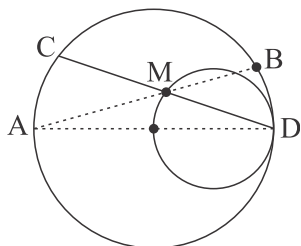


۱ در شکل زیر، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و طول کمان AC برابر $\frac{4\pi}{3}$ است. حاصل $MA \times MB$ ، کدام است؟



(۱) ۸

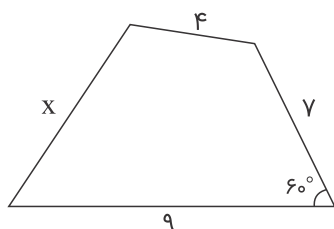
(۲) ۹

(۳) ۶

(۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۲ چهار ضلعی زیر، قابل محاط در یک دایره است. $(x + 2)$ کدام است؟



(۱) $\sqrt{51}$

(۲) $\sqrt{55}$

(۳) $\sqrt{57}$

(۴) $\sqrt{59}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۳ دو دایره C و C' به شعاع ۱۷ مماس برون هستند. چند خط مماس می‌توان بر C' رسم کرد که در C وترتی به طول ۱۶ ایجاد کند؟

(۲) ۳

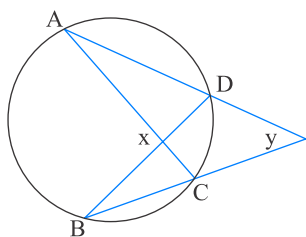
(۱) ۲

(۴) بی‌شمار

(۳) ۴

تالیفی صبا مهدوی

در شکل زیر اندازه وترهای AD و BC به ترتیب $R\sqrt{3}$ و $R\sqrt{2}$ است. اگر اندازه کمان $\widehat{AB}$ ، 20° درجه بیشتر از اندازه کمان $\widehat{CD}$ باشد، نسبت $\frac{x}{y}$ کدام است؟ (R شعاع دایره است)



(۱) $7/5$

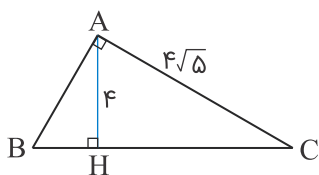
(۲) 7

(۳) $6/5$

(۴) 6

تالیفی نرگس کارگر

در شکل زیر، طول کوتاه‌ترین میانه مثلث ABH کدام است؟



(۱) $\sqrt{17}$

(۲) $\sqrt{5}$

(۳) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

(۴) $\sqrt{8}$

تالیفی حسین سعیدی

در مثلث ABC ، M و N به ترتیب مرکز دایره‌های محاطی داخلی و خارجی نظیر رأس A هستند و D محل تلاقی ضلع BC و پاره خط MN است.

اگر $BD = 3$ ، $CD = 2$ و $ND = 10$ باشد، طول MD کدام است؟

(۲) $2/4$

(۱) $1/2$

(۴) $4/8$

(۳) $3/6$

تالیفی نرگس کارگر

در مثلث ABC به اضلاع $AB = 8$ ، $AC = 10$ و $BC = 12$ ، نیمساز زاویه داخلی B ، میانه AM را در D قطع می‌کند. طول DM کدام است؟

(۲) $\frac{3\sqrt{46}}{7}$

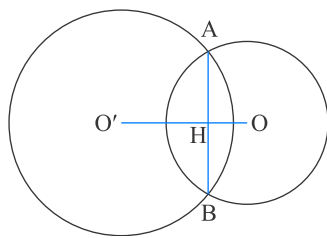
(۱) $\frac{24}{7}$

(۴) $\frac{8\sqrt{23}}{14}$

(۳) $\frac{3\sqrt{23}}{4}$

تالیفی صبا مهدوی

در شکل زیر اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره ۶ سانتی‌متر و $AB = 4$ است. اگر $OH \times O'H = 5$ آنگاه حاصل ضرب شعاع‌های دو دایره کدام است؟



(۱) ۱۴

(۲) ۱۵

(۳) ۱۶

(۴) ۱۷

تالیفی نرگس کارگر

دایره‌های $C(O, R)$ و $C'(O', R)$ از مراکز یکدیگر می‌گذرند و در نقاط A و B متقاطع‌اند. اگر مساحت چهار ضلعی $OA O'B$ برابر $6\sqrt{3}$ باشد، مساحت ناحیه مشترک دو دایره کدام است؟

۹

(۱) $4\pi - 3\sqrt{3}$ (۲) $6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$ (۳) $12\pi - 9\sqrt{3}$ (۴) $8\pi - 6\sqrt{3}$

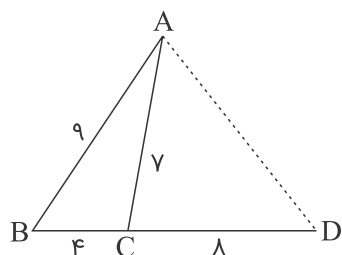
تالیفی حسین سعیدی

چهار ضلعی ABCD محاط در یک دایره است. اگر AB دورترین وتر و BC نزدیک‌ترین وتر نسبت به مرکز این دایره باشند، کدام رابطه بین زاویه‌ها ممکن است برقرار نباشد؟

۱۰

(۱) $\hat{D} > \hat{C}$ (۲) $\hat{B} > \hat{C}$ (۳) $\hat{A} > \hat{B}$ (۴) $\hat{B} > \hat{D}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶



(۱) ۹

(۲) $3\sqrt{10}$

(۳) ۱۰

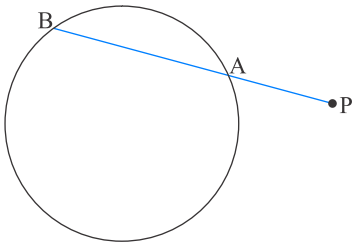
(۴) $6\sqrt{3}$

در شکل زیر، اندازه پاره خط AD، کدام است؟

۱۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

در شکل زیر، فاصله نقطه P تا نزدیک‌ترین نقطه دایره، برابر شعاع دایره است. اگر $\widehat{AB} = 90^\circ$ ، طول PA چند برابر شعاع دایره است؟



$$(1) \frac{\sqrt{13} - \sqrt{3}}{2}$$

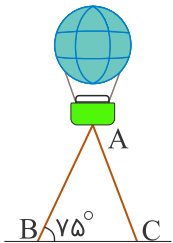
$$(2) \frac{\sqrt{11} - \sqrt{2}}{2}$$

$$(3) \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}$$

$$(4) \frac{\sqrt{14} - \sqrt{2}}{2}$$

تالیفی فرزاد زمانی نژاد

مطابق شکل، یک بالن با دو طناب با طول‌های مساوی به زمین متصل شده است. به خاطر نیروی باد می‌خواهیم یک طناب دیگر در سمت چپ نقطه B از بالن به زمین (نقطه D) متصل کنیم، به طوری که زاویه آن با افق 45° باشد. اگر ارتفاع بالن از سطح زمین ۱۶۸ m باشد، طول طناب جدید و فاصله نقطه D تا نقطه B به ترتیب از راست به چپ چند متر باید باشد؟
($\sin 45^\circ = 0.7$, $\cos 45^\circ \simeq 0.96$)



$$(1) 125 - 240$$

$$(2) 125 - 120$$

$$(3) 250 - 240$$

$$(4) 250 - 120$$

تالیفی حسین سعیدی

معادله اضلاع یک مثلث به صورت $x = 0$, $y = 0$ و $x + y = 4$ است. مساحت دایره محیطی این مثلث برابر کدام است؟

$$(2) 8\pi$$

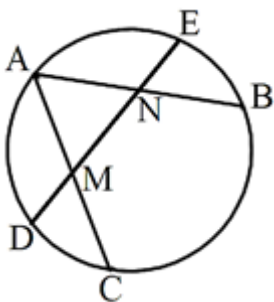
$$(1) \pi$$

$$(4) 2\pi$$

$$(3) 4\pi$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴۶

در شکل A، B و C سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند. وتر DE از وسط AB و AC می‌گذرد. نسبت $\frac{MN}{DM}$ چقدر است؟



$$(1) 1 + \sqrt{5}$$

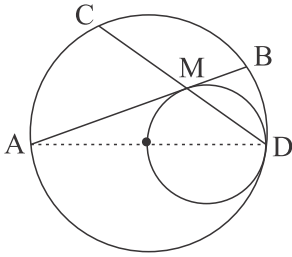
$$(2) 2$$

$$(3) \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$(4) \frac{2 + \sqrt{5}}{2}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۳۹۶۳

در شکل زیر، دو دایره در نقطه D مماس داخل و شعاع یکی با قطر دیگری، برابر است. وتر AB از دایره بزرگتر بر دایره داخل، در نقطه M، مماس است. نسبت $\frac{MC}{MB}$ ، کدام است؟



(۱) $\sqrt{2}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

نقطه A در صفحه دو خط متقاطع d و d' است. در رسم مثلث متساوی‌الاضلاع به رأس A که دو رأس دیگر آن بر روی هریک از دو خط مفروض باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

(۱) انتقال (۲) بازتاب

(۳) تجانس (۴) دوران

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

در مثلث ABC نقطه M وسط BC است. نیمسازهای دو زاویه AMB و AMC دو ضلع مثلث را در P و Q قطع می‌کنند. نقطه O محل تلاقی AM و PQ است. OM برابر کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}BC$ (۲) AQ

(۳) OA (۴) OP

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

تصویر یک خط تحت تبدیلی بر روی خودش منطبق شده است و تحت تبدیل دیگری بر خودش عمود شده است. تبدیل اول می‌تواند و تبدیل دوم می‌تواند باشد.

(۱) بازتاب - بازتاب (۲) دوران - انتقال

(۳) انتقال - تجانس (۴) تجانس - تجانس

تالیفی حسین سعیدی

طول ارتفاع یک مثلث با اعداد ۲، ۳ و ۴ متناسب‌اند. شعاع دایره محاطی داخلی این مثلث چندبرابر بزرگ‌ترین ارتفاع آن است؟

(۱) $\frac{12}{13}$ (۲) $\frac{3}{13}$

(۳) $\frac{4}{13}$ (۴) $\frac{6}{13}$

تالیفی حسین سعیدی

۲۱

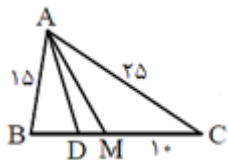
در مثلث ABC با اضلاع $AB = ۵$ ، $AC = ۷$ و $BC = ۸$ واحد، نیمساز داخلی زاویه A ، نیمسازهای زاویه داخلی و خارجی B را در O و O' قطع می‌کند. اندازه تصویر قائم OO' ، بر روی BC ، کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\frac{۱}{۵}$
(۳) ۲
(۴) $\frac{۲}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۲

اگر M وسط ضلع و D پای نیمساز وارد بر ضلع باشد، مساحت مثلث ADM کدام است؟



- (۱) $\frac{۱۸}{۲۵}$
(۲) $\frac{۱۸}{۷۵}$
(۳) $\frac{۱۸}{۵}$
(۴) ۱۸

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۴

۲۳

در مثلثی با اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳، شعاع کوچک‌ترین دایره محاطی خارجی چقدر است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۵
(۴) ۶

تالیفی محمد حسینی فرد

۲۴

در مثلث ABC داریم $\frac{BC}{\cos \hat{A}} = \frac{AC}{\cos \hat{B}} = ۲$. اگر $\hat{C} = ۱۲۰^\circ$ ، آنگاه طول ضلع کوچک این مثلث کدام است؟

- (۱) $\sqrt{۳}$
(۲) ۲
(۳) $\sqrt{۲}$
(۴) ۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۲۵

اگر نقطه $B(۳, -۲)$ دوران یافته نقطه $A(-۱, ۴)$ باشد، کدام نقطه می‌تواند مرکز دوران باشد؟

- (۱) $(۴, ۳)$
(۲) $(۳, ۳)$
(۳) $(۵, ۴)$
(۴) $(۳, ۵)$

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

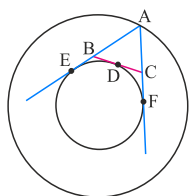
۲۶

در مثلثی به طول اضلاع ۱۵ و ۱۳ و ۷ واحد، نقطه تلاقی نیمسازهای درونی، نیمساز بزرگ‌ترین زاویه مثلث را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

- (۱) $\frac{۳}{۵}$
(۲) $\frac{۲}{۳}$
(۳) $\frac{۳}{۴}$
(۴) $\frac{۵}{۶}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

در دو دایره هم‌مرکز، از نقطه A روی دایره بزرگ دو مماس AE و AF و از نقطه D روی کمان کوچک‌تر EF، مماس دیگری بر دایره داخلی رسم شده است. با تغییر مکان A و D کدام بیان در مثلث ABC درست است؟



(۱) محیط ثابت - مساحت متغیر

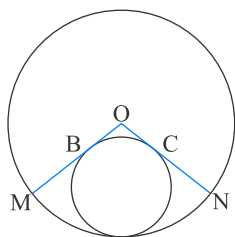
(۲) محیط متغیر - مساحت ثابت

(۳) محیط ثابت - مساحت ثابت

(۴) محیط متغیر - مساحت متغیر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

در شکل زیر اگر $\widehat{MN} = 100^\circ$ ، اندازه کمان BC کدام است؟



(۱) 75°

(۲) 90°

(۳) 80°

(۴) 85°

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

در مثلث قائم‌الزاویه با طول اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد، دایره‌ای با مرکز محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث بر هر سه ضلع مماس می‌کنیم. شعاع این دایره کدام است؟

(۱) ۲

(۲) $1/5$

(۳) ۱

(۴) $5/75$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نقطه M خارج دایره (O, ۴) به فاصله ۱۰ از مرکز دایره قرار دارد. دایره‌ای به قطر OM رسم می‌کنیم تا دایره را در T و T' قطع کند، فاصله O از TT' چقدر است؟

(۱) $5/4$

(۲) $1/2$

(۳) $1/6$

(۴) $5/8$

تالیفی حسین سعیدی

اندازه ارتفاع‌های مثلثی ۱۲ و ۲۰ و اندازه سومین ارتفاع، سه برابر شعاع دایره محاطی داخلی است. اندازه شعاع دایره محاطی داخلی در این مثلث چقدر است؟

(۱) ۴

(۲) ۸

(۳) ۱۰

(۴) ۵

تالیفی محمد حسینی فرد

۳۲

اگر T یک تبدیل باشد، چه تعداد از نتیجه‌گیری‌های دوشرطی زیر، صحیح است؟
 الف) T طولیاست اگر و تنها اگر حداکثر یک نقطه ثابت داشته باشد.
 ب) T طولیاست اگر و تنها اگر شیب خط را حفظ کند.
 ج) T جهت شکل را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر شیب خط را حفظ کند.
 د) T طولیاست اگر و تنها اگر زاویه را حفظ کند.

