

نمونه سوال امتحانی ریاضی ترم اول

ردیف	سوالات	نمره
۱	<p>کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟</p> <p>الف. نمودار تابع $y = x^3$ برای تمام x های نامنفی بالای $y = x$ قرار دارد.</p> <p>ب. تابع $x = f(x)$ تابعی هم صعودی و هم نزولی است.</p> <p>پ. شرط وجود داشتن تابع مرکب fog آن است که برد تابع g با دامنه تابع f اشتراک داشته باشد.</p> <p>ت. اگر برد تابع $f(x)$ بازه $[5, 3]$ باشد آن‌گاه برد تابع $f(x)$ بازه $[0, 5]$ خواهد بود.</p>	۱/۵
۲	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف. تابع $g(x) = 3x^2 + x - 4$ را می‌توان به عنوان ترکیبی از دو تابع $f(x) = \dots$ و $h(x) = (3x^2 + x - 4)$ در نظر گرفت.</p> <p>ب. اگر دو تابع f و g معکوس یکدیگر باشند آن‌گاه حاصل هر دو تابع مرکب gof و fog برابر با تابع $y = \dots$ خواهد بود.</p> <p>پ. اگر رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ یعنی $\frac{b}{2a} < c < d$ باشد (c, d) آن‌گاه تابع درجه دوم در این بازه، معکوس پذیر \dots می‌باشد.</p> <p>ت. طول دوره تناوب اصلی تابع $y = \sin x$ برابر است با $T = \dots$.</p>	۱
۳	<p>مشخص کنید مرحله به مرحله چگونه به کمک قوانین انتقال، توانسته‌ایم نمودار تابع $y = -2\sin x + 1$ را از روی نمودار $y = \sin x$ رسم کنیم. (شکل هر مرحله را رسم کنید)</p>	۱/۵
۴	<p>تابع f و g به صورت زیر تعریف شده‌اند مقدار $((g(\sqrt{2}))f(\sqrt{2}))$ و $(g(f(\frac{3}{2})))$ را محاسبه کنید.</p> $f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ \frac{x^2}{3} & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , \quad x \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{3} & , \quad x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$	۱
۵	<p>جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $2\cos^3 x = \sin x - 1$ را بیابید.</p>	۱/۵
۶	<p>نسبت مثلثاتی $\sin 4x$ را بر حسب نسبت مثلثاتی کمان x بدست آورید.</p>	۰/۷۵
۷	<p>دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = 1 - 2\cos 7x$ را یافته، مقادیر ماکریم و مینیمم مطلق آن را بدست آورید.</p>	۱/۵
۸	<p>اگر $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ باشد، آن‌گاه حاصل $(-f)^{-1}$ را بیابید.</p>	۱
۹	<p>معکوس پذیری تابع $y = \sqrt[3]{x-2} + 4$ را به کمک شکل بررسی نمایید. در صورت معکوس پذیر بودن، ضابطه تابع معکوسش را بیابید.</p>	۱/۵
۱۰	<p>تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \leq -2 \\ 4 & , \quad -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$ را رسم کرده و سپس تعیین کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی و یا ثابت است؟</p>	۱/۲۵
۱۱	<p>حاصل هریک از حدهای زیر را در صورت وجود تعیین کنید.</p> <p>(الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{[x]+[-x]}$</p> <p>(ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$</p> <p>(ت) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{(21-(1+2x)(3+4x))}$</p> <p>(پ) $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27}$</p>	۳

ردیف	سوالات	نمره
۱۲	حاصل هریک از حدهای زیر را در صورت وجود تعیین کنید.	۱/۷۵
۱۳	با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = x^3 + 2x$ را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۱۴	معادله خط مماس بر منحنی $y = \sqrt{5x - 1}$ را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.	۱/۵
	جمع نمره	۲۰

$$g(f(\sqrt{2})) = \frac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2 - 1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (0/5)$$

$$f(g(\frac{1}{\sqrt{2}})) = \frac{g(\frac{1}{\sqrt{2}})}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 \quad (0/5)$$

$$2\cos^2 x = \sin x - 1 \Rightarrow 2(1 - \sin^2 x) = \sin x - 1 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow 2 - 2\sin^2 x = \sin x - 1 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$$

$$\frac{\sin x = t}{a+b+c=0} \rightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \quad (0/25)$$

$$\frac{a+b+c=0}{t=1} \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{3}{2} \text{ غرق} (-1 \leq \sin x \leq 1) \end{cases} \quad (0/5)$$

$$\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x \quad (0/25)$$

$$= 2(2\sin x \cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x) \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \sin 4x = 4\sin x \cos^2 x - 4\sin^3 x \cos x \quad (0/25)$$

$$f(x) = 1 - 2\cos 2x \Rightarrow T = \frac{\pi}{2} \text{ دوره تناوب} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow -1 \leq \cos 2x \leq 1 \quad (0/25) \Rightarrow 2 \geq -2\cos 2x \geq -2 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow 3 \geq 1 - 2\cos 2x \geq -1 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مقدار ماکزیمم مطلق } f \text{ برابر با } 3 \text{ است} \\ \text{مقدار مینیمم مطلق } f \text{ برابر با } -1 \text{ است} \end{cases} \quad (0/5)$$

$$-y \in D_f^{-1} \Rightarrow -y \in R_f \Rightarrow (0/25)$$

$$-y = x^3 - 3x^2 + 2x \quad (0/25) \xrightarrow{(-1)} -y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow -y = (x-1)^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} x-1 = -2 \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(-y) = -1 \quad (0/25)$$

