + 5x)}$ کدام است؟

- (1) صفر (2) 1 (3) $\frac{2}{5}$ (4) $\frac{3}{5}$

نکته

هم ارزی مهم دیگری که در حدهای مثلثاتی به کار می رود، هم ارزی $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$ یا $\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$

می باشد. ($u \rightarrow 0$)

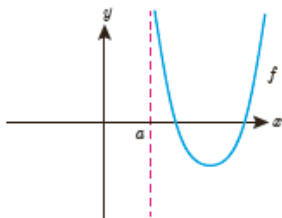


تست

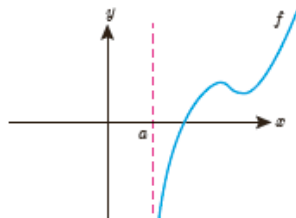
حد کسر $\frac{\sin x - \sin x \cos 2x}{2k \tan^3 x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ برابر یک است. مقدار k کدام است؟

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) 2 (3) 1 (4) صفر

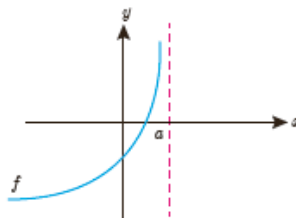
حد نامتناهی (حد بی نهایت)



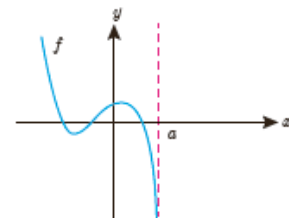
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

محاسبه حدهای بی نهایت (X به سمت عدد a میل می کند و حاصل حد $+\infty$ یا $-\infty$ است.)



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$

مثال

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x-5}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x}$



مثال

نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف -2 تعریف شده باشد به طوری که
 $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$ پاسخ خود را با جواب های دوستانتان مقایسه کنید.



تست

حاصل کدام یک از حدهای زیر نادرست است؟

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{4x+3}{x+1} = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{2}{3})^+} \frac{4}{3x+2} = +\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]+4}{x} = +\infty \quad (3)$$

تست

مقدار $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+2}$ کدام است؟

$+\infty$ (4) 1 (3) -1 (2) $-\infty$ (1)

مثال

حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2-x}{4x^2-1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3-4x^2-4x-5}{x^2-25}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2+3x-4}{x^3+4x^2+x+4}$





مثال

حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x+16}{\sqrt[3]{x+2}}$



مثال

حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x-3)^4}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2}$

چ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9}$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4}$

خ) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos x}$

د) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \tan x$

ز) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan x$

ر) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$



تمرینات تکمیلی

1

نشان دهید چند جمله ای $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ بر $x + 1$ بخش پذیر است و سپس $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل ها بنویسید.

2

اگر $f(x) = x^3 + ax^2 + 4x - 1$ بر $x - 1$ بخش پذیر باشد، مقدار a را به دست آورید.

3

فرض کنیم $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 10$ باشد، اگر $f(x)$ بر $x+2$ بخش پذیر باشد و باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ برابر 20 باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

4

حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{3-\sqrt{x+7}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x+12}-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{4x-x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2-\sqrt{2x+6}}{x^3+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-5x^2+3x+4}{2x^2-3x-20}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-5x+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{\sqrt{2x-1}-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{2x-6}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6}+x}{x^2-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x+1}+1}{x^2+5x+6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{4}{(x-6)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{2}{1+\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{|x-2|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{3-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{[x]}{|2x+1|}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{[x]+2}{x^2+3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+1}{3-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x}{x-5}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{2}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2}$$



رفع ابهام $-\infty + \infty$ یا $+\infty - \infty$

در حدها، $+\infty + \infty = +\infty$ و $-\infty - \infty = -\infty$ ، ولی $+\infty - \infty$ و $-\infty + \infty$ مبهم می باشند.