(۲) ۱

(۱) صفر

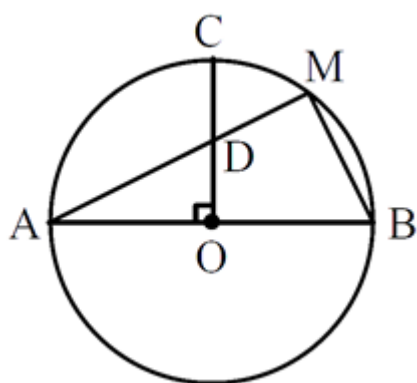
(۴) ۳

(۳) ۲

تالیفی مجید قهرمانی

۳۳

در شکل زیر O مرکز دایره است. مقدار $MA + MB$ کدام است؟ ($OD = ۱۵$ و $DC = ۵$)



(۱) ۵۶

(۲) ۵۸

(۳) ۶۵

(۴) ۸۵

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۶

۳۴

در مثلثی به اضلاع ۸ و ۶ و ۸ دایره محاطی داخلی و کوچک‌ترین دایره محاطی خارجی را رسم می‌کنیم. طول مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟

(۲) ۷

(۱) ۱۱

(۴) ۶

(۳) ۸

تالیفی حسین سعیدی

۳۵

در مثلث ABC ($\hat{A} = 90^\circ, AB = ۳, AC = ۴$) ارتفاع AH و نیمساز داخلی AD رسم شده است. اندازه DH کدام می‌باشد؟

(۲) $\frac{۵}{۱۴}$ (۱) $\frac{۱۲}{۳۵}$ (۴) $\frac{۱۵}{۲۸}$ (۳) $\frac{۷}{۱۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۳۶

مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد برابر $۲۴\sqrt{۵}$ واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟

(۲) ۲۲

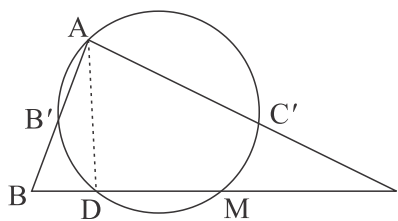
(۱) ۲۱

(۴) ۲۴

(۳) ۲۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

در مثلث ABC نقطه M وسط ضلع BC و AD نیمساز زاویه A است. دایره محیطی مثلث ADM رسم شده است. نسبت $\frac{BB'}{CC'}$ برابر کدام است؟

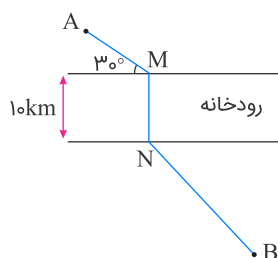


(۱) ۱

(۲) $\frac{AB}{AC}$ (۳) $\frac{AB'}{AC'}$ (۴) $\frac{DB}{DM}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

در شکل زیر، فاصله نقاط A و B از رودخانه به ترتیب ۲۰ و ۵۰ کیلومتر است. کمترین مقدار $AM + MN + NB$ کدام است؟



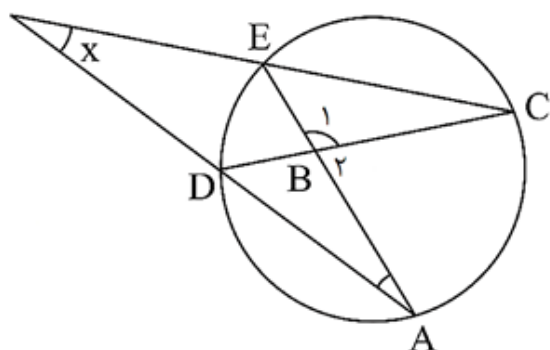
(۱) ۸۰

(۲) ۱۰۰

(۳) ۱۴۰

(۴) ۱۵۰

تالیفی حسین سعیدی

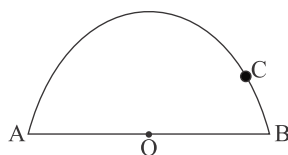


در شکل زیر $\hat{A} = 40^\circ$ و $\hat{B}_1 = 75^\circ$. در این صورت $\hat{x}$ چقدر است؟

(۱) 20° (۲) 25° (۳) 30° (۴) 35°

تالیفی امیر عباس ریحانکار

در شکل زیر، فاصله نقطه C از قطر AB برابر با نصف شعاع این نیمدایره است. اندازه کمان AC چند درجه است؟



(۱) ۱۶۰

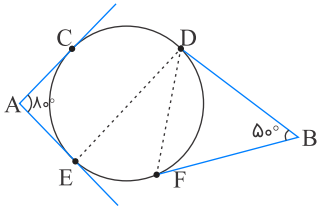
(۲) ۱۵۰

(۳) ۱۴۵

(۴) ۱۲۰

تالیفی نرگس کارگر

در شکل زیر، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند. اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه $\widehat{EDF}$ چند درجه است؟



(۱) ۲۵

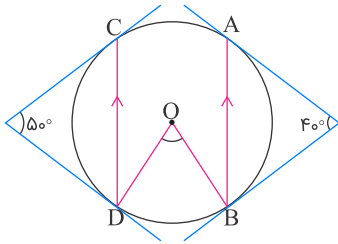
(۲) ۳۰

(۳) ۳۵

(۴) ۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

باتوجه به شکل اندازه زاویه O کدام است؟



(۱) ۶۰

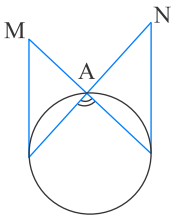
(۲) ۵۰

(۳) ۴۵

(۴) ۴۰

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

در شکل زیر $\widehat{M} + \widehat{N} = 60^\circ$ است. زاویه $\widehat{A}$ چند درجه است؟



(۱) ۱۶۰

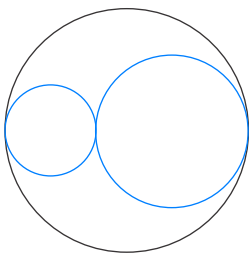
(۲) ۷۰

(۳) ۱۴۰

(۴) ۸۰

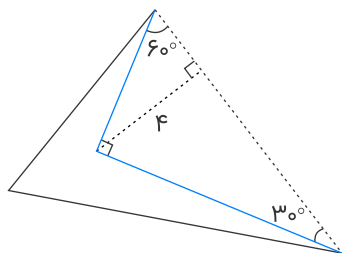
تالیفی حسین سعیدی

در شکل زیر شعاع دایره متوسط ۶ و شعاع دایره کوچک ۲ است. طول وتری از دایره بزرگ که مماس مشترک غیرخارجی دو دایره دیگر است کدام است؟

(۱) $\sqrt{48}$ (۲) $\sqrt{54}$ (۳) $2\sqrt{48}$ (۴) $2\sqrt{54}$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

شکل زیر یک زمین کشاورزی است. اگر بخواهیم مساحت را بدون تغییر محیط بیشینه کنیم، چقدر به مساحت زمین افزوده می‌شود؟



$$(1) \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

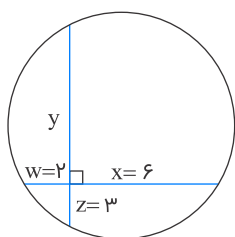
$$(2) \frac{64\sqrt{3}}{3}$$

$$(3) \frac{64\sqrt{3}}{3} + 32$$

$$(4) \frac{32\sqrt{3}}{3} + 32$$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

در شکل زیر شعاع دایره چندبرابر $\sqrt{65}$ است؟



$$(1) \frac{1}{2}$$

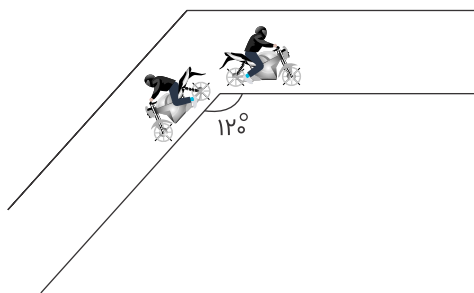
$$(2) \frac{1}{3}$$

$$(3) \frac{3}{4}$$

$$(4) \frac{3}{5}$$

تالیفی امیر خمسه

دو موتورسوار مطابق شکل، از یک نقطه در دو جاده متفاوت که زاویه بین آن‌ها 120° است، با سرعت‌های ۲۴ و ۲۱ کیلومتر در ساعت از هم دور می‌شوند. بعد از یک ساعت، دو موتورسوار در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟



$$(1) 40$$

$$(2) 42$$

$$(3) 39$$

$$(4) 38$$

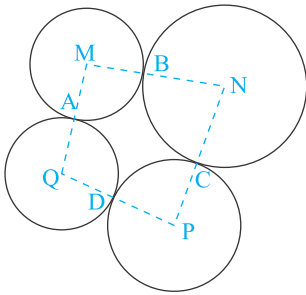
تالیفی میثم امین

مطابق شکل، چهار دایره به مراکز M ، N ، P و Q بر هم مماس‌اند و نقاط A ، B ، C و D نقاط تماس آن‌ها است. چنداناً از گزاره‌های زیر، درست می‌باشد؟

(الف) چهار ضلعی $ABCD$ محاطی است.

(ب) چهار ضلعی $MNPQ$ محیطی است.

(ج) مرکز دایره محیطی $ABCD$ بر مرکز دایره محاطی $MNPQ$ منطبق است.



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

تالیفی محمد حسینی فرد

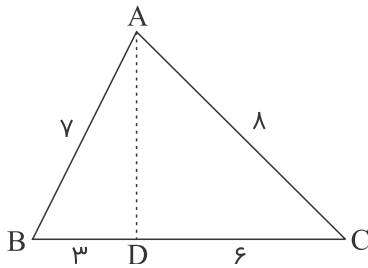
در شکل زیر، اندازه پاره خط AD ، کدام است؟

(۱) $\sqrt{37}$

(۲) ۶

(۳) $2\sqrt{7}$

(۴) $2\sqrt{10}$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

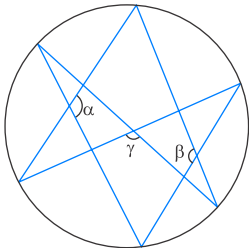
در شکل زیر زاویه γ کدام است؟

(۱) $\frac{\alpha + \beta}{2}$

(۲) $180 - \frac{\alpha + \beta}{2}$

(۳) $360 - (\alpha + \beta)$

(۴) $360 - \frac{\alpha + \beta}{2}$



تالیفی حسین سعیدی

دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۱۲ در نقطه A مماس خارج‌اند. خطی از نقطه A گذشته و در دایره بزرگ‌تر وترى به طول ۲۰ ایجاد می‌کند. طول وترى که این خط در دایره کوچک‌تر ایجاد می‌کند، کدام است؟

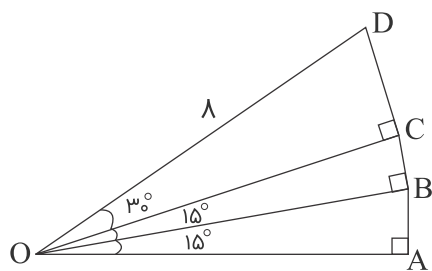
(۲) ۲

(۱) ۵

(۴) ۴

(۳) ۳

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم



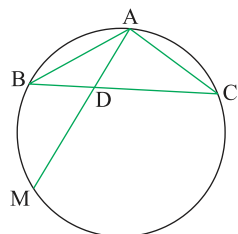
تالیفی میثم امین

(۱) ۲

(۲) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{7} - 1$

(۴) $\sqrt{3}$

در شکل زیر $AB = AC = \sqrt{3}$ و $DM = 2$ ، اندازه AD کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $1/25$

(۳) $1/5$

(۴) $1/75$

تالیفی نرگس کارگر

دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ و خط‌المرکزین ۱۰ مفروض‌اند. فاصله محل برخورد مماس مشترک‌های داخلی از محل برخورد مماس مشترک‌های خارجی آن‌ها کدام است؟

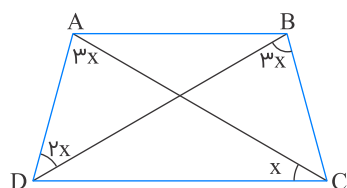
(۲) ۲۳

(۱) ۲۴

(۴) ۲۵

(۳) ۲۲

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

در شکل زیر نسبت $\frac{BD}{CD}$ کدام است؟

(۱) ۱

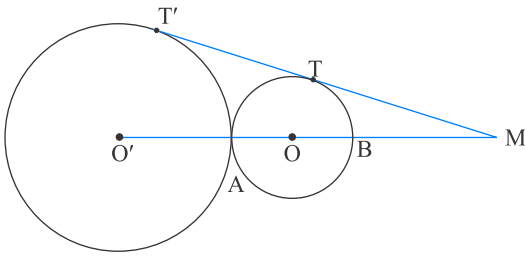
(۲) ۲

(۳) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(۴) $\sqrt{3}$

تالیفی حسین سعیدی

در شکل زیر دایره‌ها به شعاع ۲ و ۶ بر هم مماس‌اند. اگر M محل تلاقی مماس مشترک‌های خارجی باشد، حاصل $\frac{MT}{MB}$ کدام است؟



(۱) $\frac{\sqrt{3}}{20}$

(۲) $\sqrt{3}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

تالیفی حسین سعیدی

هشت ضلعی منتظمی در دایره‌ای به شعاع واحد، محاط شده است. مساحت این هشت ضلعی کدام است؟

