



جمع بندی کامل

مشتق

۱- تابع با ضابطه $f(x) = \left| \frac{x^3 - 2x}{x} \right|$ ، در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ تست : گزینه 3

می‌دانیم نقاط ناپیوستگی و ریشه‌های ساده‌قدر مطلق جزو معروف‌ترین نقاط مشتق‌ناپذیر

هستند، پس داریم:

$$f(x) = \left| \frac{x^3 - 2x}{x} \right| \Rightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{2}$$

ریشه‌مخرج $x = 0$

پس تابع در کل، ۳ نقطه‌مشتق‌ناپذیر دارد.

۲- کدام یک از توابع زیر در $x=0$ شرط لازم برای مشتق پذیری را ندارد؟

$$y = \sin x \quad (۴) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (۳) \quad y = \sqrt{x} \quad (۲) \quad y = |x| \quad (۱)$$

پاسخ تست : گزینه ۲

نکته مهم این است که شرط لازم برای آن که تابعی در یک نقطه مشتق پذیر باشد آن است که تابع در آن نقطه پیوسته باشد؛ در این صورت می‌توانیم به جست و جوی حد پردازیم اما باز هم هیچ تضمینی وجود ندارد که یک تابع پیوسته نیز حتماً حد داشته باشد.

بنابراین برای حل این تست کافی است تابعی را انتخاب کنیم که در $X = 0$ پیوسته نباشد.

با توجه به دامنه مثبت توابع رادیکالی که دارای فرجه زوج هستند، لذا گزینه دو پاسخ تست است.

۳- مشتق تابع $y = \sin^3 \sqrt{2x}$ به ازای $x = \frac{\pi^2}{18}$ کدام است؟

(۴) $\frac{27}{4\pi}$

(۳) $\frac{27}{8\pi}$

(۲) $\frac{9}{4\pi}$

(۱) $\frac{9}{8\pi}$

پاسخ تست : گزینه ۳

با توجه به این که در حالت کلی مشتق تابع $y = u^n$ برابر با $y' = nu'u^{n-1}$

است؛ خواهیم داشت:

$$y = \sin^3 \sqrt{2x} \Rightarrow y' = 3\left(\frac{2}{2\sqrt{2x}} \cos \sqrt{2x}\right)(\sin \sqrt{2x})^{3-1}$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi^2}{18}\right) = 3 \frac{1}{\frac{\pi}{3}} \cos \frac{\pi}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{9}{\pi} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{27}{8\pi}$$

۴- مقدار مشتق $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3x}\right)$ به ازای $x=4$ کدام است؟

$$\frac{\pi}{32} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi}{48} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{72} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{96} \quad (۱)$$

پاسخ تست : گزینه ۱

اگر u دلخواه بر حسب x باشد و $y = \cos^3 u$ آن گاه $y' = -u' \sin 2u$

است، بنابراین با در نظر گرفتن $u = \frac{\pi}{3x}$ داریم:

$$y' = -\frac{-\pi}{3x^2} \sin 2\left(\frac{\pi}{3x}\right) \Rightarrow y'(4) = \frac{\pi}{3(4)^2} \sin \frac{2\pi}{3(4)}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\pi}{48} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{48} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{96}$$

۵- مشتق تابع $y = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$ در نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} \quad (۱)$$

پاسخ تست : گزینه ۳

با فرض $u = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$ مشتق تابع $y = 2 \cos^2 u$ را می‌توان به صورت

$$y' = -2(2)u' \sin u \cos u = -2u' \sin 2u \quad \text{نوشت؛}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$y' = -2\left(\frac{-1}{4}\right) \sin 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۶- مشتق تابع $f(x) = x \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}$ در نقطه $x=-3$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

پاسخ تست : گزینه ۲

با توجه به قاعده کلی مشتق ضرب دو تابع و همچنین مشتق توابع رادیکالی می توان نوشت:

$$f(x) = x \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{(x+2)^2} \times \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2}} \times x$$

$$\Rightarrow f'(3) = 2 + 5 \times \frac{1}{3(4)} \times (-3) = \frac{3}{4}$$

۷- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{4} + h) - f(\frac{1}{4})}{h}$

کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ تست : گزینه ۳

می‌دانیم حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{4} + h) - f(\frac{1}{4})}{h}$ ، برابر $f'(\frac{1}{4})$ است (این موضوع را

از طریق قاعده هوپیتال و مشتق گیری از صورت و مخرج کسر نیز می‌توان نشان داد)

$$f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\sqrt{x} - (\frac{1}{2\sqrt{x}})(-x-1)}{x}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{1}{4}) = \frac{-\frac{1}{2} - (1)(-\frac{5}{4})}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 3$$

دقت شود که چون به دنبال به دست آوردن مقدار مشتق در یک نقطه خاص هستیم، بهتر

است رابطه مشتق را زیاد ساده نکنیم زیرا کاربرد خاصی ندارد؛ چون در نهایت به دنبال به

دست آوردن یک عدد هستیم.

۸- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$

کدام است؟

$\frac{5}{6}$ (۴)

$\frac{7}{12}$ (۳)

$\frac{5}{12}$ (۲)

$\frac{4}{9}$ (۱)

پاسخ تست : گزینه ۳

می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ ، برابر با $f'(4)$. پس باید از تابع $f(x)$ مشتق

بگیریم و به جای x ، عدد ۴ را جای گذاری کنیم؛ پس داریم:

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(5 - 2x) - (-2)(1 + \sqrt{x})}{(5 - 2x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)(5 - 8) - (-2)(1 + 2)}{(5 - 8)^2} = \frac{-\frac{3}{4} + 6}{9} = \frac{7}{12}$$

۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos x + \cos a \sin x - \sin a}{x}$ ، کدام است؟

$\sin a$ (۴)
 $\cos a$ (۳)
 $-\cos a$ (۲)
 $-\sin a$ (۱)

پاسخ تست : گزینه ۲

می‌دانیم $\sin a \cos x + \cos a \sin x = \sin(x + a)$ است؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + a) - \sin a}{x}$$

از طرفی حد بالا همان تعریف مشتق تابع $\sin x$ در $x=a$ است؛ پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + a) - \sin a}{x} = (\sin x)'_{(a)} = \cos a$$

۱۰- تابع با ضابطه $y = \left[\frac{1}{x} \right]$ در کدام بازه مشتق پذیر است؟

(۴) $(-\infty, -1)$

(۳) $[1, +\infty]$

(۲) $(-1, 0)$

(۱) $[0, 1]$

پاسخ تست : گزینه ۴

تابع $y = \left[\frac{1}{x} \right]$ در نقاطی که مقدار عبارت داخل جزء صحیح عددی صحیح شود،

مشتق پذیر نیست.

$$\frac{1}{x} = k \Rightarrow x = \frac{1}{k}; (k \in \mathbb{Z} - \{0\}) \Rightarrow x \in \{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \dots\}$$

واضح است که تابع f در نقاط فوق پیوسته نمی باشد، بنابراین در تمامی نقاط فوق تابع f

مشتق پذیر نیست.

بنابراین گزینه های (۱) ، (۲) و (۳) نادرست می باشند و گزینه (۴) صحیح است.

۱۱- اگر تابع f در $x=4$ مشتق پذیر بوده و $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = -\frac{3}{2}$ باشد، آن گاه

مشتق $y = \frac{f(2x)}{x}$ در $x=2$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{4}$

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ تست : گزینه ۳

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = -\frac{3}{2}$ ، مخرج صفر می شود ولی مقدار حد، بی نهایت نشده

است، پس این حد باید به صورت $\frac{0}{0}$ باشد و در نتیجه وقتی $x \rightarrow 4$ باید صورت کسر

$$\text{صفر شود؛ بنابراین: } f(4) + 7 = 0 \Rightarrow f(4) = -7$$

از طرفی با توجه به تعریف مشتق، حاصل حد فوق، برابر $f'(4)$ می باشد، بنابراین می توان

$$\text{نوشت: } f'(4) = \frac{-3}{2}$$

حال از تابع y با استفاده از قاعده مشتق زنجیره ای، مشتق می گیریم:

$$y = \frac{f(2x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{2f'(2x) \cdot x - 1 \times f(2x)}{x^2}$$

$$\Rightarrow y'(4) = \frac{4f'(4) - f(4)}{4} = \frac{4 \times \left(\frac{-3}{2}\right) - (-7)}{4} = \frac{1}{4}$$