تست

حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} (\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4})$ کدام است؟

$+\infty$ (4) $-\infty$ (3) $\frac{1}{4}$ (2) $-\frac{1}{4}$ (1)





تمرینات تکمیلی

حاصل مدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x+7x^2}{3x^2+x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+\sqrt{6x+2}}{4x^2+5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+\sqrt{x^2+x+1}}{7+5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+\sqrt{x^4+3x+1}}{5x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{6x+7}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^2+\sqrt{x^2+x}}{2x^3+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x+1+3x^4}{1-x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+6x-1}{x^3+4x}$$

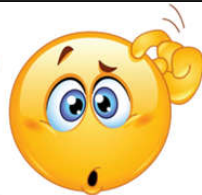
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x^3-2x^2+5}{-2x^4+3x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+\sqrt{x+1}}{5x+\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+\sqrt{x-2}}{5x^2-6x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x+\sqrt{x+1}}{3x-\sqrt{4x^2-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+9}{2x+\sqrt{x^2-2}}$$



تست های تکمیلی

1 چندجمله ای $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ بر $x - 2$ بخش پذیر است و باقی مانده تقسیم

$f(x)$ بر $x + 1$ برابر -15 است. مقدار $f(-2)$ کدام است؟

- (1) -18 (2) -26 (3) -30 (4) -36

2 چندجمله ای $4x^3 + ax^2 - 7x - 2$ به صورت $(x - 1)Q(x)$ تجزیه شده است. مقدار $Q(-1)$

کدام است؟

- (1) -3 (2) -4 (3) 4 (4) 3

3 حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{2x^2 - 5x - 3}$ کدام است؟

- (1) $\frac{13}{7}$ (2) $\frac{20}{7}$ (3) $\frac{27}{7}$ (4) $\frac{34}{7}$

4 اگر حد $\frac{x^3 + 2ax^2 - x - 2a}{ax^2 + x(1-a) - 1}$ وقتی $x \rightarrow 1$ برابر 1 باشد، a چقدر است؟

- (1) -3 (2) $-\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) 3

5 اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^3 - x} = -1$ ، حاصل $a \times b$ کدام است؟

- (1) -12 (2) -6 (3) 6 (4) 12

6 اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{2x^2 + x + a} = b$ و $b \neq 0$ ، مقدار b کدام است؟

- (1) $\frac{1}{7}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $-\frac{1}{7}$ (4) $-\frac{1}{6}$

7 قدر مطلق تفاضل حد چپ و راست تابع y به معادله $y = \frac{2x^2-x-1}{|x-1|}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 6

8 حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - [x]}{2|x| + [x]}$ کدام است؟

- (1) -1 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) 1

9 حد چپ $f(x) = \frac{(2-[-x])\sqrt{x^2-4x+4}}{2x^2-5x+2}$ در $x=2$ کدام است؟

- (1) -4 (2) $-\frac{4}{3}$ (3) $\frac{4}{3}$ (4) 4

10 نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{2ax - \sqrt[3]{-x^2-7}}{-x^3-x^2+3x+(a+2)}$ از نقطه (1 و 1) می گذرد. حد $f(x)$ وقتی

$x \rightarrow -1$ کدام است؟

- (1) $-\frac{11}{6}$ (2) $-\frac{5}{6}$ (3) $\frac{5}{6}$ (4) $\frac{11}{12}$

11 حد تابع با ضابطه $y = \frac{x+\sqrt{2-x}}{\sqrt{-4x+1}-3}$ وقتی $x \rightarrow -2$ چقدر است؟

- (1) $-\frac{3}{4}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{9}{8}$ (4) $-\frac{9}{8}$

12 حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ کدام است؟

- (1) $-\frac{1}{6}$ (2) $-\frac{1}{12}$ (3) $\frac{1}{12}$ (4) $\frac{1}{6}$

13 اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، آن گاه b کدام است؟

- (1) -2 (2) -1 (3) 1 (4) 2

14 اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \frac{3}{2}$ باشد، b کدام است؟

- (1) -8 (2) -6 (3) 4 (4) 5

15 حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}$ ، کدام است؟

- (1) 8 (2) 12 (3) 16 (4) 24

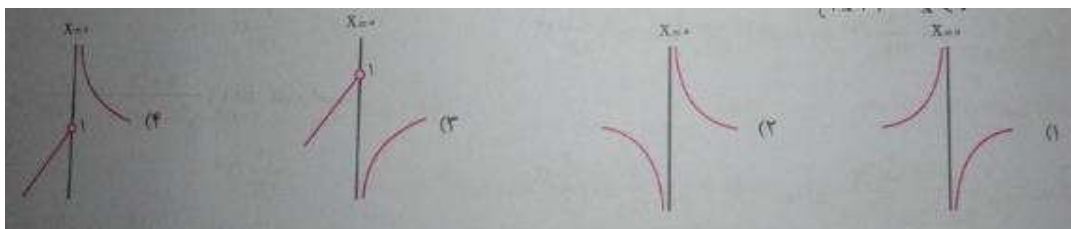
16 حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}$ ، کدام است؟

