

باسمه تعالی
وزارت آموزش و پرورش
اداره کل آموزش و پرورش

 مهر آموزشگاه Elnaky.com	مشخصات دانش آموز	مشخصات امتحان	زمان امتحان
	شماره ی کارت:	درس: ریاضی ۳	ساعت:
	نام:	رشته: علوم تجربی	روز و تاریخ:
	نام خانوادگی:	پایه: دوازدهم	مدت پاسخگویی: ۱۰۰ دقیقه

توجه: الف: این آزمون شامل ۲ صفحه و ۱۷ سؤال می باشد. ب: استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.

ردیف	سؤال	نمره
۱	<p>درستی یا نادرستی هر یک از عبارات های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) هر تابع یک به یک، اکیدا یکنوا است.</p> <p>ب) اگر مشتق چپ و راست تابعی در یک نقطه موجود و برابر نباشند، آن نقطه، یک نقطه ی گوشه ای تابع است.</p> <p>پ) اگر تابعی صعودی باشد، آنگاه آهنگ تغییرات متوسط آن همواره منفی است.</p> <p>ت) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن یک مخروط است.</p>	۱
۲	<p>در هر مورد گزینه ی درست را انتخاب کنید.</p> <p>الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x}$ برابر کدام است؟</p> <p style="text-align: center;">-۱ (۱) -∞ (۲) ۱ (۳) +∞ (۴)</p> <p>ب) کدام یک از عبارات های زیر درست است؟</p> <p>(۱) هر نقطه ی بحرانی تابع، یک نقطه ی اکسترمم نسبی است.</p> <p>(۲) هر تابع پیوسته هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق</p> <p>(۳) هر نقطه ی اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه ی بحرانی است.</p> <p>(۴) هر تابع پیوسته، مشتق پذیر است.</p> <p>پ) اگر خروج از مرکز یک بیضی به سمت صفر میل کند آنگاه بیضی:</p> <p>(۱) به دایره نزدیک می شود.</p> <p>(۲) تغییر نمی کند.</p> <p>(۳) به یک خط راست نزدیک می شود.</p> <p>(۴) فاصله ی کانونی زیاد می شود.</p>	۰/۷۵
۳	<p>در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.</p> <p>الف) اگر $f(x) = x^3$ باشد، حاصل $(f^{-1})'(8)$ برابر است.</p> <p>ب) اگر آب طوری وارد استوانه ای به شعاع قاعده ۴ سانتی متر شود که ارتفاع آب در ثانیه ی t به مقدار t^2 سانتیمتر بالا بیاید، آهنگ لحظه ای تغییرات حجم آب در ثانیه ی سوم برابر است.</p> <p>پ) اگر صفحه ی p در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از راس آن عبور نکند، شکل حاصل از برخورد صفحه ی p با سطح مخروطی یک خواهد بود.</p>	۰/۷۵
۴	<p>اگر $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ و $g(x) = \frac{-3x}{x - \sqrt{5}}$ دو تابع باشند، دامنه ی تابع $g \circ f$ را به دست آورید.</p>	۱