۱۲- اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$ باشد،

$(fog)'(1)$ کدام است؟

۴ (۴

۲ (۳

۱ (۲

۳ (۱

پاسخ تست : گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3} \text{ همان } f'(2) \text{ است، یعنی } f'(2) = \frac{4}{3}$$

منظور از

همچنین می‌دانیم $(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$ است و

با جای گذاری $x=1$ در آن داریم:

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \times f'(g(1))$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times f'(1 + \sqrt{1}) = \frac{3}{2} \times f'(2) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 + a \cos \pi x & x > 1 \\ bx^2 + x & x \leq 1 \end{cases}$$

۱۳- اگر تابع با ضابطه

در تمام نقاط مشتق پذیر باشد، a کدام است؟

۴) $0/5$

۳) -1

۲) $-0/5$

۱) 1

پاسخ تست : گزینه ۴

شرط پیوستگی : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

$$\Rightarrow 1 + a \cos \pi = b + 1 \Rightarrow a(-1) = b \Rightarrow -a = b$$

شرط مشتق پذیری : $\begin{cases} x > 1 \Rightarrow f'(x) = -a \pi \sin \pi x \Rightarrow f'_+(1) = -a \pi \sin \pi = 0 \\ x < 1 \Rightarrow f'(x) = 2b x + 1 \Rightarrow f'_-(1) = 2b + 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow 2b + 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{-1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$f'_-(0) - f'_+(0) \text{ مقدار } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 + \cos x} & x > 0 \\ \sin 2x & x \leq 0 \end{cases}$$

۱۴- در تابع با ضابطه

کدام است؟

۱/۵ (۴)

۱/۲۵ (۳)

۱ (۲)

۰/۷۵ (۱)

پاسخ تست : گزینه ۴

واضح است که تابع در $x=0$ پیوسته است. زیرا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$

حال مشتق های چپ و راست تابع را در $x=0$ را درمی یابیم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\cos x (1 + \cos x) - (-\sin x)(\sin x)}{(1 + \cos x)^2}; x > 0 \Rightarrow f'_+(0) = \frac{1(1+1) - 0}{(1+1)^2} = \frac{1}{2} \\ 2 \cos 2x; x < 0 \Rightarrow f'_-(0) = 2 \cos 0 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_-(0) - f'_+(0) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۱۵- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ، حاصل $f'(x).g'(f(x))$

کدام است؟

$\frac{1}{2}x$ (۴)

x (۳)

1 (۲)

-1 (۱)

پاسخ تست : گزینه ۲

می‌دانیم $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ ، بنابراین ابتدا ضابطه تابع $y = g(f(x))$

را تشکیل می‌دهیم و تا جایی که امکان دارد، آن را ساده می‌کنیم، سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}} = x$$

$$\Rightarrow (g(f(x)))' = 1 \Rightarrow f'(x)g'(f(x)) = 1$$

۱۶- اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

۳ (۴

۲ (۳

-۱ (۲

-۳ (۱

پاسخ تست : گزینه ۱

طبق فرض مسئله داریم:

$$(f \circ g)'(2) = 6 \Rightarrow g'(2) \times f'(g(2)) = 6$$

پس ابتدا باید مقدار تابع $g(x)$ و $g'(x)$ را در $x=2$ به دست آوریم:

$$g(x) = \frac{2x + 1}{x - 1} \Rightarrow g(2) = \frac{2(2) + 1}{2 - 1} = 5$$

$$g'(x) = \frac{2(x - 1) - (2x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{-3}{(x - 1)^2}$$

$$\Rightarrow g'(2) = \frac{-3}{1} = -3$$