- (1) -112 (2) -96 (3) -84 (4) -72

17 حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2}{x^3-x}$ کدام است؟

- (1) صفر (2) -1 (3) $+\infty$ (4) $-\infty$

18 نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x} & x > 0 \\ 2x+1 & x < 0 \end{cases}$ در نزدیکی $x=0$ به کدام صورت است؟



19 نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$ در همسایگی $x = 0$ به کدام صورت است؟



20 نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی $x = 0$ به کدام صورت است؟



21 مقادیر a و b برای آن که داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - ax + b} = +\infty$ کدام است؟

- (1) $a = -b = 2$ (2) $a = b = -2$ (3) $a = b = 4$ (4) $-a = b = -4$

22 اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{2x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، $a + b$ کدام است؟

- (1) -3 (2) 3 (3) 6 (4) 12

23 حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2+5x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$ کدام است؟

- (1) $-\frac{7}{12}$ (2) $-\frac{5}{12}$ (3) $\frac{5}{12}$ (4) $\frac{7}{12}$

24 حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{4x-8} - \frac{1}{x^2-4} \right)$ کدام است؟

- (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{3}{16}$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1}{16}$

25 حد عبارت $\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2[x]}{2-x}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟

$+\infty$ (4

1 (3

$-\frac{1}{2}$ (2

$-\infty$ (1

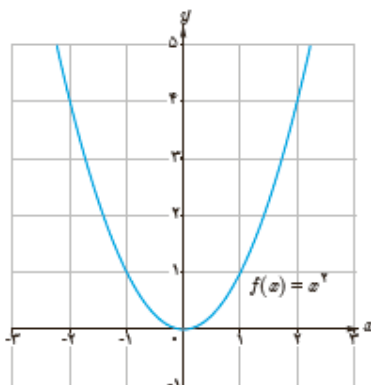


درس دوم

حد در بی نهایت (رفتار تابع وقتی که
 $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ باشد).

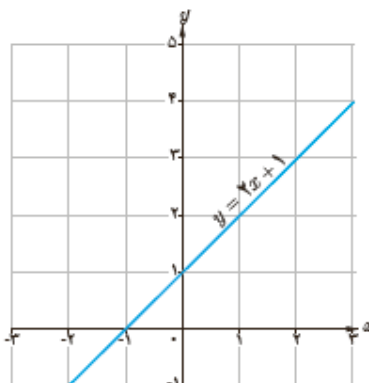
مثال

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی ها را بنویسید.



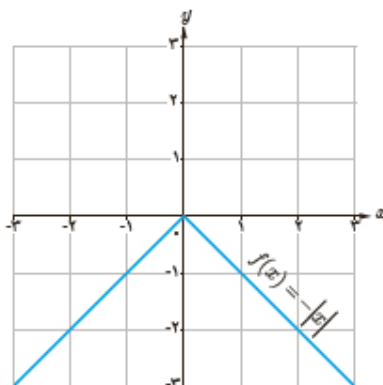
$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \dots$$



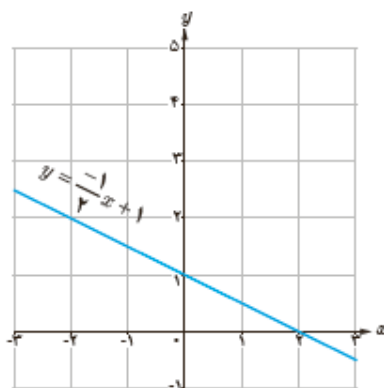
$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = \dots$$



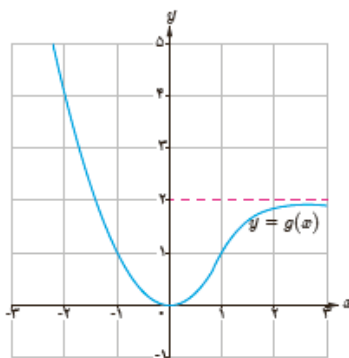
$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$$



