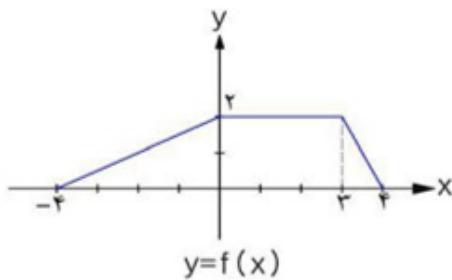


تابع زیر در بازه‌ی صعودی اکید و در بازه‌ی نزولی اکید و در بازه‌ی ثابت است.



با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$, نمودار $y = \frac{1}{2}f(4x)$ را رسم کنید.

۱ اگر $g = \left\{ \left(2, \sqrt{2} \right), \left(-1, 2 \right), \left(\frac{1}{4}, 3 \right), \left(1, \frac{3}{2} \right) \right\}$ و $f = \left\{ \left(0, 2 \right), \left(1, -1 \right), \left(3, -\frac{1}{4} \right), \left(-2, 3 \right), \left(-1, 0 \right) \right\}$ باشند.

الف) تابع $g - 2f$ را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

ب) تابع gof را به دست آورید.

ج) مقدار $\left(\frac{f}{g}\right)(1)$ را محاسبه کنید.

۲ اگر $f(x) = 4 - x$ و $g(x) = \sqrt{x+3}$ آن‌گاه:

الف) $(f - 2g)(1)$ را محاسبه نمایید.

ب) دامنه‌ی fog را بدست آورید.

۳ یک به یک بودن تابع $y = (x+2)^3$ را بررسی کرده و وارون آن را به دست آورید.

۴ ضابطه تابعی به صورت $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن π , مقدار ماکزیمم آن ۶ و مقدار مینیمم آن -۲ باشد.

۵ معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

۶ مقدار $\sin 22.5^\circ$ را به دست آورید.

اگر چندجمله‌ای $f(x) = x^3 + ax - 3$ بخش پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x - 2)$ را به دست آورید.

۱۰

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + x^2 + 1}{bx - x} = \frac{a}{b}$$

۱۱

حدود تابع زیر را بدون هم‌ارزی و قاعده‌ی هوپیتال محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{5x - 1}$$

۱۲

حد توابع زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+6}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg}^2 x$

ت) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^3 - 1}{x^2 + 2}$

۱۳

حد مقابل را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$$

۱۴

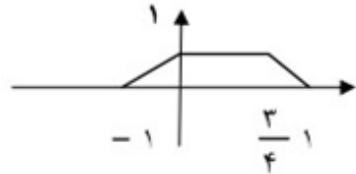
مشتق تابع $f(x) = \sqrt{5x-1}$ را در $x=2$ از راه تعریف مشتق محاسبه کنید.

۱۵

به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = x|x-1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

پاسخنامه تشریحی

۱) ثابت $[2, 5] \cup [0, 25]$: نزولی اکید $(5, +\infty)$: صعودی اکید



۱

۲

۳

$$\text{الف) } 2f - g = \left\{ \left(1, -\frac{7}{2} \right), (-1, -2) \right\} \quad (0/5)$$

$$\text{ب) } gof = \left\{ \left(1, \sqrt{2} \right), (1, 2) \right\} \quad (0/5)$$

$$\text{ج) } \left(\frac{f}{g} \right)(1) = -\frac{2}{3} \quad (0/5)$$

۴

(الف)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+2} \\ g(x) &= 4-x \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} h(x) &= f(x) - 2g(x) = \sqrt{x+2} - 2(4-x) \\ h(1) &= \sqrt{1+2} - 2(4-1) \Rightarrow h(1) = -4 \end{aligned} \right\}$$

$$D_g = \mathbb{R}, D_f = [-3, +\infty)$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } D_{fog} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 4-x \geq -3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 7\} \Rightarrow D_{fog} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 7\} \end{aligned}$$

۵

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$(x_1 + 2)^{\frac{1}{3}} - 2 = (x_2 + 2)^{\frac{1}{3}} - 2 \quad (0/25)$$

$$x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow y = (x + 2)^{\frac{1}{3}} - 2 \Rightarrow y + 2 = (x + 2)^{\frac{1}{3}} \quad (0/25) \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+2} - 2 \quad (0/25)$$

$$\text{تابع وارون} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2} - 2 \quad (0/25)$$

۶

$$\frac{\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{\pi} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} |a| + c = 6 \\ -|a| + c = -2 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} |a| = 4 \\ c = 2 \end{array}$$

هریک از توابع $y = 4 \sin(-2x) + 2$ یا $y = -4 \sin(2x) + 2$ و یا $y = 4 \sin(2x) + 2$ یا $y = -4 \sin(-2x) + 2$ صحیح است هر مورد نوشته شود مورد قبول است.

$$\forall \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = -2\sin(\alpha)\sin(\beta) \Rightarrow \cos(\alpha)(\cos(\alpha) - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi \end{cases}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$f(-1) = 0 \quad (0/20) \Rightarrow 1 - a - 3 = 0 \Rightarrow a = -2 \quad (0/20)$$

$$f(2) = 4 - 4 - 3 = -3 \quad (0/20)$$

$$b = 3 \quad (0/20) \quad \frac{a}{b} = \frac{-2}{3} \rightarrow a = -2 \quad (10/20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{tx - |x|}{x\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{tx + x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{tx}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} t = 0 \quad (0/20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{3 - \sqrt{x+6}} = \frac{?}{?} \quad \text{میهمان}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9) \times (3 + \sqrt{x+6})}{(3 - \sqrt{x+6}) \times (3 + \sqrt{x+6})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(3 + \sqrt{x+6})}{9 - (x+6)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(3 + \sqrt{x+6})}{-(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(3 + \sqrt{x+6})}{-1} = -36$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} = \frac{?}{?} \quad \text{میهمان}$$

صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم. سپس عامل صفرگذنده یعنی $x - 2$ را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = +\infty \quad \text{میهمان}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty \quad \text{میهمان}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x+2)-1}{(x-2)(x+2)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$$f(y) = y \quad f(y + \Delta x) = 5(y + \Delta x) - 1 = \sqrt{5\Delta x + 9}$$

$$f'(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(y + \Delta x) - f(y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5\Delta x + 9} - y}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{5\Delta x + 9} + y}{\sqrt{5\Delta x + 9} + y}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5\Delta x + 9 - 9}{\Delta x (\sqrt{5\Delta x + 9} + y)} \Rightarrow f'(y) = \frac{5}{y}$$

تابع f در $y = 1$ پیوسته است. ۰/۲۵

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ ۰/۲۵} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x |x - 1| - 1}{x - 1} \text{ ۰/۲۵} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = 1 & ۰/۲۵ \\ f'_-(1) = -1 & ۰/۲۵ \end{cases}$$

پس تابع f در $y = 1$ مشتق پذیر نیست. ۰/۲۵