(۲) $2\sqrt{2}$

(۱) $\sqrt{2}$

(۴) $8\sqrt{2}$

(۳) $4\sqrt{2}$

تالیفی نرگس کارگر

در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، نقطه M بر قاعده BC اختیار شده است. اگر شعاع دایره محیطی مثلث‌های AMB و AMC را به ترتیب R_1 و R_2 فرض کنیم، حاصل $\frac{R_1}{R_2}$ کدام است؟

(۲) $\frac{MB}{MC}$

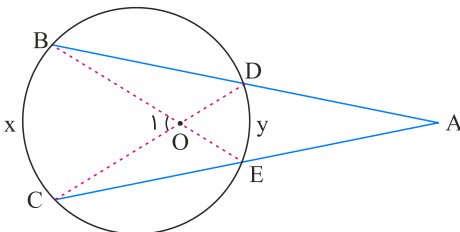
(۱) ۱

(۴) $\frac{MC}{MB}$

(۳) $\frac{1}{2}$

تالیفی میثم امین

در شکل زیر، $\hat{A} = 27^\circ$ و $\hat{O}_1 = 71^\circ$ می‌باشد. کمان BC چند درجه است؟



(۱) ۹۸

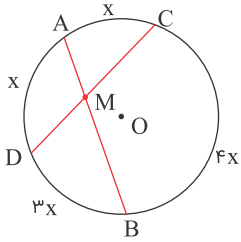
(۲) ۱۰۰

(۳) ۱۰۲

(۴) ۱۰۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

در شکل زیر، اگر مرکز دایره را نسبت به وتر AB بازتاب دهیم و تصویر را O' بنامیم و سپس O' را نسبت به وتر CD بازتاب دهیم و تصویر را O'' بنامیم، زاویه $\hat{O}M\hat{O}''$ چند درجه است؟



(۱) ۸۰

(۲) ۱۶۰

(۳) ۴۰

(۴) ۱۲۰

تالیفی مجید قهرمانی

در یک چهار ضلعی از برخورد نیمسازهای داخلی آن، یک مربع ایجاد شده است. الزاماً نوع این چهار ضلعی کدام است؟

(۱) محاطی

(۲) متوازی‌الاضلاع

(۳) محیطی

(۴) مستطیل

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

در مربع $ABCD$ نقطه M روی ضلع BC قرار دارد. اگر مجموع فواصل M از رأس D و مرکز مربع کمترین مقدار ممکن باشد، نسبت $\frac{BM}{CM}$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) $\frac{۳}{۲}$ (۴) $\frac{۱}{۲}$

تالیفی حسین سعیدی

مرکز دایره‌ای به شعاع R روی یک دایره به شعاع $۲R$ قرار دارد، به طوری که دایره کوچک‌تر بر قطر AB از دایره بزرگ‌تر مماس است. مرکز دایره کوچک‌تر کمان $\widehat{AB}$ را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

(۱) $\frac{۱}{۶}$ (۲) $\frac{۱}{۳}$ (۳) $\frac{۱}{۴}$ (۴) $\frac{۱}{۵}$

تالیفی حسین سعیدی

در چهار ضلعی $ABCD$ داریم: $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{۲} = \frac{\hat{C}}{۴} = \frac{\hat{D}}{۳}$. اگر امتداد اضلاع AD و BC یکدیگر را در M قطع کنند، کدام گزینه صحیح است؟

$$\frac{MC}{MA} = \frac{MD}{MB} \quad (۲)$$

$$\frac{MB}{AD} = \frac{MA}{BC} \quad (۴)$$

$$\frac{MC}{MB} = \frac{MD}{MA} \quad (۱)$$

$$\frac{MC}{AD} = \frac{MD}{BC} \quad (۳)$$

تالیفی حسین سعیدی

اندازه دو ضلع مثلثی برابر ۵ و ۷ و مساحت آن برابر $۱۰\sqrt{3}$ است. اندازه ضلع سوم مثلث کدام می‌تواند باشد؟

(۲) $\sqrt{95}$

(۱) $\sqrt{105}$

(۴) ۹

(۳) ۸

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۵

در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، خط گذرا بر رأس A قاعده BC و دایره محیطی مثلث را در D و E قطع می‌کند. اندازه $AD.AE$ برابر با کدام است؟

(۲) $CD.CB$

(۱) $BD.BC$

(۴) BC^2

(۳) AC^2

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

از روی نقاط یک دایره به شعاع R ، به نقطه M خارج دایره وصل می‌کنیم. وسط پاره‌خط‌های ایجادشده چه شکلی می‌سازند؟

(۲) دایره‌ای به شعاع $\frac{R}{2}$

(۱) نیم‌دایره‌ای به شعاع $\frac{R}{2}$

(۴) دایره‌ای به شعاع R

(۳) نیم‌دایره‌ای به شعاع R

تالیفی حسین سعیدی

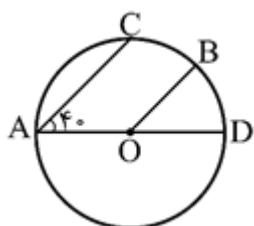
در شکل زیر $AC \parallel BO$ ، اندازه زاویه $\hat{ABO}$ چقدر است؟

(۱) 20°

(۲) 40°

(۳) 30°

(۴) 60°



مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۵

در دو دایره متقاطع به مراکز O و O' و شعاع‌های ۳ و ۴ واحد، فاصله نقطه تلاقی دو دایره از وسط OO' برابر $\frac{1}{p}OO'$ است. اندازه مماس مشترک محدود به دو نقطه تماس این دو دایره چند واحد است؟

(۲) $2\sqrt{5}$

(۱) ۴

(۴) ۵

(۳) $2\sqrt{6}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، رأس A را نسبت به نیمساز BD و تصویر آن را نسبت به نیمساز CD' بازتاب می‌کنیم. تصویر نهایی در کجا واقع می‌شود؟

(۲) خارج مثلث

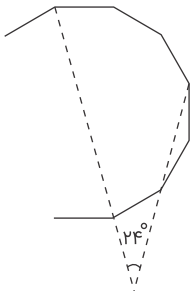
(۱) داخل مثلث

(۴) روی وتر مثلث

(۳) روی ساق مثلث

تالیفی حسین سعیدی

اگر شکل زیر، قسمتی از n ضلعی منتظم باشد، n کدام است؟



(۱) ۱۲

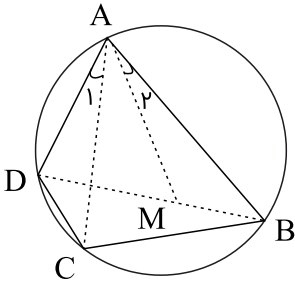
(۲) ۱۵

(۳) ۱۰

(۴) ۱۸

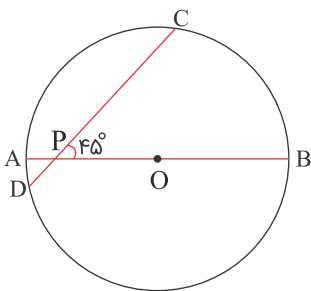
تالیفی محمد حسینی فرد

در شکل زیر، $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ حاصل $AD \cdot BC$ برابر کدام است؟

(۱) $DM \cdot AC$ (۲) $BM \cdot AC$ (۳) $AB \cdot CD$ (۴) $BD \cdot BM$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

مطابق شکل، وتر CD با قطر AB در P متقاطع‌اند و باهم زاویه 45° می‌سازند. اگر $PC = 7$ و $PD = 1$ باشد، شعاع دایره چقدر است؟



(۱) ۶

(۲) $2\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{5}$

(۴) ۵

تالیفی سیامک شهبازی زاده

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ارتفاع AH ، ضلع BC را به دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۹ واحد تقسیم کرده است. اگر بازتاب نقطه H نسبت به AB و AC را به ترتیب P و Q بنامیم، طول PQ کدام است؟

(۲) ۱۱

(۱) ۱۴

(۴) ۱۳

(۳) ۱۲

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

در مثلث ABC ، طول اضلاع به نسبت اعداد ۲ و ۴ و ۵ بوده و کوچکترین ضلع ۱۰ سانتی‌متر است اگر BD نیمساز وارد بر کوچکترین ضلع باشد، طول کوچکترین قطعه واقع بر AC جدا شده به وسیله D چند سانتی‌متر است؟

$$(۲) \quad ۴\frac{۲}{۹}$$

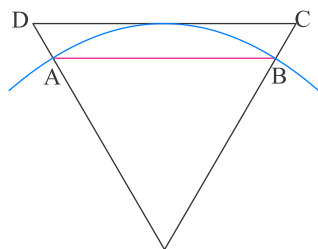
$$(۴) \quad ۴\frac{۵}{۹}$$

$$(۱) \quad ۴\frac{۱}{۹}$$

$$(۳) \quad ۴\frac{۴}{۹}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۵

AB قسمتی از یک شش ضلعی محاطی منتظم و DC قسمتی از شش ضلعی محیطی منتظم است. نسبت مساحت شش ضلعی محیطی به محاطی کدام است؟



$$(۱) \quad \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

$$(۲) \quad \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

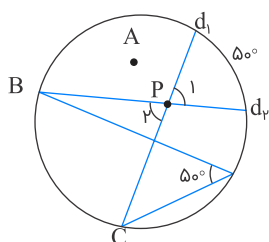
$$(۳) \quad \frac{۱۲}{۹}$$

$$(۴) \quad \frac{۲۰}{۱۲}$$

تالیفی سعید قطبی طاهری

مدارس ریاضی و فیزیک مفید

اگر نقطه A را نسبت به d_1 و سپس نسبت به d_2 بازتاب دهیم، A'' چند درجه است؟ (A'' بازتاب یافته A است)



$$(۱) \quad ۱۸۰^\circ$$

$$(۲) \quad ۹۰^\circ$$

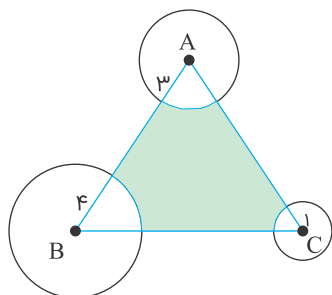
$$(۳) \quad ۱۵۰^\circ$$

$$(۴) \quad ۷۵^\circ$$

تالیفی سعید قطبی طاهری

مدارس ریاضی و فیزیک مفید

مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ را که به مرکز رأس‌های آن سه دایره به شعاع‌های ۱، ۳ و ۴ واحد رسم شده‌اند را در نظر می‌گیریم. مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟



$$(1) 16\sqrt{3} - 13\pi$$

$$(2) 16\sqrt{3} - \frac{13\pi}{3}$$

$$(3) \frac{16\sqrt{3} - 13\pi}{3}$$

$$(4) 8\sqrt{3} - 13\pi$$

تالیفی سیامک شهبازی زاده

اگر در مثلث $\triangle ABC$ ، $\hat{A} = 120^\circ$ ، $\hat{C} = 15^\circ$ و $BC = 8\sqrt{3}$ باشند، طول ضلع AC چقدر است؟

$$(2) 2\sqrt{2}$$

$$(1) 4\sqrt{2}$$

$$(4) 8\sqrt{2}$$

$$(3) 6\sqrt{2}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

در مثلث ABC ، $AC = 10$ و نیمساز AD با ضلع AB برابر است. اگر امتداد AD و عمودمنصف BC یکدیگر را در E قطع کنند، طول AE کدام است؟

$$(2) 12$$

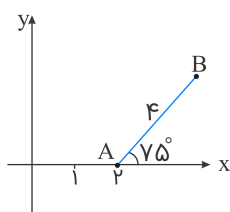
$$(1) 10$$

$$(4) 12\sqrt{2}$$

$$(3) 10\sqrt{2}$$

تالیفی حسین سعیدی

در شکل زیر، نقطه B را حول نقطه A چند درجه دوران دهیم تا تصویر B روی محور y ها قرار بگیرد؟



$$(1) 30^\circ$$

$$(2) 45^\circ$$

$$(3) 60^\circ$$

$$(4) 90^\circ$$

تالیفی حسین سعیدی

در مثلث ABC ($AB < AC$) ضلع BC را از هر دو طرف، به اندازه‌های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم. مرکز دایره محیطی مثلث ADE ، بر روی کدام جزء مثلث ABC واقع است؟

$$(2) \text{ میانهٔ نظیر } BC$$

$$(1) \text{ عمودمنصف } BC$$

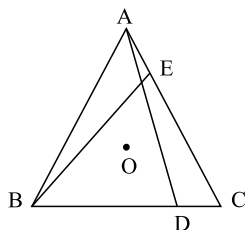
$$(4) \text{ نیمساز داخلی زاویهٔ } A$$

$$(3) \text{ ارتفاع وارد بر ضلع } BC$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

نقطه O مرکز ثقل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است و $BD = CE$ ، کدام بیان نادرست است؟



(۱) $OE = OD$

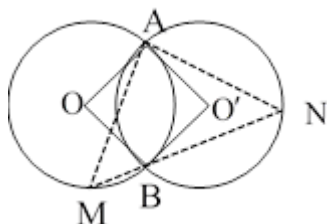
(۲) $OD \perp BE$

(۳) $\angle EOD = 120^\circ$

(۴) $\angle AOC = 120^\circ$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

در شکل زیر $AOBO'$ مربع است (A و B نقاط تقاطع دو دایره هستند) و MN از B می‌گذرد. مثلث $\triangle AMN$ همواره



(۱) متساوی‌الاضلاع است.

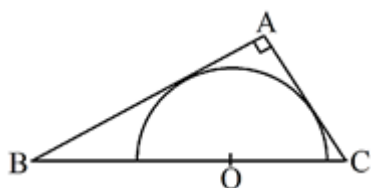
(۲) متساوی‌الساقین است.

(۳) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

(۴) یک زاویه 135° دارد.