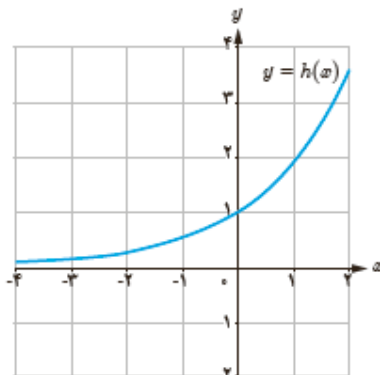
$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \dots$$



$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots$$



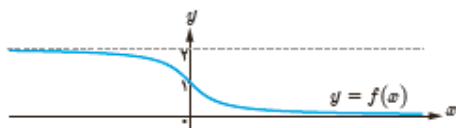
$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \dots$$

مثال

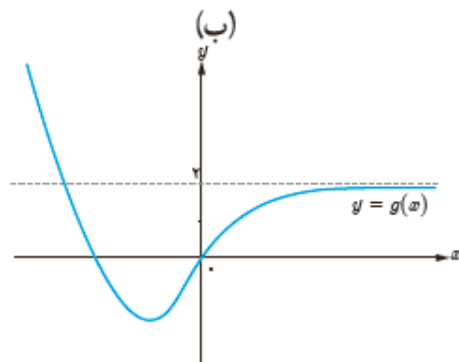
با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

(الف)



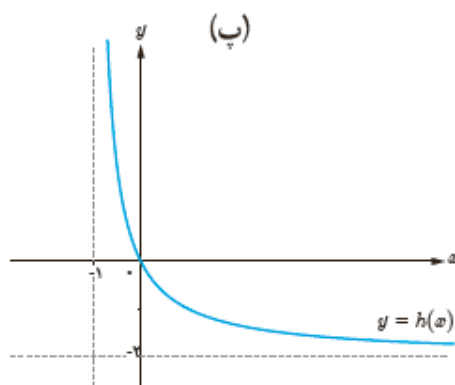
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \dots$$

مثال

نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) \text{ (پ)}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) \text{ (ب)}$$

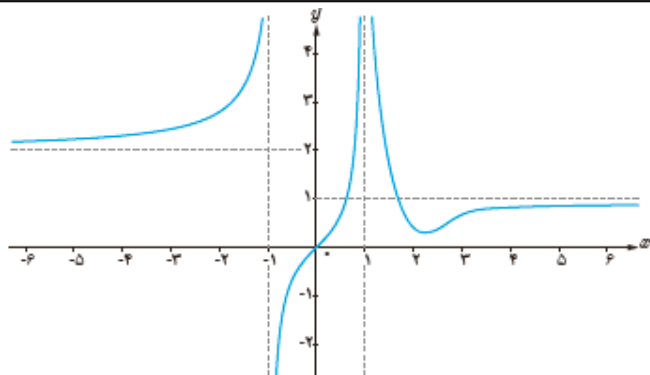
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ (الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ (ج)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ (ث)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \text{ (ت)}$$





قضیه

فرض کنیم n عددی طبیعی باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{پ})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

به عبارت دیگر:

قضیه

فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = M$ ، در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L \pm M \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)\right) = LM \quad (\text{پ})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{L}{M}, \quad (M \neq 0) \quad (\text{پ})$$

مثال

مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 5x - 6}$ را به دست آورید.





مثال

مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{x-1}$

ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1-5t^2}{t^2+3t}$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-3x}$



نکته

با توجه به این که $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ و با توجه به حد توان n ام یک تابع، حد تابع

$f(x) = x^n$ (n عدد صحیح مثبت) در $+\infty$ و $-\infty$ به صورت زیر تعیین می شود:

(1) اگر $n = 2k$ و $k \in N$ (n زوج باشد)، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = (+\infty)^{\text{زوج}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = (-\infty)^{\text{زوج}} = +\infty$$

(2) اگر $n = 2k + 1$ و $k \in N$ (n فرد باشد)، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = (+\infty)^{\text{فرد}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = (-\infty)^{\text{فرد}} = -\infty$$

به عنوان مثال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 = (\pm\infty)^{\text{زوج}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = (+\infty)^{\text{فرد}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = (-\infty)^{\text{فرد}} = -\infty$$

نکته

$+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نمی باشند، بلکه نمادهایی برای اعداد خیلی بزرگ مثبت و خیلی کوچک منفی هستند.