الف. نادرست (زیرا در فاصله $(0, 1)$) نمودار $y = x^3$ پائین نمودار $y = x^2$ است. $(0/5)$

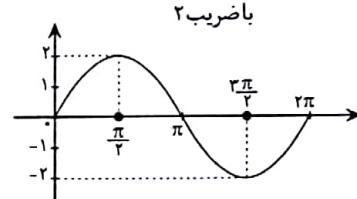
ب. نادرست (تابع $|x| = y$) نه صعودی نه نزولی است و در فاصله $(-\infty, 0)$ نزولی است. $(0/5)$ و در بازه $(0, +\infty)$ صعودی می‌باشد. $(0/25)$

ت. درست $(0/25)$

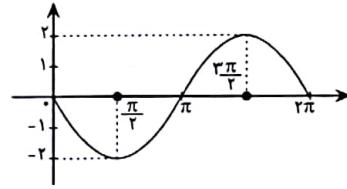
ب. x^6 $(0/25)$

ت. π $(0/25)$

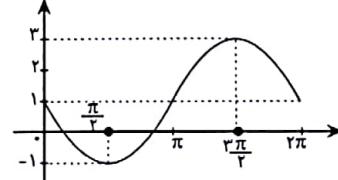
۱) انبساط عمودی $y = \sin x \xrightarrow{\text{باندیش}} y = 2\sin x \quad (0/5)$



۲) قرینه نسبت به محور طولها $\rightarrow y = -2\sin x \quad (0/5)$



۳) انتقال عمودی یک واحد سمت بالا $\rightarrow y = -2\sin x + 1 \quad (0/5)$



$$f(x) = \begin{cases} 2x & , x \in \mathbb{Q} \\ \frac{x^2}{3} & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , x \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{3} & , x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad (0/5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x^r}{1-(1+rx+rx^r+rx^r)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x^r}{1-1-rx-rx^r} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x^r}{-rx-rx^r}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)(1+x)}{-r(x-1)(x+r)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x+1)}{(-rx-1r)} = \frac{2}{2r} = \frac{1}{r}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{0}{0}$$

الف.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{(\sin x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x(1-\cos x)}{1-\cos^r x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^r x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-(-1)}{0^-} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-\sqrt{rx^r+rx}}{rx+\sqrt{rx}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2|x|}{rx} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2x}{rx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{rx} = \frac{-1}{r}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^r+rx)-(x_0^r+rx_0)}{x-x_0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^r-x_0^r)+(rx-rx_0)}{x-x_0} = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x-x_0)(x^r+xx_0+x_0^r)+r(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x-x_0)(x^r+xx_0+x_0^r+r)}{x-x_0} = rx_0^r+r = 0$$

$$y' = rx^r+r \quad \text{برابر است با } y = x^r+rx$$

پس مشتق تابع $y = x^r+rx$ را به کمک تعریف مشتق محاسبه نماییم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{rx-1}-2}{x-2} \times \frac{\sqrt{rx-1}+2}{\sqrt{rx-1}+2} = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{rx-1-4}{(x-2)(\sqrt{rx-1}+2)} = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{r(x-2)}{(x-2)(\sqrt{rx-1}+2)} = 0$$

$$= \frac{r}{4} \quad (x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4)$$

حال می‌توانیم معادله خط مماس را بنویسیم:

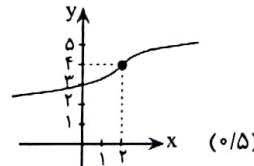
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = \frac{r}{4}(x - 2) \quad \text{معادله خط مماس:}$$

برای رسم نمودار تابع، باید نمودار $y = \sqrt[3]{x}$ را در دو واحد به راست و سپس ۴ واحد به بالا منتقال دهیم:

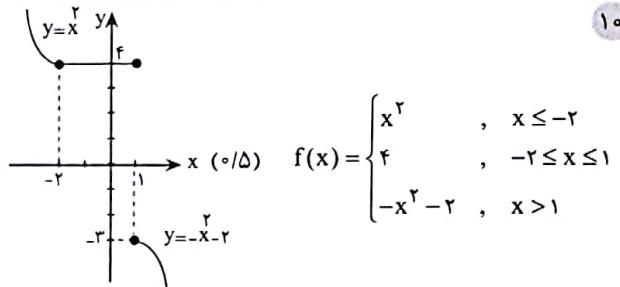
$$y = \sqrt[3]{x-2} + 4$$

هر خط افقی نمودار تابع را فقط در یک نقطه قطع می‌کند پس تابع مفروض، یک به یک یا وارون پذیر است.



$$y = \sqrt[3]{x-2} + 4 \Rightarrow y-4 = \sqrt[3]{x-2} \Rightarrow (y-4)^3 = x-2$$

$$x = (y-4)^3 + 2 \Rightarrow f^{-1} = y = (x-4)^3 + 2$$



با توجه به نمودار تابع $f(x)$ ، این تابع در بازه‌های $(-\infty, -2)$

$(-2, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است و در بازه $[1, +\infty)$

ثابت می‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{[x]+[-x]} = \frac{2^+-2}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Z} \\ -1 & , x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{2 \sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{2} |\sin x|} = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x \cos x}{-\sqrt{2} \sin x} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \cos(0) = -\sqrt{2}$$

پ. صورت و مخرج را در پرانتز چاق اتحاد چاق و لاغر ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{x-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{x-2} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2+2\sqrt[3]{x+9}}}{\sqrt[3]{x^2+2\sqrt[3]{x+9}}} = A$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(A)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{A} = \frac{1}{9+9+9} = \frac{1}{27}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x^r}{1-(1+rx)(r+rx)} = \frac{0}{0}$$