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

در شکل، نیم‌دایره به مرکز O، بر اضلاع AB و AC مماس است. اگر $AB = 12$ و $AC = 8$ باشد، شعاع نیم‌دایره کدام است؟



(۱) $4/2$

(۲) $4/6$

(۳) $4/8$

(۴) $5/2$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه یک زاویه، 30° و طول ضلع مقابل آن، ۴ است. فاصله رأس این زاویه از وسط میانه نظیر وتر این مثلث، کدام است؟

(۲) $2\sqrt{6}$

(۱) $2\sqrt{5}$

(۴) $4\sqrt{2}$

(۳) $2\sqrt{7}$

تالیفی میثم امین

حجم کره محاطی یک چهار وجهی منتظم به ارتفاع ۲۴ چند است؟

(۲) 576π

(۱) $\frac{1024\pi}{3}$

(۴) 36π

(۳) 288π

تالیفی صبا مهدوی

در دایره ای به قطر ۱۲ واحد، فاصله مرکز دایره از وتر AB برابر ۲ واحد است. نقطه C در امتداد AB به فاصله $CB = 2\sqrt{2}$ انتخاب شده است. طول قطعه مماسی که از C بر دایره رسم می‌شود، کدام است؟

(۲) $3\sqrt{5}$

(۱) $2\sqrt{10}$

(۴) $5\sqrt{2}$

(۳) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

در یک دایره نقطه M محل برخورد وترهای AB و CD می‌باشد. اگر $CD = 1/10 AB$ و M وتر CD را به نسبت ۳ به ۸ تقسیم کند، این نقطه وتر AB را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

(۲) $\frac{1}{3}$

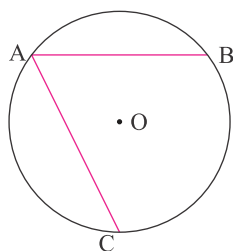
(۱) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{33}{80}$

(۳) $\frac{3}{8}$

تالیفی حسین سعیدی

در شکل زیر طول وترهای AB و AC به ترتیب ۶ و ۵ می‌باشد. اگر امتداد OC از وسط AB بگذرد، فاصله وتر AB از مرکز دایره چندبرابر فاصله وتر AC از مرکز دایره است؟



(۱) $\frac{5}{6}$

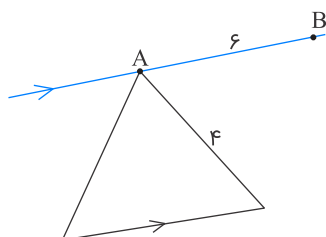
(۲) $\frac{7}{15}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۴) $\frac{25}{36}$

تالیفی حسین سعیدی

مثلث زیر متساوی‌الاضلاع است. اگر بخواهیم از A به ضلع روبه‌روی آن و سپس به B برویم، طول کوتاه‌ترین مسیر چقدر است؟



(۱) $\sqrt{84}$

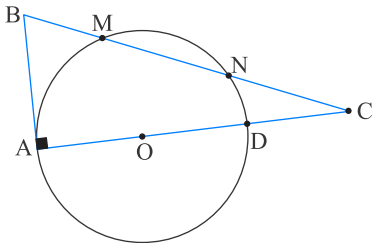
(۲) $\sqrt{90}$

(۳) ۹

(۴) $\sqrt{82}$

تالیفی سعید قطبی طاهری

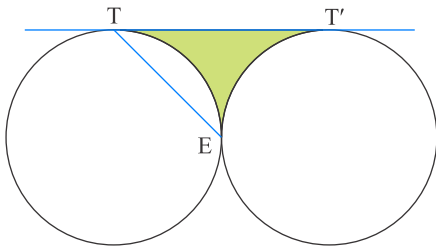
مدارس ریاضی و فیزیک مفید



- $$\begin{array}{l} \frac{p}{3} \quad (1) \\ \frac{3}{p} \quad (2) \\ \frac{p}{5} \quad (3) \\ \frac{5}{p} \quad (4) \end{array}$$

تالیفی حسین سعیدی

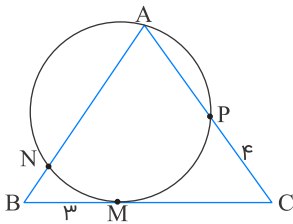
در شکل زیر دو دایره به شعاع‌های برابر مماس خارج هستند. اگر $TE = ۴$ سانتی‌متر باشد، مساحت قسمت رنگی چند است؟



- $$\begin{aligned} \lambda\sqrt{\nu} - \mathfrak{W}\pi & \quad (1) \\ 1\mathfrak{E} - \mathfrak{F}\pi & \quad (\nu) \\ \mathfrak{F}\sqrt{\nu} - \pi & \quad (\mathfrak{W}) \\ \nu\sqrt{\nu} + \mathfrak{W}\pi & \quad (\mathfrak{E}) \end{aligned}$$

تالیفی نرگس کارگر

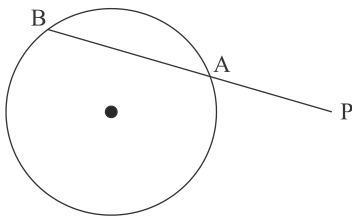
ضلع AB از مثلث متساوی الاضلاع ABC در نقطه M بر دایره مماس است. طول پاره خط AN در کدام بازه زیر قرار دارد؟



- $$\begin{array}{ll} [4, 6) & (1) \\ (8, 10] & (2) \\ [5, 7) & (3) \\ [7, 9) & (4) \end{array}$$

تالیفی حسین سعیدی

نزدیک‌ترین نقطه از دایره‌ای به شعاع ۵ واحد تا نقطهٔ مفروض P ، برابر ۸ واحد است. قاطع $PA \cdot AB$ نسبت به دایره طوری رسم شده است که $PA - AB = 2$ ، اندازهٔ AB کدام است؟



- $$\begin{array}{l} 5 \quad (1) \\ 6 \quad (2) \\ 7 \quad (3) \\ 9 \quad (4) \end{array}$$

اگر مثلث ABC را با بردار $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ انتقال دهیم و به مثلث $A'B'C'$ تبدیل کنیم، مساحت چهارضلعی $ACC'B'$ چند برابر مساحت مثلث $A'B'C'$ است؟

$$\begin{array}{r} ۳ \\ ۲ \overline{) ۳} \\ ۴ \\ ۵ \\ ۲ \end{array}$$

(۱) مساحت‌ها برابر است.

(۳) ۲

تالیفی مجید قهرمانی

دایره محیطی یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a رسم شده است. به کمک کدام تبدیل می‌توان دایره محیطی داخلی آن را رسم کرد.

$$(۲) \text{ تجانس با نسبت } \pm \frac{1}{۲}$$

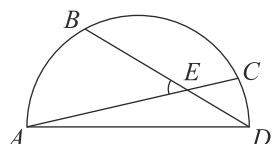
(۱) دوران ۶۰° درجه

$$(۴) \text{ تجانس با نسبت } \pm \frac{1}{۳}$$

(۳) دوران ۱۲۰° درجه

تالیفی حسین سعیدی

شکل زیر، نیم‌دایره‌ای به قطر AD است. اگر $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$ ، زاویه AEB چقدر است؟



(۱) ۴۵

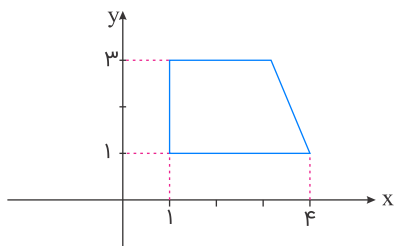
(۲) ۵۰

(۳) ۵۵

(۴) ۶۰

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۳۹۶

اگر از بین پاره‌خط‌های زیر، یکی از آن‌ها روی $y = -2x + 9$ واقع باشد، حجم شکل حاصل از دوران این ذوزنقه حول محور y ها تقریباً چقدر است؟ ($\pi = ۳$)



(۱) ۱۲۸

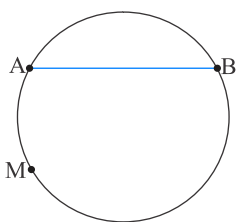
(۲) ۷۴

(۳) ۶۸

(۴) ۶۴

تالیفی صبا مهدوی

نقطه M روی دایره حرکت می‌کند. مثلث MAB چند مثلث همنهشت با خود در میان مثلث‌های ساخته شده دارد؟



(۱) ۱

(۲) صفر

(۳) بی‌شمار

(۴) گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح است.

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $b = ۸$ و $c = ۵$ باشد، اندازه ضلع متوسط a کدام است؟

(۲) $\sqrt{۴۱}$

(۱) $\sqrt{۳۹}$

(۴) $۵\sqrt{۲}$

(۳) $۳\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

کدام گزینه صحیح نیست؟

(۱) مستطیلی که محیطی باشد، یک مربع است.

(۲) دوزنقه متساوی‌الساقین هم محاطی است و هم محیطی.

(۳) متوازی‌الاضلاع نه محاطی است و نه محیطی.

(۴) از رئوس یک لوزی لزوماً یک دایره نمی‌گذرد.

تالیفی حسین سعیدی

در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) نقطه O در امتداد AC مرکز دایره‌ای است که در نقطه B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟

(۲) قائم‌الزاویه

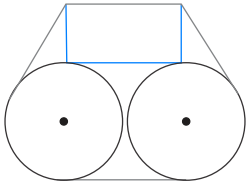
(۱) متساوی‌الساقین

(۴) غیر مشخص

(۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

در شکل زیر، دو دایره با شعاع‌های مساوی $r = \sqrt{3}$ مماس خارج هستند. روی این دو دایره مستطیلی قرار گرفته است که طول آن دو برابر عرضش است. اگر عرض این مستطیل با شعاع دایره برابر باشد، طول نخ که دورتادور شکل است چقدر است؟ $3 + 4\sqrt{3}$ است؟ ($\pi \simeq 3$)



(۱) ۲

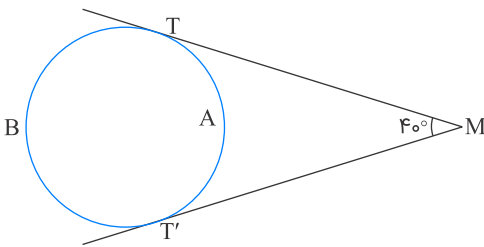
(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۸

تالیفی نرگس کارگر

در شکل زیر اندازه کمان‌های TAT' و TBT' به ترتیب چه مقدار هستند؟



(۱) ۱۴۰ و ۲۲۰

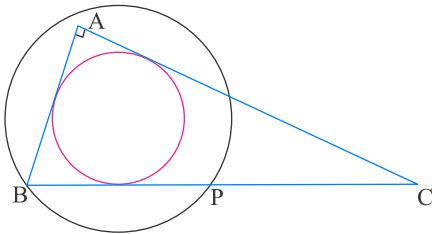
(۲) ۱۲۰ و ۲۰۰

(۳) ۱۳۰ و ۲۱۰

(۴) ۱۵۰ و ۲۳۰

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

در شکل زیر دو دایره هم‌مرکزند و $AB = ۱۶$ و $AC = ۳۰$ است. طول پاره خط CP کدام است؟



(۱) ۱۲

(۲) ۱۸

(۳) ۲۸

(۴) ۱۴

تالیفی صبا مهدوی

دایره $C(O, R)$ را با برداری به طول $2R$ انتقال می‌دهیم تا دایره C' به دست آید. سپس C' را به مرکز O ، 60° دوران می‌دهیم تا دایره C'' به دست آید. مساحت محصور بین این سه دایره چقدر است؟

$$\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$4\sqrt{3} - \pi \quad (۴)$$

$$2\sqrt{3} - \pi \quad (۱)$$

$$\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

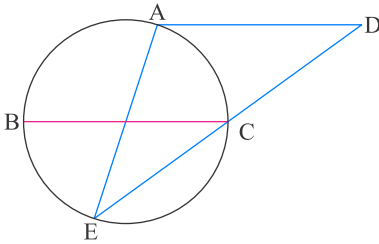
تالیفی حسین سعیدی

نقاط M، N و P به ترتیب روی اضلاع AB، BC و CA از مثلث ABC چنان قرار دارند که $\frac{AM}{MB} = ۲$ ، $\frac{BN}{NC} = ۳$ و $\frac{CP}{PA} = ۴$. مساحت مثلث MNP چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

- (۱) $\frac{۳}{۱۱}$
(۲) $\frac{۶}{۱۷}$
(۳) $\frac{۴}{۱۳}$
(۴) $\frac{۵}{۱۲}$

تالیفی فرزاد زمانی نژاد

در شکل زیر $AD \parallel BC$ و $AE = CE = AD$ است. زاویه $\widehat{EAD}$ چند درجه است؟



- (۱) ۹۶
(۲) ۱۲۰
(۳) ۱۰۸
(۴) ۱۳۵

تالیفی حسین سعیدی

طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر ۸ و اندازه خط‌المركزين ۱۷ است. شعاع دایره بزرگ‌تر چقدر بیشتر از شعاع دایره کوچک‌تر است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۳
(۳) ۱۵
(۴) ۱۸

تالیفی امیر خمسه

در یک چهار ضلعی محدب، طول پاره‌خط‌هایی که اوساط اضلاع روبه‌رو را به هم وصل می‌کند، ۶ و ۱۰ واحد و زاویه بین آن‌ها ۱۲۰ درجه است. طول قطر بزرگ این چهار ضلعی کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۴
(۳) $\sqrt{۱۹}$
(۴) ۱۸

تالیفی نرگس کارگر

دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس داخلی هستند. چند وتر به طول $۴\sqrt{۶}$ در دایره بزرگ‌تر می‌توان رسم کرد که بر دایره کوچک‌تر مماس باشند؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

اگر d_1 و d_2 محورهای بازتاب دو تبدیل S_1 و S_2 باشند، طوری که $S_1 \neq S_2$ و معادله $S_1 S_2 = S_2 S_1$ بیش از یک جواب داشته باشد، آنگاه وضعیت d_1 و d_2 چگونه است؟

(۱) موازی

(۲) متعامد

(۳) متقاطع با زاویه 45°

(۴) هر سه مورد می‌تواند باشد.