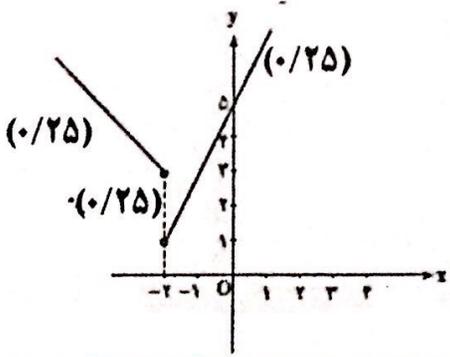
۰/۷۵	۵	اگر ضابطه‌ی تابع f به صورت $x \leq 3$ و $f(x) = x^2 - 6x + 7$ باشد، ضابطه‌ی وارون تابع f را به دست آورید.
۱	۶	ضابطه‌ی تابع سینوسی بنویسید که در آن $T = \frac{\pi}{3}$ و $\max = 4$ و $\min = -6$ باشند.
۱	۷	معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید. $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$
۱/۷۵	۸	حاصل حدهای زیر را بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{16 - x^2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 + 2x^2 - 1}{4x - 5}$
۱	۹	اگر $f(x) = x^2 - 3x + 2$ باشد، مقدار $f'(5)$ را به کمک تعریف مشتق به دست آورید.
۱/۷۵	۱۰	تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x, & x \geq -2 \\ -x^2 - x, & x < -2 \end{cases}$ داده شده است. الف) نشان دهید $f'(-2)$ وجود ندارد. ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید. پ) نمودار تابع f' را رسم کنید.
۱/۵	۱۱	مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x) = (\sqrt{3x+1})(x^2 - 2x + 4)$ ب) $g(x) = \left(\frac{x^2 + 3x}{x^3 - 4}\right)^6$
۱/۵	۱۲	اکستریم‌های مطلق تابع $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ را در دامنه‌ی تعریفش به دست آورید.
۱/۵	۱۳	مسططیلی به مساحت ۲۵ سانتی متر مربع داریم. طول و عرض مستطیل را به گونه‌ای بیابید که محیط مستطیل حداقل ممکن باشد.
۱	۱۴	کانون‌های یک بیضی نقاط $(5, 2)$ و $(-3, 2)$ هستند. اگر طول قطر کوچک آن ۶ باشد، مختصات رأس‌های روی قطر بزرگ و خروج از مرکز بیضی را بیابید.
۰/۷۵	۱۵	معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $(2, 3)$ را بنویسید که بر خط به معادله‌ی $8x - 6y + 22 = 0$ مماس باشد.
۱	۱۶	وضعیت دو دایره به معادلات $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 49$ و $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ نسبت به هم چگونه است؟ چرا؟
۲	۱۷	سه جعبه‌ی یکسان داریم، در اولین جعبه ۲۰ مهره داریم که ۴ تایی آنها آبی است. در جعبه‌ی دوم مهره آبی وجود ندارد و در جعبه‌ی سوم ۸ مهره داریم که ۵ تایی آنها آبی است. اگر با چشم بسته، یکی از جعبه‌ها را انتخاب کنیم و از آن یک مهره بیرون بیاوریم، با کدام احتمال مهره انتخابی آبی نیست؟
۲۰	جمع	

موفق باشید.

باسمه تعالی
وزارت آموزش و پرورش
اداره کل آموزش و پرورش

	زمان امتحان	مشخصات امتحان	مشخصات دانش آموز
راهنمای تصحیح	ساعت:	درس: ریاضی ۳	شماره‌ی کارت:
	روز و تاریخ:	رشته: علوم تجربی	نام:
	مدت پاسخگویی: ۱۰۰ دقیقه	پایه: دوازدهم	نام خانوادگی:

ردیف	پاسخ‌ها
۱	الف) نادرست (ب) درست (پ) نادرست (ت) نادرست هر مورد ۰/۲۵ نمره
۲	الف) گزینه ۴ (ب) گزینه ۳ (پ) گزینه ۱ هر مورد ۰/۲۵ نمره
۳	الف) $\frac{1}{12}$ (ب) 96π (پ) سهمی هر مورد ۰/۲۵ نمره
۴	$D_f = [-3, 3]$, $D_g = R - \{\sqrt{5}\}$ (۰/۲۵) $D_{g \circ f} = \{x \in [-3, 3] \mid \sqrt{9 - x^2} \in R - \{\sqrt{5}\}\} = [-3, 3] - \{-2, 2\}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)
۵	$y = x^2 - 6x + 7 = (x - 3)^2 - 2 \Rightarrow \sqrt{y + 2} = x - 3 \Rightarrow \sqrt{y + 2} = -(x - 3)$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) $\Rightarrow f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x + 2}$ (۰/۲۵)
۶	$c = -1$ و $(a = 5 \text{ یا } a = -5)$ و $(b = 6 \text{ یا } b = -6)$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) یکی از ضابطه‌ها نوشته شود کافی است. مثلاً $(۰/۲۵) y = 5 \sin 6x - 1$
۷	تغییر متغیر $\cos x = t$ و حل معادله‌ی جدید و رسیدن به $t = 3$, $t = \frac{1}{3}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) که $\cos x = t = 3$ قابل قبول نیست و $\cos x = t = \frac{1}{3}$ قابل قبول است پس جواب‌های کلی می‌شوند: $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in Z$ و $x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$, $k \in Z$ (۰/۲۵) ^۳ (۰/۲۵) ^۳
۸	الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{16 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{16 - x^2} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{-(x - 4)(x + 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{32}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^7}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^6}{4} = +\infty$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱	$f'(\delta) = \lim_{x \rightarrow \delta} \frac{f(x) - f(\delta)}{x - \delta} = \lim_{x \rightarrow \delta} \frac{(x^2 - 2x + 2) - 12}{x - \delta} = \lim_{x \rightarrow \delta} \frac{x^2 - 2x - 10}{x - \delta}$ $= \lim_{x \rightarrow \delta} \frac{(x - \delta)(x + 2)}{x - \delta} = 7$	۹
۱/۷۵	<p>الف) $\begin{cases} f'_+(-2) = 1 \\ f'_-(-2) = 3 \end{cases} \Rightarrow f'(-2) \text{ وجود ندارد.}$</p> <p>ب) $f'(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x > -2 \\ -2x - 1, & x < -2 \end{cases}$</p> <p>پ)</p> 	۱۰
۱/۵	<p>الف) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{2x+1}}(x^2 - 2x + 4) + (2x - 2)\sqrt{2x+1}$</p> <p>ب) $g'(x) = 6 \times \frac{(2x+3)(x^2-4) - 2x^2(x^2+3x)}{(x^2-4)^2} \times \left(\frac{x^2+3x}{x^2-4}\right)^5$</p>	۱۱
۱/۵	<p>$D_f = [-2, 2]$ $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$</p> <p>مشتق در $x=0$ صفر می شود و در نقاط $x=2$ و $x=-2$ وجود ندارد. از طرفی نقاط $x=2$ و $x=-2$ نقاط ابتدایی و انتهایی بازه دامنه هستند، پس نقطه‌ی بحرانی نیستند و تابع تنها در $x=0$ نقطه بحرانی دارد.</p> <p>$f(0) = 2$, $f(-2) = 0$, $f(2) = 0$</p> <p>بنابراین مینیمم مطلق تابع صفر است که در $x=2$ و $x=-2$ رخ می دهد. ماکزیمم مطلق تابع ۲ است که در $x=0$ رخ می دهد.</p>	۱۲
۱/۵	<p>$S = x \cdot y = 25 \Rightarrow y = \frac{25}{x}$, $x > 0$ و $y > 0$</p> <p>$P = 2x + 2y \Rightarrow P(x) = 2x + \frac{50}{x} \Rightarrow P'(x) = \frac{2x^2 - 50}{x^2} \rightarrow x = \pm 5$</p> <p>از بین نقاط $x=5$ و $x=-5$ و با توجه به اینکه $y > 0$ و $x > 0$، تابع تنها در $x=5$ نقطه‌ی بحرانی دارد.</p> <p>بنابراین برای اینکه محیط مستطیل مینیمم شود باید $y=5$ و $x=5$ باشد.</p>	۱۳