در محاسبه حد می توان از قواعد مقابل استفاده کرد:



$$(عدد مثبت) \times (+\infty) = +\infty, \quad (عدد مثبت) \times (-\infty) = -\infty$$

$$(عدد منفی) \times (+\infty) = -\infty, \quad (عدد منفی) \times (-\infty) = +\infty$$

بنابراین در محاسبه حد، حاصل ضرب یک عدد غیرصفر در پی نهایت $(+\infty)$ یا $(-\infty)$ ، برابر ∞ می شود و علامت آن با توجه به علامت های عدد و ∞ مشخص می شود و با توجه به آن ها می توانیم حاصل $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$ را که در آن a یک عدد حقیقی غیر صفر و n یک عدد صحیح مثبت است، به دست آوریم.

به عنوان مثال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3) = -3 \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \right) = -3 \times (-\infty)^3 = -3 \times (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 = 5 \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \right) = 5(+\infty)^2 = 5 \times (+\infty) = +\infty$$

نکته مهم

(حد چندجمله ای ها): حد هر چند جمله ای به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + 1$ ، n عدد صحیح مثبت، در $\pm\infty$ ، مساوی حد جمله ای است که بزرگترین درجه را دارد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$$

در این حالت می گوییم حد هر چندجمله ای با حد جمله ای که بزرگترین درجه را دارد هم ارز است.



مثال

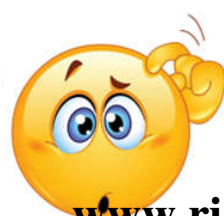
حاصل هر یک از حدهای زیر را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 3x^3 + x - 1) \quad \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^3 + 2x + 7) \quad \text{آ)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-2x^3 + x^2 + 1) \quad \text{ج)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^4 + x^2 + 2) \quad \text{پ)}$$



مثال

حدود زیر را محاسبه کنید.



الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 4}{7x^3 - 11x^2 - 6x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$

مثال

حدود زیر را محاسبه کنید.



الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 9 + \frac{7}{x^3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2}x^3 + 7x^2 - 6)$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 3}$

ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$

ث) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{3x + 1}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 3}$

چ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1}$

ح) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$

خ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x}$

د) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{4}$

مثال

حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.



ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2x + 11}{x^2 + 7x - 11}$

آ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^2 + 7x + 1}{5x + 2}$

مثال

حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.



ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{x^2 + 3}$

آ) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x + 1}{x^2 + 5x}$

تست

حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 1}}{4x - \sqrt{9x^2 + x}}$ کدام است؟

- 2 (1) 3 (2) 4 (3) 5 (4)



نکته مهم

اگر در محاسبه حدها از هم ارزی استفاده کنیم و تمام عوامل آن حذف شوند، باید از روش های دیگر برای محاسبه حد استفاده کرد و استفاده از هم ارزی نتیجه ای ندارد.

تست

حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + 1}$ کدام است؟

- 2 (1) -1 (2) 3 (3) 2 (4)

نکته مهم

در توابع رادیکالی می توان از هم ارزی قوی تر زیر برای محاسبه حدها وقتی که $x \rightarrow \pm\infty$ استفاده کرد.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \sim \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|, (a > 0)$$

$$\sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d} \sim \sqrt[3]{a} \left(x + \frac{b}{3a} \right)$$



تست

حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4x})$ کدام است؟

- $-\frac{4}{3}$ (1) -3 (2) -2 (3) -1 (4)



تست

حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x+1}-6x}{x+\sqrt{x^2-1}}$ کدام است؟

4 (4

-4 (3

3 (2

-3 (1

تمرینات تکمیلی



1) a و b را طوری بیابید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3+x^2+1}{6x^b-1} = -\frac{2}{3}$ باشد.

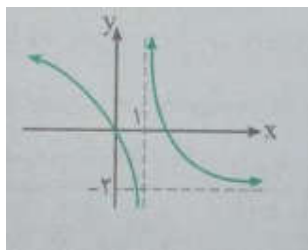
2) نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل حدهای خواسته شده را بنویسید.

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

آ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$



3 نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل حدهای خواسته شده را بنویسید.