تالیفی مجید قهرمانی

زاویه $\angle xOy = 120^\circ$ مفروض است. نقطه دلخواه M را روی نیمساز آن انتخاب کرده و خطی از آن عبور می‌دهیم تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کند. اگر $OA = 6$ و $OB = 8$ ، طول OM کدام است؟

(۱) $\frac{21}{5}$

(۲) $\frac{24}{7}$

(۳) $\frac{29}{11}$

(۴) $\frac{30}{13}$

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

در یک دوزنقه به قاعده‌های ۴ و ۶، فاصله مرکز تجانس مستقیم و معکوس قاعده‌ها برابر ۲۴ است. مساحت دوزنقه کدام است؟

(۱) ۶۰

(۲) ۱۲۰

(۳) ۵۰

(۴) ۱۰۰

تالیفی حسین سعیدی

در مثلثی با اضلاع ۳، ۵ و ۶، شعاع بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی چندبرابر شعاع دایره محاطی داخلی است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۶

(۴) ۷

تالیفی محمد حسینی فرد

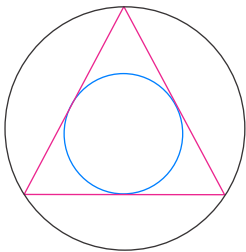
دایره‌های محیطی و محاطی مثلث متساوی‌الاضلاع رسم شده است. نسبت مساحت دایره محیطی به محاطی کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۲

(۳) ۹

(۴) ۳



تالیفی سعید قطبی طاهری

مدارس ریاضی و فیزیک مفید

دو دایره مماس درونی‌اند. اگر مساحت ناحیه محصور بین آن‌ها 64π باشد، طول وترى از دایره بزرگ‌تر که موازی خط‌المركزين است و بر دایره کوچک‌تر مماس می‌باشد، کدام است؟

(۲) ۸

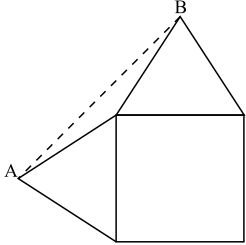
(۱) ۱۶

(۴) ۱۲

(۳) ۶

تالیفی حسین سعیدی

روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. فاصله AB چند واحد است؟



(۱) $1 + 2\sqrt{3}$

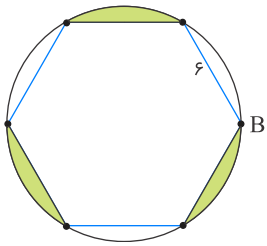
(۲) $3 + \sqrt{3}$

(۳) $3 + \sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

مطابق شکل دایره محیط بر شش ضلعی منتظم است. مساحت قسمت رنگی چند است؟



(۱) $36\pi - 54\sqrt{3}$

(۲) $18\pi - 9\sqrt{3}$

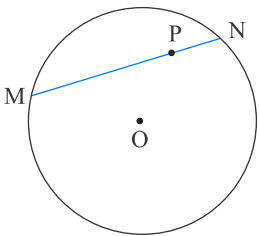
(۳) $18\pi - 27\sqrt{3}$

(۴) $36\pi - 36\sqrt{3}$

تالیفی سعید قطبی طاهری

مدارس ریاضی و فیزیک مفید

در دایره زیر به مرکز O و شعاع $\sqrt{52}$ ، فاصله O تا P برابر ۵ و فاصله O تا وتر MN برابر ۴ است. طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از P کدام است؟



(۱) $2\sqrt{3}$

(۲) $6\sqrt{3}$

(۳) $4\sqrt{3}$

(۴) $3\sqrt{3}$

تالیفی حسین سعیدی

نقطه A و دو دایره در یک صفحه مفروض‌اند. برای رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به رأس A که دو سر قاعده بر روی هریک از این دایره‌ها باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

- (۱) بازتاب (۲) انتقال
(۳) تجانس (۴) دوران

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

در یک دوزنقه متساوی‌الساقین با زاویه 60° ، نقطه M محل تلاقی امتداد ساق‌ها را نسبت به قاعده کوچک و سپس تصویر آن را نسبت به قاعده بزرگ بازتاب می‌کنیم تا M' به دست آید. طول MM' چندبرابر ساق دوزنقه است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

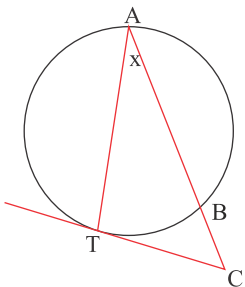
تالیفی حسین سعیدی

اگر از نقطه A مماسی به طول $2\sqrt{6}$ بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ رسم کنیم، بیشترین فاصله نقاط دایره تا نقطه A چقدر است؟

- (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

تالیفی سیامک شهبازی زاده

در شکل زیر، $AB = AT$ و $\hat{C} = 60^\circ$ است. اگر CT مماس بر دایره باشد، x کدام است؟

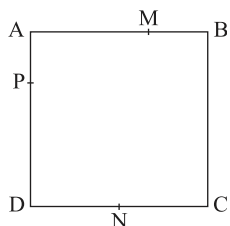


- (۱) 20° (۲) 30° (۳) 45° (۴) 40°

تالیفی سیامک شهبازی زاده

در مربع زیر، نقطه M ضلع AB را به نسبت ۱ به ۳ و نقطه P ضلع AD را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده‌اند. اگر N وسط ضلع

CD و $\cos \angle NPM = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ باشد، $\sin \angle NMP$ کدام است؟



(۱) $\frac{1}{3}$

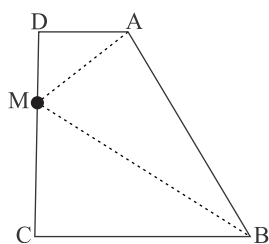
(۲) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{\sqrt{17}}{25}$

تالیفی نرگس کارگر

در ذوزنقه قائم‌الزاویه ABCD، اندازه‌های $CB = CD = 6$ و $AD = 2$ هستند، نقطه M روی ساق قائم CD متحرک است. کمترین مقدار $MA + MB$ ، کدام است؟



(۱) ۱۰

(۲) ۱۰/۵

(۳) ۱۱

(۴) ۱۱/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

در مثلث ABC، $a = 6b$ و $\hat{A} = 2\hat{B}$ است. شعاع دایره محیطی مثلث، چندبرابر ضلع AC است؟

(۲) $\frac{5}{6}$

(۴) $\frac{5}{3}$

(۱) $\frac{5}{8}$

(۳) $\frac{5}{4}$

تالیفی حسین سعیدی

سه دایره به شعاع $\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ دایره دو بر هم مماس‌اند. مساحت ناحیه محصور بین این سه دایره کدام است؟
($\pi = 3$)

(۲) $5\sqrt{3} - 8/5$

(۴) $6\sqrt{3} - 8/5$

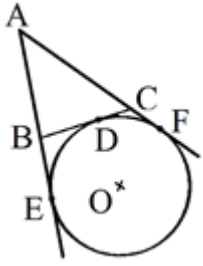
(۱) $8/5 - 3\sqrt{3}$

(۳) $8/5 - 4\sqrt{3}$

تالیفی حسین سعیدی

۱۳۰

در شکل، خطوط AE و AF و BC به ترتیب در نقاط E و F و D بر دایره مماس‌اند. اگر $AE = 10 + x$ و $AF = 2x - 3$ باشند، محیط مثلث ABC کدام گزینه است؟



(۱) ۲۶

(۲) ۲۸

(۳) ۳۲

(۴) ۴۶

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

۱۳۱

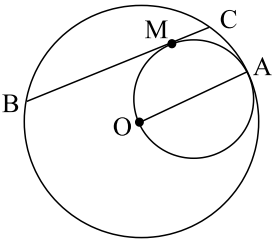
دو ضلع مثلثی برابر ۲ و ۵ و مساحت آن برابر ۳ است. محیط این مثلث برابر کدام می‌تواند باشد؟

(۲) $7 + 2\sqrt{5}$ (۱) $7 + \sqrt{5}$ (۴) $7 + 4\sqrt{5}$ (۳) $7 + 3\sqrt{5}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

۱۳۲

در دایره‌ای به شعاع OA وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MB \times MC$ ، برابر کدام است؟

(۱) MO^2 (۲) MA^2 (۳) OA^2 (۴) $MA \cdot MO$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۳۳

در مثلث ABC مختصات رئوس $A(4, 12)$ و $B(1, -3)$ مفروض‌اند. نقطه C را روی محور y ‌ها چنان می‌یابیم که محیط مثلث ABC کمترین مقدار ممکن باشد. عرض نقطه C کدام است؟

(۲) صفر

(۱) -۲

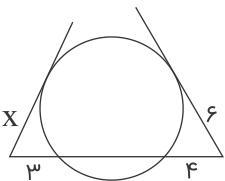
(۴) -۱

(۳) ۱

تالیفی زهرا علیزاده

۱۳۴

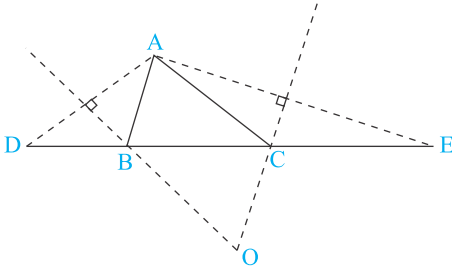
در شکل زیر، اندازه x چند واحد است؟

(۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{6}$

(۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

ضلع BC از مثلث ABC را از طرف C به اندازه AC و از طرف B به اندازه AB امتداد می‌دهیم تا نقاط D و E به دست آید. اگر O محل هم‌مرسی عمودمنصف‌های AD و AE باشد، در مورد گزاره‌های "الف" و "ب" کدام گزینه درست است؟
 الف) نقطه O مرکز دایره محاطی خارجی روبه‌رو به رأس A از مثلث ABC است.
 ب) عمودمنصف BC از نقطه O می‌گذرد.



(۱) فقط "الف" درست است.

(۲) فقط "ب" درست است.

(۳) "الف" و "ب" درست‌اند.

(۴) "الف" و "ب" نادرست‌اند.

تالیفی محمد حسینی فرد

در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمه ۸ و ۱۵ واحد، فاصله دورترین رأس مثلث از محل هم‌مرسی نیمسازهای داخلی، کدام است؟

(۲) $5\sqrt{2}$

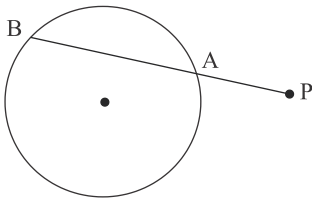
(۱) $3\sqrt{17}$

(۴) $3\sqrt{5}$

(۳) $4\sqrt{6}$

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

فاصله نقطه P تا دورترین نقاط یک دایره سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه قاطع AB P نسبت به دایره رسم شده است. اگر کمان AB برابر ۶ درجه باشد، اندازه PA چند برابر شعاع دایره است؟



(۱) $\frac{1}{2}(\sqrt{11} - 1)$

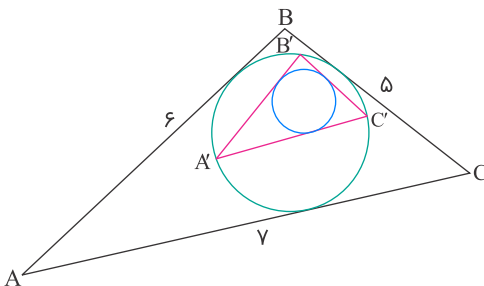
(۲) $\frac{1}{2}(\sqrt{13} - 1)$

(۳) $\sqrt{11} - 2$

(۴) $\sqrt{13} - 2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

در شکل زیر دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه‌اند. مساحت دایره کوچک‌تر کدام گزینه است؟



(۱) $\frac{64}{441}\pi$

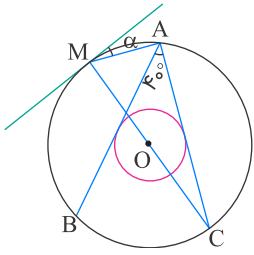
(۲) $\frac{128}{441}\pi$

(۳) $\frac{256}{441}\pi$

(۴) π

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

در شکل زیر دایره‌ها هم‌مرکز و وترهای AB و AC بر دایره کوچک‌تر مماس هستند، زاویه α چند درجه است؟



(۱) ۱۰

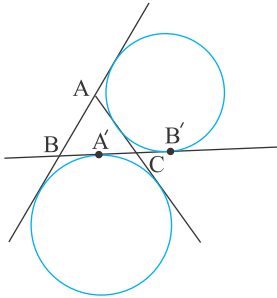
(۲) ۲۰

(۳) ۳۰

(۴) ۴۰

تالیفی حسین سعیدی

در شکل زیر، دایره‌های محاطی خارجی روبه‌رو به رأس‌های A و B از مثلث ABC را رسم کرده‌ایم. اگر $AB = ۶$ ، $AC = ۷$ و $BC = ۹$ باشد، طول مماس مشترک داخلی دو دایره $(A'B')$ کدام است؟



(۱) ۷

(۲) ۸

(۳) ۵

(۴) ۶

تالیفی محمد حسینی فرد

در یک مثلث قائم‌الزاویه حاصل‌جمع اضلاع قائم برابر $۶\sqrt{۲}$ و طول ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۸}{\sqrt{۱۰}}$ است. حاصل ضرب اضلاع قائم این مثلث کدام است؟

(۱) ۸

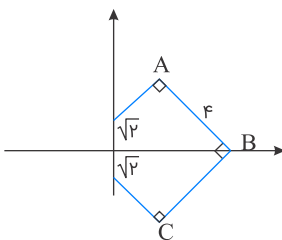
(۲) ۱۶

(۳) ۱۸

(۴) ۹

تالیفی حسین سعیدی

شکل زیر، قسمتی از یک مربع است. اگر آن را نسبت به محور y ‌ها بازتاب کنیم، مساحت شکل حاصل چقدر است؟



(۱) ۳۲

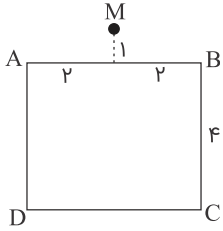
(۲) ۲۴

(۳) ۲۸

(۴) ۳۰

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

شکل زیر مربع است. بازتاب M نسبت به DC و سپس نسبت به AD و سپس نسبت به BC انتقالی به طول است.