۱	$c=۴$, $BB'=۶ \Rightarrow b=۳ \Rightarrow a=\sqrt{۹+۱۶}=۵$ (۰/۲۵) $O=(۱,۲) \rightarrow A=(۱+۵,۲)=(۶,۲)$ و $A'=(۱-۵,۲)=(-۴,۲)$ و $e=\frac{۴}{۵}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)	۱۴
۰/۷۵	$r = \frac{ (۸ \times ۲) - (۶ \times ۲) + ۲۲ }{\sqrt{۸^۲ + ۶^۲}} = ۲$ (۰/۲۵) $(x-۲)^۲ + (y-۲)^۲ = ۴$ معادله‌ی دایره (۰/۲۵)	۱۵
۱	$(x-۱)^۲ + (y+۵)^۲ = ۴۹ \Rightarrow O=(۱,-۵)$ و $r=۷$ (۰/۲۵) $x^۲ + y^۲ + ۴x - ۶y - ۳ = ۰ \Rightarrow O' = (-۲, ۳)$ و $r' = \frac{۱}{۲} \sqrt{۴^۲ + (-۶)^۲} - ۳(-۳) = ۴$ (۰/۲۵) $d = OO' = \sqrt{۳^۲ + (-۱۱)^۲} = \sqrt{۱۳۰}$ (۰/۲۵) $d > r + r'$ دو دایره بیرون هم هستند. (۰/۲۵)	۱۶
۲	پیشامد انتخاب جعبه‌ها را به ترتیب با $A_۱$, $A_۲$, $A_۳$ و خارج شدن مهره‌ی آبی را با B نمایش می‌دهیم. بنابراین $P(B)$ را باید بیابیم. $P(A_۱) = P(A_۲) = P(A_۳) = \frac{۱}{۳}$ (۰/۲۵) $P(B) = P(A_۱)P(B A_۱) + P(A_۲)P(B A_۲) + P(A_۳)P(B A_۳)$ (۰/۲۵) $= (\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۵}) + (\frac{۱}{۳} \times ۰) + (\frac{۱}{۳} \times \frac{۵}{۸}) = \frac{۱}{۱۵} + \frac{۵}{۲۴} = \frac{۱۱}{۴۰}$ (۰/۲۵) $P(B') = ۱ - P(B) = ۱ - \frac{۱۱}{۴۰} = \frac{۲۹}{۴۰}$ (۰/۲۵)	۱۷
۲۰	جمع	

همکار گرامی: لطفاً به راه حل‌های درست دیگر به تناسب نمره دهید.