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

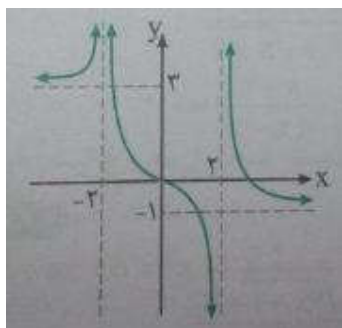
آ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$

ع) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$



تست های تکمیلی



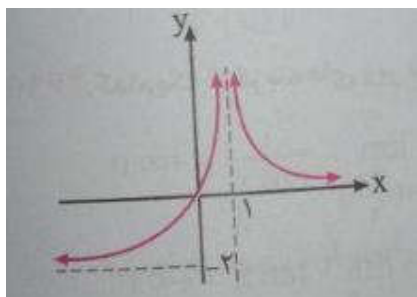
1 نمودار تابع f به صورت مقابل است. کدام گزینه نادرست است؟

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$



2

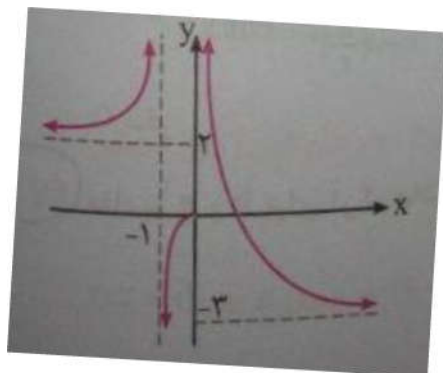
هموار تابع f به صورت مقابل است. کدام گزینه نادرست است؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \quad (3)$$



3

کدام گزینه نادرست است؟

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 4x) = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 1) = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5 + x^4 - 1) = +\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4 - 5x^2 + x) = +\infty \quad (3)$$

4

کدام گزینه نادرست است؟

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+3}{x^2+4} = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2x^2-4x+1)}{5x^2+x+2} = \frac{2}{5} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x^3+1)}{x+2} = -\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{2x^2-4} = -\infty \quad (3)$$

5

حد کسر $\frac{x^n+3x^2+1}{3x^n+5x^2+7}$ وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر $\frac{1}{2}$ است. n کدام است؟

$$n = 2 \quad (4)$$

$$n = 1 \quad (3)$$

$$n < 2 \quad (2)$$

$$n > 2 \quad (1)$$

6 حد کسر $\frac{x^{m+3}+nx+m}{mx^{n-2}-mx+n-1}$ با شرط $n > 3$ ، وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر 2- است. $m + n$ کدام است؟

- (1) $3/5$ (2) 4 (3) $4/5$ (4) 5

7 حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+\sqrt{-x+1}}{6x+\sqrt{4x^2-1}}$ کدام است؟

- (1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $-\frac{3}{4}$ (4) $-\frac{3}{2}$

8 اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2+4x+2}{x+1} + ax + b \right) = 2$ باشد، $a - b$ کدام است؟

- (1) صفر (2) -1 (3) -2 (4) -3

9 حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 8x})$ کدام است؟

- (1) -8 (2) -4 (3) 4 (4) 8

10 حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - 8})$ کدام است؟

- (1) -8 (2) صفر (3) 4 (4) ∞

11 حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-\sqrt{4x^2+9x}}{3x+\sqrt{x}}$ کدام است؟

- (1) $-\frac{1}{3}$ (2) $-\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$

12 در تابع ضابطه $f(x) = \frac{ax^n-3x+1}{3x^2+x}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟

- (1) -2 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 2 (4) 3

13 در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

- (1) -6 (2) -4 (3) 3 (4) 5

14 در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax^n-6}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟

- (1) $-\frac{1}{6}$ (2) $-\frac{1}{8}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{3}$

15 اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = 3$ باشد، آن گاه حد این کسر وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟

- (1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 5

16 نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$ از نقطه (1 و 2) می گذرد. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟

- (1) $-\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) 1

17 در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{ax^n+4}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

- (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{3}{2}$

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ باشد، آن گاه حد وقتی

$x \rightarrow -1$ کدام است؟

$\frac{5}{4}$ (4)

$\frac{3}{2}$ (3)

$\frac{5}{6}$ (2)

$\frac{2}{3}$ (1)