(۱) ۱۳

(۲) $\sqrt{164}$ (۳) $\sqrt{174}$

(۴) ۱۴

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

دایره C را به مرکز نقطه M روی دایره با نسبت $\frac{1}{3}$ - مجانس می‌کنیم. سپس دایره‌ای به مرکز M رسم می‌کنیم به طوری که بر مماس مشترک خارجی این دو دایره مماس باشد. نسبت تجانس دایره جدید با دایره اصلی کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

تالیفی حسین سعیدی

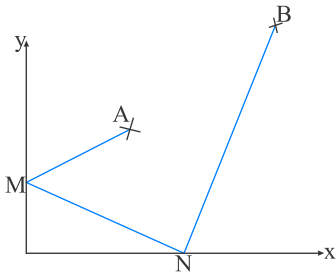
نقاط $A \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 9 \\ 11 \end{vmatrix}$ در صفحه محورهای مختصات مفروض‌اند. دو نقطه M و N همواره روی دو محور می‌لغزند. کمترین اندازه خط شکسته $AMNB$ کدام است؟

(۱) ۱۸

(۲) ۱۹

(۳) ۲۰

(۴) ۲۱



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

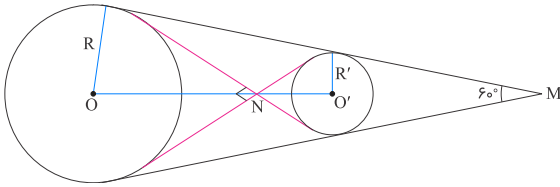
در نیم‌دایره‌ای به قطر AB ، امتداد وترهای AD و BC در نقطه E و با زاویه 45° یکدیگر را قطع می‌کنند. نسبت مساحت‌های دو مثلث ABE و CDE کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$

(۴) اطلاعات داده‌شده کافی نیست.

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

مماس مشترک‌های داخلی دو دایره بر هم عمودند و زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی 60° است. شعاع دایره بزرگ‌تر چند برابر طول خط‌المركزین است؟



$$(1) \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$(2) \frac{\sqrt{2}-1}{4}$$

$$(3) \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$(4) \frac{\sqrt{2}+1}{4}$$

تالیفی حسین سعیدی

چهار ضلعی ABCD را در نظر بگیرید. به کمک کدام بردار انتقال می‌توان نشان داد چهار ضلعی حاصل از وصل کردن اواسط اضلاع ABCD یک متوازی‌الاضلاع است؟

$$(2) \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$$

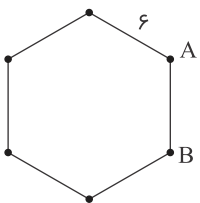
$$(4) \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$$

$$(1) \overrightarrow{AD}$$

$$(3) \overrightarrow{BD}$$

تالیفی صبا مهدوی

در شش ضلعی منتظم زیر می‌خواهیم از A به B برویم به طوری که از ضلع موازی AB رد شویم و کمترین راه را برویم. طول مسیر چقدر خواهد بود؟



$$(1) \sqrt{468}$$

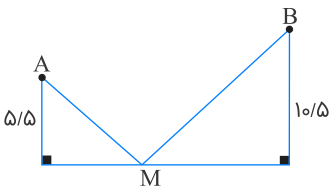
$$(2) 24$$

$$(3) 20$$

$$(4) \sqrt{442}$$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

در شکل زیر، کمترین مقدار $AM + MB$ برابر ۲۰ است. فاصله دو نقطه A و B از هم چقدر است؟



$$(1) 9\sqrt{5}$$

$$(2) 4\sqrt{10}$$

$$(3) 12$$

$$(4) 13$$

تالیفی حسین سعیدی

دوزنقه محیطی ABCD با قاعده‌های ۴ و ۹ تحت یک بازتاب به روی خودش تصویر شده است. مساحت این دوزنقه کدام است؟

(۲) ۳۹

(۴) ۴۵

(۱) $\frac{13}{4}$

(۳) $\frac{13}{2}$

تالیفی مجید قهرمانی

مثلث ABC که در آن $\hat{C} = 60^\circ$ و $BC \times AC = 16$ ، مفروض است. اگر میانه‌های AM و BM' بر هم عمود باشند، اندازه ضلع AB کدام است؟

(۲) ۴

(۴) ۸

(۱) ۲

(۳) ۵

تالیفی نرگس کارگر

مثلث ABC به اضلاع ۵، ۷ و ۸ مفروض است. رئوس این مثلث را تحت تجانسی به مرکز محل هم‌رسی میانه‌ها و نسبت $k = -2$ به نقاط A' ، B' و C' تصویر می‌کنیم. حاصل $AA'^2 + BB'^2 + CC'^2$ کدام است؟

(۲) ۴۸۰

(۴) ۴۱۴

(۱) ۷۳۶

(۳) ۱۸۰

تالیفی حسین سعیدی

در مثلث ABC، جذر عبارت $\frac{a^2 - b^2}{\cos^2 \hat{B} - \cos^2 \hat{A}}$ چندبرابر قطر دایره محیطی است؟

(۲) ۲

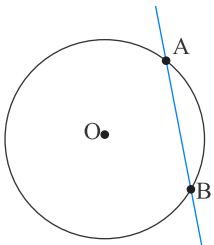
(۴) $\frac{1}{4}$

(۱) ۱

(۳) ۴

تالیفی حسین سعیدی

کمان AB برابر با 60° درجه است. اگر دایره را نسبت به AB بازتاب دهیم، دو دایره در هم حاصل می‌شود. مساحت شکل حاصل را به دست آورید. ($R = 6$)



(۱) $18\sqrt{3}$

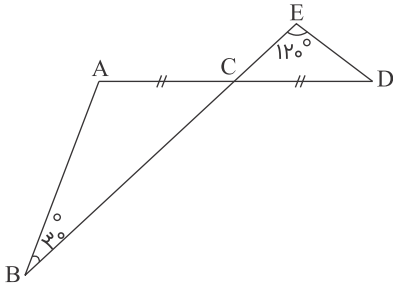
(۲) $60\pi + 18\sqrt{3}$

(۳) $72\pi - 18\sqrt{3}$

(۴) $9\sqrt{3}$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

در شکل زیر، پاره خط AD و پاره خط BE در نقطه C متقاطع اند، به طوری که C وسط AD ، $\hat{B} = 30^\circ$ و $\hat{E} = 120^\circ$ است. حاصل $\frac{AB}{DE}$ کدام است؟



$$\frac{3}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \quad (3)$$

$$\sqrt{3} \quad (4)$$

تالیفی میثم امین

قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم، ضلع یک شش ضلعی منتظم جدید است. مساحت شش ضلعی جدید چند برابر مساحت شش ضلعی اولیه است؟

$$\sqrt{3} \quad (1)$$

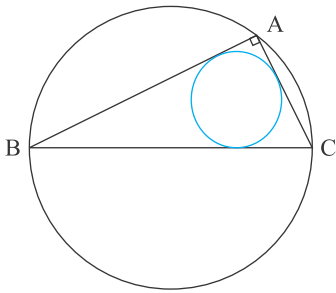
$$2 \quad (2)$$

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

در شکل زیر، مثلث قائم الزاویه ABC در دایره‌ای به شعاع R محاط شده و بر دایره‌ای به شعاع r محیط است. کدام گزینه درست می‌باشد؟



$$rR = \frac{S_{\triangle ABC}}{2} \quad (1)$$

$$r + R = \frac{AB + AC}{2} \quad (2)$$

$$R - r = \frac{|AB - AC|}{2} \quad (3)$$

$$\frac{R}{r} = \frac{AB + AC}{BC} \quad (4)$$

تالیفی محمد حسینی فرد

اگر مساحت شش ضلعی منتظم محاط در یک دایره $6\sqrt{3}$ باشد، آنگاه مساحت شش ضلعی منتظم محیط بر این دایره چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

$$7/5 \quad (2)$$

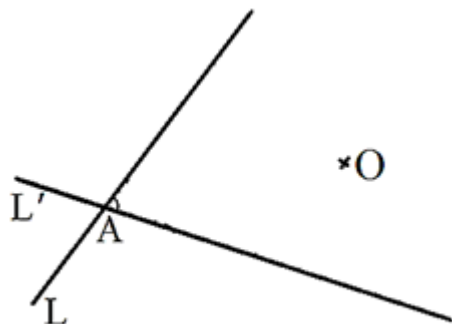
$$7/2 \quad (1)$$

$$9 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

دو خط L و L' با هم زاویه 50° می‌سازند. L را به مرکز O ، 60° و L' را به همان مرکز 80° دوران می‌دهیم تا دو خط L_1 و L'_1 به دست آیند، زاویه بین L_1 و L'_1 چقدر است؟



(۱) 50°

(۲) 60°

(۳) 70°

(۴) 80°

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

در یک مثلث قائم‌الزاویه با محیط ۲۴، نسبت اضلاع قائمه برابر $\frac{3}{4}$ است. شعاع بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی چقدر است؟

(۲) ۱۵

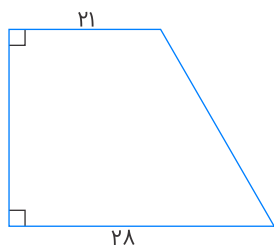
(۱) ۱۰

(۴) ۱۲

(۳) ۱۸

تالیفی محمد حسینی فرد

دوزنقه زیر بر دایره‌ای محیط است. بزرگ‌ترین فاصله رأس دوزنقه تا نقاط این دایره چقدر است؟



(۱) ۴۴

(۲) ۳۶

(۳) ۴۰

(۴) ۳۲

تالیفی صبا مهدوی

نقطه $A(2, 1)$ ابتدا با تجانس به مرکز مبدأ مختصات و سپس انتقال با بردار $\vec{V}(3, -1)$ به نقطه $B(7, 1)$ تبدیل شده است. ضریب تجانس کدام است؟

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) $-\frac{3}{2}$

(۴) ۲

(۳) -۲

تالیفی مجید قهرمانی

در مثلث ABC ($AB = AC$)، دایره‌ای در B و C بر ساق‌ها مماس است. اگر $BC = 6$ و ارتفاع $AH = 4$ باشد، شعاع این دایره، کدام است؟

(۲) $3/5$

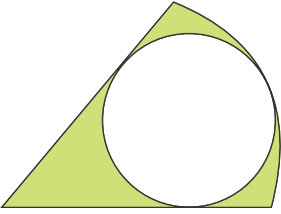
(۱) $3/25$

(۴) $4/5$

(۳) $3/75$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

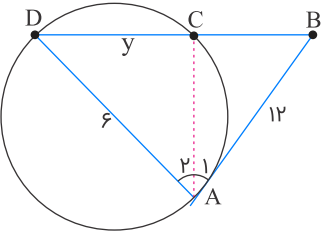
مطابق شکل یک دایره در قطاعی 60° به شعاع R محاط شده است. مساحت ناحیه رنگی چندبرابر πR^2 است؟



- (۱) $\frac{1}{12}$
 (۲) $\frac{13}{48}$
 (۳) $\frac{5}{48}$
 (۴) $\frac{1}{18}$

تالیفی حسین سعیدی

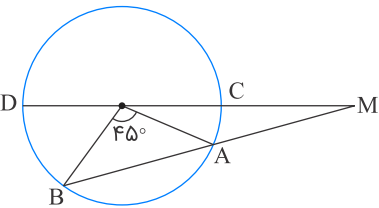
باتوجه به شکل اندازه y کدام است؟ ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$)



- (۱) $4\sqrt{6}$
 (۲) $3\sqrt{5}$
 (۳) $\sqrt{\frac{2}{3}}$
 (۴) $2\sqrt{6}$

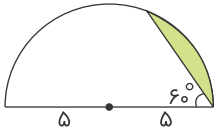
تالیفی سعید قطبی طاهری
 مدارس ریاضی و فیزیک مفید

در شکل زیر $M = \hat{AB} = 45^\circ$ است. اندازه کمان BD کدام است؟



- (۱) $122/5$
 (۲) $102/5$
 (۳) $112/5$
 (۴) 120

تالیفی سعید قطبی طاهری
 مدارس ریاضی و فیزیک مفید



- (۱) $5\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$
 (۲) $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$
 (۳) $10\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$
 (۴) $25\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

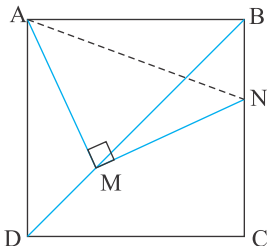
تالیفی سیامک شهبازی زاده

۱۶۹ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، زاویه $A = 90^\circ$ و اندازه اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. ارتفاع AH و نیمساز AD رسم شده است. اندازه DH کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{35}$
 (۲) $\frac{9}{35}$
 (۳) $\frac{12}{35}$
 (۴) $\frac{16}{35}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۷۰ در مربع شکل زیر، نقطه دلخواه M روی قطر BD قرار دارد و MN بر AM عمود است. زاویه MAN چقدر می‌باشد؟

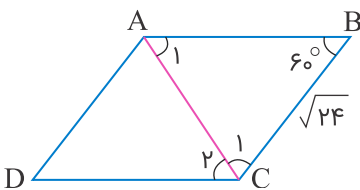


- (۱) 30°
 (۲) 45°
 (۳) 60°

(۴) هر مقداری بین صفر تا 90° می‌تواند باشد.

تالیفی محمد حسینی فرد

۱۷۱ در متوازی‌الضلاع زیر، تفاضل زوایای C_1 و C_2 برابر 30° است. طول قطر AC کدام است؟ $(AB > \sqrt{24})$



- (۱) ۶
 (۲) $6\sqrt{2}$
 (۳) $3\sqrt{2}$
 (۴) $2\sqrt{6}$

تالیفی حسین سعیدی

طول اضلاع مثلثی ۵، ۷ و ۱۰ می‌باشد. طول بزرگ‌ترین ارتفاع آن کدام است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{55}}{2}$ (۲) $\frac{4\sqrt{66}}{5}$
 (۳) $\frac{5\sqrt{47}}{3}$ (۴) $\frac{6\sqrt{51}}{5}$

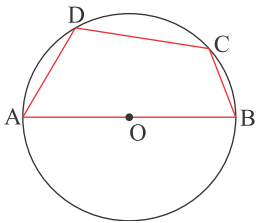
تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

یک دوزنقه متساوی‌الساقین با قاعده‌هایی به‌اندازه ۹ و ۱۶ واحد، بر دایره‌ای محیط شده است. فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره، تا یک رأس قاعده کوچک دوزنقه، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\sqrt{3}$
 (۳) ۲ (۴) $\frac{5}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

در شکل زیر، شعاع دایره ۶ و طول وتر BC، برابر ۴ است. $\tan \hat{D}$ کدام است؟



- (۱) $-\sqrt{2}$
 (۲) $-2\sqrt{3}$
 (۳) $-\sqrt{3}$
 (۴) $-2\sqrt{2}$

تالیفی میثم امین

در مثلثی داریم $a = 5$ ، $b = 6$ و $c = 3$ ، مقدار $\frac{\sin^2 A}{\sin B}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{10}{27}$ (۲) $\frac{20}{27}$
 (۳) $\frac{25}{54}$ (۴) $\frac{25}{27}$

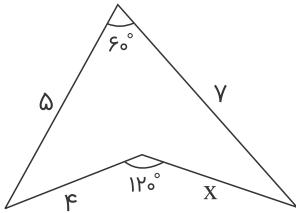
تالیفی صبا مهدوی

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله ۳ و از نقطه B به فاصله ۵ هستند، یک نقطه است. فاصله دو نقطه A و B کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴
 (۳) ۶ (۴) هیچ‌کدام

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

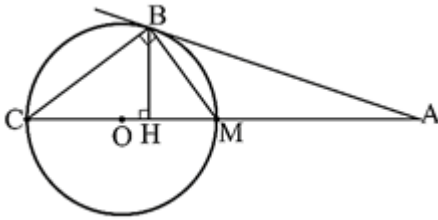
۱۷۷ در شکل زیر، مقدار $(x + 2)$ ، کدام است؟



- (۱) $3\sqrt{3}$
(۲) $2\sqrt{7}$
(۳) $4\sqrt{2}$
(۴) $3\sqrt{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۷۸ در شکل زیر داریم $A = 30^\circ$ ، $AB = 6$ و $AM = 3$ ، حاصل $BM \times BC$ چقدر است؟



- (۱) ۲۷
(۲) ۱۵
(۳) ۳۰
(۴) ۴۵

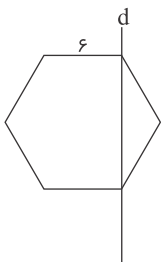
مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۵

۱۷۹ چهار نقطه $A(1, 10)$ ، $B(9, -9)$ ، $M(a, 4)$ و $N(a, 0)$ را در صفحه مختصات، در نظر بگیرید. کمترین اندازه خط شکسته $AMNB$ ، کدام است؟

- (۱) ۲۱
(۲) ۲۰
(۳) ۱۹
(۴) ۱۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

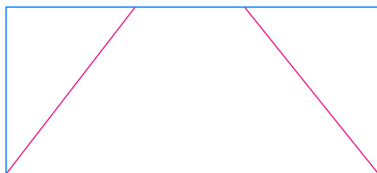
۱۸۰ اگر شش ضلعی زیر را نسبت به d بازتاب کنیم، دو شش ضلعی در هم حاصل می‌شود. مساحت شکل حاصل کدام است؟ (شش ضلعی منتظم است)



- (۱) $63\sqrt{3}$
(۲) $\frac{63\sqrt{3}}{2}$
(۳) $45\sqrt{3}$
(۴) $90\sqrt{3}$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

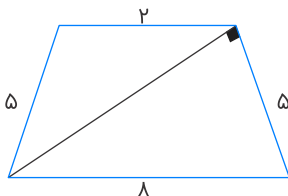
مطابق شکل زیر، دوزنقه‌ای به قاعده‌های ۴ و ۱۶ درون یک مستطیل به مساحت ۱۲۸ قرار دارد. اگر محیط این دوزنقه کمترین مقدار باشد، کدام گزینه صحیح است؟



- (۱) دوزنقه محاطی است ولی محیطی نیست
- (۲) دوزنقه نه محاطی است و نه محیطی
- (۳) شعاع دایره محاطی دوزنقه برابر ۴ است.
- (۴) قطر دایره محاطی دوزنقه برابر ۴ است.

تالیفی حسین سعیدی

در شکل زیر شعاع دایره محیطی دوزنقه چندبرابر شعاع دایره محاطی آن است؟



- (۱) ۲
- (۲) $\sqrt{2}$
- (۳) ۳
- (۴) $\sqrt{3}$

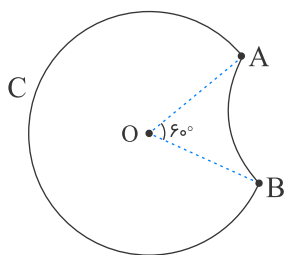
تالیفی حسین سعیدی

در یک دوزنقه متساوی الساقین، از برخورد نیمساز زاویه‌های داخلی، کدام چهارضلعی حاصل می‌شود؟

- (۱) مستطیل
- (۲) محاطی
- (۳) متوازی الاضلاع
- (۴) لوزی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

شکل زیر، زمینی کشاورزی است. اگر بخواهیم مساحت آن را بدون تغییر محیط بیشینه کنیم، چقدر به مساحت آن اضافه می‌شود؟ ($R = ۶$)
کمان AB ، قسمتی از دایره به شعاع ۶ می‌باشد که از تقاطع با دایره C به وجود آمده است.



- (۱) $6\pi - 9\sqrt{3}$
- (۲) $12\pi - 18\sqrt{3}$
- (۳) $4\pi - 6\sqrt{3}$
- (۴) $8\pi - 12\sqrt{3}$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

در رسم بزرگ‌ترین مربع ممکن داخل مثلث ABC به طوری که یک ضلع مربع منطبق بر ضلع BC باشد، از کدام تبدیل هندسی استفاده می‌شود؟

- (۱) انتقال
- (۲) تجانس
- (۳) بازتاب
- (۴) دوران

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

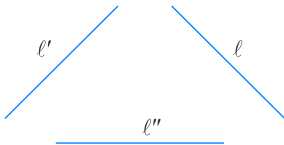
دایره‌های $C(O, 3)$ و $C'(O', 2)$ و $C''(O'', 4)$ مفروض‌اند. اگر $OO' = 1$ ، $O'O'' = 6$ و $OO'' = 5$ باشد، چند مورد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

- الف) دایره‌های C و C' مماس داخلی‌اند.
 ب) دایره‌های C' و C'' مماس خارجی‌اند.
 پ) دایره‌های C و C'' دو مماس مشترک دارند.

- (۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) ۳

تالیفی حسین سعیدی

سه خط دوه‌دو ناموازی ℓ ، ℓ' و ℓ'' مفروض‌اند. می‌خواهیم ذوزنقه‌ای رسم کنیم که قاعده کوچک آن 5cm باشد و بقیه اضلاع روی این سه خط منطبق باشند. از کدام تبدیل باید استفاده کنیم؟



- (۱) بازتاب
 (۲) انتقال
 (۳) دوران
 (۴) تجانس

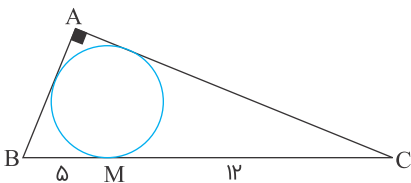
تالیفی حسین سعیدی

چهار ضلعی $ABCD$ یک لوزی با زاویه حاده $\hat{A} = 60^\circ$ و ضلع دلخواه است. این لوزی را یک بار حول A 120° درجه و بار دیگر 240° درجه دوران می‌دهیم تا لوزی‌های $AB'C'D'$ و $AB''C''D''$ حاصل شود. شکل نهایی ۳ لوزی هم‌نهشت خواهد بود که در رأس A مشترک‌اند. می‌خواهیم مساحت شکل حاصل را به کمک تبدیل مناسب بدون تغییر محیط تا حد امکان افزایش دهیم. مساحت شکل جدید چندبرابر شکل اولیه است؟

- (۱) ۴
 (۲) ۶
 (۳) ۲
 (۴) ۳

تالیفی صبا مهدوی

در شکل زیر، اگر M نقطه تماس دایره محاطی داخلی مثلث با وتر باشد، شعاع دایره محاطی داخلی چقدر است؟



- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) ۴
 (۴) ۵

تالیفی محمد حسینی فرد

مساحت ۱۲ ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع $R = ۱$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{10}}{12} \quad (۲)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (۱)$$

$$2/4 \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

تالیفی محمد حسینی فرد

در مثلثی با اضلاع ۴، ۷ و ۹، پاره‌خط بزرگ‌تری که از نقطه تماس دایره محاطی داخلی با ضلع بزرگ‌تر روی آن به وجود می‌آید، کدام است؟

$$7 \quad (۲)$$

$$8 \quad (۱)$$

$$5 \quad (۴)$$

$$6 \quad (۳)$$

تالیفی محمد حسینی فرد

در یک شش ضلعی منتظم به ضلع a مساحت بین دایره‌های محیطی و محاطی آن چندبرابر مساحت شش ضلعی است؟

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{9} \quad (۲)$$

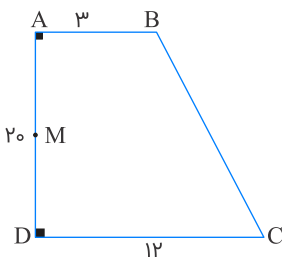
$$\frac{\pi\sqrt{3}}{18} \quad (۱)$$

$$\frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{3} \quad (۳)$$

تالیفی حسین سعیدی

در دوزنقه قائم‌الزاویه زیر، نقطه M روی ساق قائم طوری قرار گرفته است که محیط مثلث $\triangle BMC$ کمترین مقدار را دارد. سینوس زاویه $\hat{BMC}$ کدام است؟



$$0/96 \quad (۱)$$

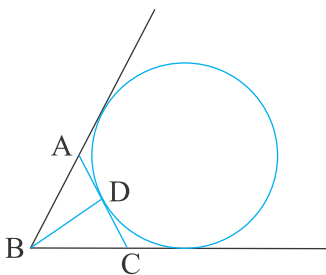
$$0/6 \quad (۲)$$

$$0/48 \quad (۳)$$

$$0/8 \quad (۴)$$

تالیفی حسین سعیدی

در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، مطابق شکل، دایره محاطی خارجی نظیر زاویه B رسم شده است. اگر $AB = AC = ۱۰$ و $BC = ۱۲$ باشد، آنگاه طول پاره‌خط BD چندبرابر $\sqrt{10}$ است؟



$$3/2 \quad (۱)$$

$$2/4 \quad (۲)$$

$$3/6 \quad (۳)$$

$$4/2 \quad (۴)$$

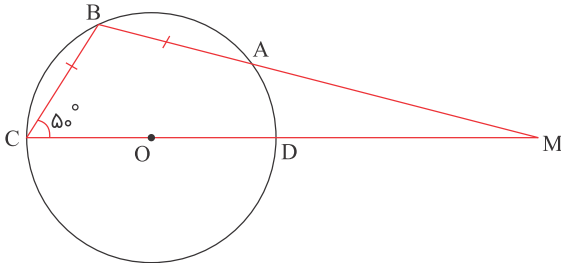
تالیفی میثم امین

وسط وتری به طول ۱۶ که درون دایره $C(O, ۱۰)$ رسم شده است، روی کدام دایره قرار دارد؟

- (۱) دایره‌ای به قطر ۱۲
(۲) دایره‌ای به قطر ۱۰
(۳) دایره‌ای به شعاع ۸
(۴) دایره‌ای به شعاع ۵

تالیفی سیامک شهبازی زاده

زاویه M کدام است؟



- (۱) 40°
(۲) 50°
(۳) 20°
(۴) 30°

تالیفی سیامک شهبازی زاده

مساحت مثلث با اضلاع ۴، ۵ و ۶ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{5\sqrt{63}}{4}$
(۲) $\frac{\sqrt{63}}{4}$
(۳) $\frac{3\sqrt{63}}{4}$
(۴) $\frac{7\sqrt{63}}{4}$

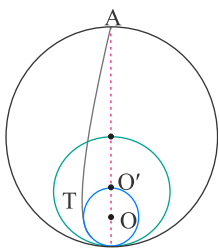
مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۴

اگر در مثلث ABC ، رابطه $a = (2b^2 - 3) \times \frac{\sin A}{\sin B}$ برقرار باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$
(۲) $b = 1$
(۳) $\hat{A} = \frac{2\pi}{3}$
(۴) $b = \frac{3}{2}$

تالیفی نرگس کارگر

در شکل زیر سه دایره بر هم مماس‌اند و شعاع هر دایره بزرگ‌تر دو برابر دایره کوچک‌تر است. از نقطه A ، مماس AT را بر کوچک‌ترین دایره رسم می‌کنیم. اگر مساحت مثلث TOO' برابر با $14\sqrt{3}$ باشد، محیط دایره متوسط کدام است؟



- (۱) 14π
(۲) 28π
(۳) 56π
(۴) 60π

تالیفی نرگس کارگر

در مثلث ABC ، I محل هم‌رسی نیم‌سازهای مثلث است. اگر $BC = \frac{IB \cdot IC}{IA}$ ، آنگاه $\hat{A}$ چند درجه است؟

(۲) ۳۰

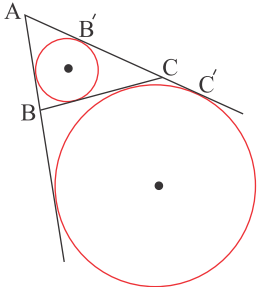
(۱) ۶۰

(۴) ۹۰

(۳) ۴۵

تالیفی صبا مهدوی

در شکل زیر، دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث ABC به شعاع‌های ۲ و ۶ رسم شدند. اگر $AB' = ۳$ باشد، طول $B'C'$ چقدر است؟



(۱) ۶

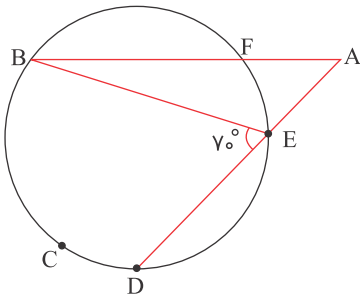
(۲) ۸

(۳) ۵

(۴) ۱۰

تالیفی محمد حسینی فرد

در شکل زیر، $\widehat{BC} = \widehat{FB}$ و $\widehat{ED} = \widehat{DC}$ است. زاویه A چند درجه است؟



(۱) ۲۰

(۲) ۳۰

(۳) ۶۰

(۴) ۴۰

تالیفی سیامک شهبازی زاده

در دوزنقه‌ای با قاعده‌های ۱ و ۶، امتداد ساق‌ها بر هم عمودند. اگر نیم‌سازهای این دوزنقه در O هم‌رس باشند، طول ساق کوچک‌تر کدام است؟

(۲) ۳

(۱) ۳/۵

(۴) ۴

(۳) ۲/۵

تالیفی حسین سعیدی

مربع‌های $ABDE$ و $ACFG$ را روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC ، خارج آن رسم می‌کنیم. اگر BG و CE در P یکدیگر را قطع کنند، چندتا از موارد زیر صحیح است؟
 الف) چهار ضلعی‌های $PBDE$ و $PCFG$ محاطی‌اند.
 ب) $BG = CE$
 ج) $PB^2 + PC^2 = BC^2$

(۲) یک

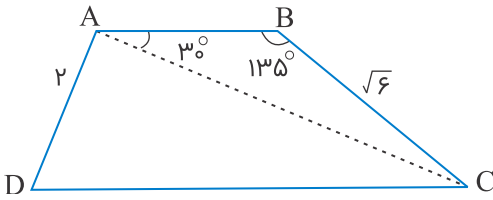
(۱) سه

(۴) صفر

(۳) دو

تالیفی صبا مهدوی

در دوزنقه زیر، مساحت مثلث $\triangle ACD$ کدام است؟

(۱) $2\sqrt{6}$ یا $4\sqrt{6}$ (۲) $2\sqrt{3}$ یا $4\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{6}$ یا $2\sqrt{6}$ (۴) $\sqrt{3}$ یا $2\sqrt{3}$

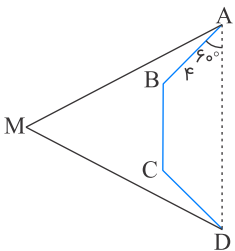
تالیفی حسین سعیدی

در مثلثی به زوایای 30° و 120° ، نسبت طول بلندترین نیمساز، به طول کوتاه‌ترین ضلع کدام است؟

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

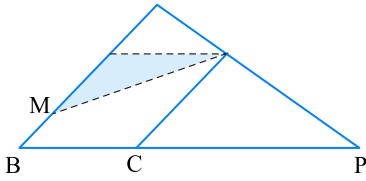
تالیفی حسین سعیدی

$DCBA$ بخشی از یک شش ضلعی منتظم است. اگر بخواهیم مساحت $AMDCB$ را بدون تغییر محیط بیشینه کنیم، چقدر به مساحت آن اضافه می‌شود؟

(۱) $24\sqrt{3}$ (۲) $12\sqrt{3}$ (۳) $12\sqrt{3} + 8$ (۴) $24\sqrt{3} + 8$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

در شکل زیر نقطه M وسط ضلع متوازی‌الاضلاع است. اگر $PC = \frac{2}{3}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه‌زده چندبرابر مساحت بزرگ‌ترین مثلث‌ها است؟



- (۱) $\frac{1}{12}$
 (۲) $\frac{1}{9}$
 (۳) $\frac{1}{8}$
 (۴) $\frac{3}{16}$

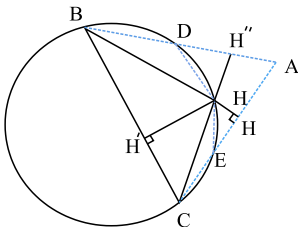
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

یک دوزنقه متساوی‌الساقین، با کدام شرط قابل محیط بر دایره است؟

- (۱) دو قطر عمود برهم
 (۲) یکی از قاعده‌های دوزنقه، برابر یکی از ساق‌ها
 (۳) خط واصل وسط دو ساق، گذرا از محل تلاقی قطرهای
 (۴) طول پاره‌خط واصل وسط دو ساق، برابر اندازه یکی از ساق‌ها

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

در شکل زیر، نقطه H محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC است. زاویه $\hat{AHD}$ ، با کدام زاویه برابر است؟



- (۱) $\hat{CAE}$
 (۲) $\hat{ABC}$
 (۳) $\hat{ADH}$
 (۴) $\hat{AHC}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نیمساز وارد بر وتر، روی وتر پاره‌خط‌هایی به طول ۶ و ۸ واحد به وجود آورده است. اندازه ارتفاع وارد بر وتر این مثلث کدام است؟

- (۱) $6/72$
 (۲) $6/54$
 (۳) $6/64$
 (۴) $6/48$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

نقطه P روی دایره $C(O, R)$ مفروض است. مجانس دایره C به مرکز P و با نسبت $k = -2$ ، با دایره C چه وضعیتی دارد؟

- (۱) متخارج
(۲) متقاطع
(۳) مماس خارج
(۴) مماس داخل

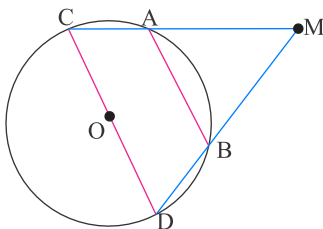
تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

دایره‌ای از رئوس A و B دوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ می‌گذرد و در نقطه C بر ساق غیرقائم CD مماس است. اگر قاعده بزرگ دو برابر ساق قائم باشد، زاویه D چند درجه است؟

- (۱) 60°
(۲) $22/5^\circ$
(۳) 45°
(۴) 30°

تالیفی حسین سعیدی

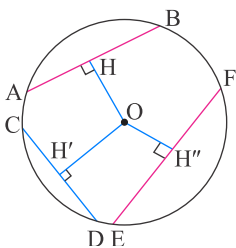
اگر وتر $AB = \sqrt{2}R$ باشد، اندازه زاویه M کدام است؟



- (۱) 30°
(۲) 35°
(۳) 45°
(۴) 50°

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

مطابق شکل در دایره $C(O, 6)$ داریم، $OH = OH' > OH''$. اگر $AB = 12 - 2m$ ، $CD = m + 3$ و $EF = m + n$ باشد، مقدار n چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟



- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) بی‌شمار

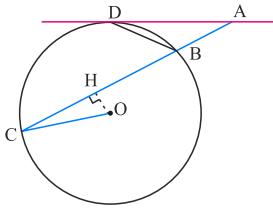
تالیفی حسین سعیدی

وتر AB به طول ۸ در دایره $C(O, R)$ توسط نقطه M به نسبت ۲ به ۳ تقسیم شده است. اندازه کوچک‌ترین وتر گذرنده از M کدام است؟

- (۱) $\frac{16\sqrt{6}}{5}$
(۲) $\frac{8\sqrt{6}}{5}$
(۳) $4\sqrt{6}$
(۴) $2\sqrt{6}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹۱۳۹۴

در شکل زیر، AD مماس بر دایره به مرکز O و OH عمود بر AC است. اگر $\widehat{DBC} = 2\widehat{DAC}$ باشد، زاویه $\widehat{COH}$ چندبرابر زاویه $\widehat{DAC}$ است؟



(۱) $\frac{2}{5}$

(۲) $\frac{3}{5}$

(۳) $\frac{3}{5}$

(۴) $\frac{4}{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

وسط‌های اضلاع یک دوزنقه متساوی‌الساقین را متوالیاً به هم وصل کرده‌ایم تا یک چهارضلعی به دست آید. اگر طول یک ضلع این چهارضلعی ۸ و یک زاویه آن 60° باشد، مساحت آن کدام است؟

(۲) $40\sqrt{2}$

(۱) $42\sqrt{2}$

(۴) $32\sqrt{3}$

(۳) $30\sqrt{3}$

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

نقطه P روی ضلع AB از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC قرار دارد به طوری که به رأس A نزدیک‌تر است. با حرکت P روی همین ضلع به سمت رأس B ، تفاضل شعاع‌های دایره محیطی مثلث‌های APC و BPC

(۲) ابتدا منفی و سپس مثبت خواهد بود

(۱) ابتدا مثبت و سپس منفی خواهد بود

(۴) اطلاعات مسئله کافی نیست

(۳) صفر خواهد بود

تالیفی نرگس کارگر

بازتاب خط $x - 2y = 4$ نسبت به نقطه $(2, a)$ ، خط $x - 2y + 6 = 0$ است. a کدام است؟

(۲) $\frac{3}{2}$

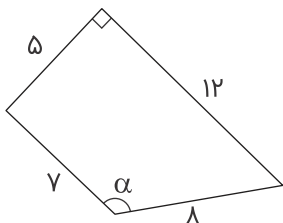
(۱) ۱

(۴) $\frac{5}{2}$

(۳) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

در چهار ضلعی زیر، دو ضلع عمود بر هم‌اند، $\sin \alpha$ کدام است؟



(۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(۲) $\frac{3}{5}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۴) $\frac{4}{5}$

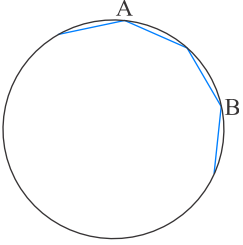
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

چند خط می‌توان رسم کرد که بر دایره C مماس بوده و با خط مفروض L زاویه ۴۵ درجه بسازد؟

- (۱) حداکثر ۱
(۲) حداکثر ۲
(۳) حداکثر ۳
(۴) حداکثر ۴

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۴

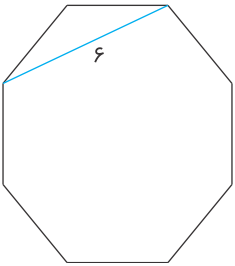
شکل محاط شده در دایره چندضلعی باشد تا کمان AB برابر با ۶۰ درجه باشد؟ (چندضلعی منتظم است)



- (۱) ۶
(۲) ۱۲
(۳) ۸
(۴) ۱۰

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

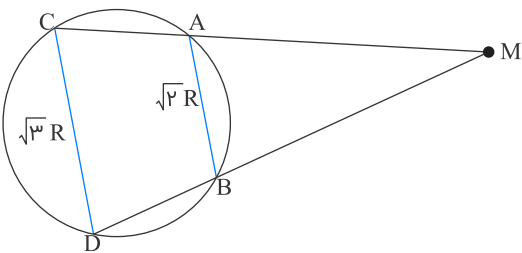
طول قطر کوچک یک هشت ضلعی منتظم مطابق شکل، برابر ۶ است. مساحت هشت ضلعی کدام است؟



- (۱) $36\sqrt{2}$
(۲) $38\sqrt{2}$
(۳) $32\sqrt{2}$
(۴) $34\sqrt{2}$

تالیفی میثم امین

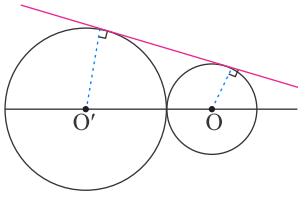
در شکل زیر اندازه وتر $AB = \sqrt{2}R$ و $CD = \sqrt{3}R$ است. زاویه M چند درجه است؟



- (۱) ۳۰
(۲) ۱۵
(۳) ۲۰
(۴) ۱۰

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ واحد مماس برهم‌اند. دایره به قطر OO' با مماس مشترک خارجی در نقطه M مشترک‌اند. فاصله M از نقطه تماس دو دایره، کدام است؟



(۱) ۶

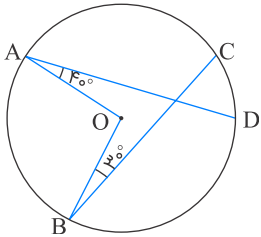
(۲) ۶/۵

(۳) ۷

(۴) ۷/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

در شکل زیر اختلاف اندازه کمان‌های $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ چند درجه است؟

(۱) 70° (۲) 75° (۳) 150° (۴) 140°

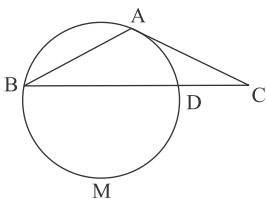
تالیفی حسین سعیدی

طول اضلاع مثلثی ۱، ۱ و $\sqrt{3}$ است. مساحت این مثلث چقدر است؟

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۴

در شکل زیر، مماس AC بر دایره با وتر AB از دایره برابرنند، اگر کمان $\widehat{DMB}$ برابر 222° باشد، زاویه C چند درجه است؟



(۱) ۲۱

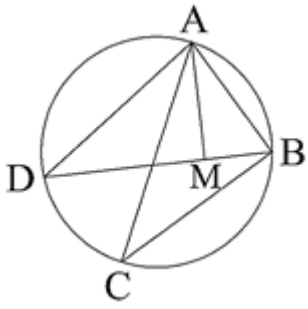
(۲) ۲۲

(۳) ۲۳

(۴) ۲۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۳۰ در دایره شکل زیر $\hat{D}AC = \hat{B}AM$ حاصل $AD \times BC$ برابر کدام است؟



(۱) $BM \times AC$

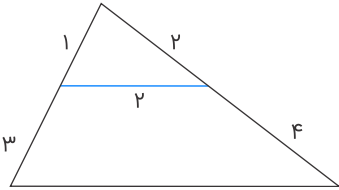
(۲) $BD \times MB$

(۳) $AB \times DC$

(۴) $MD \times AC$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۴

۲۳۱ در شکل زیر، اندازه ضلع بزرگتر چهارضلعی کدام است؟



(۱) $2\sqrt{10}$

(۲) $2\sqrt{11}$

(۳) $4\sqrt{3}$

(۴) $5\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۲۳۲ در مثلث ABC می‌دانیم $\hat{A} = 45^\circ$ و طول میانه AM برابر ۶ می‌باشد. اگر G محل هم‌مرسی میانه‌های مثلث باشد و G' و G'' به ترتیب بازتاب G نسبت به اضلاع AB و AC ، مساحت مثلث $AG'G''$ کدام است؟

(۱) ۸ (۲) $\frac{9}{2}\sqrt{2}$

(۳) ۱۸ (۴) $12\sqrt{2}$

تالیفی مجید قهرمانی

۲۳۳ برای تعیین فاصله دو نقطه A و B که دو طرف رودخانه‌ای قرار دارند، نقطه C را در طرف A طوری اختیار می‌کنیم که $\hat{ACB} = 45^\circ$ و $\hat{BAC} = 15^\circ$ ، $AC = 30$. طول AB کدام است؟

(۱) $10\sqrt{3}$ (۲) $10\sqrt{6}$

(۳) $20\sqrt{3}$ (۴) $20\sqrt{6}$

تالیفی میثم امین

۲۳۴ قطر یک لوزی نصف قطر دیگر آن است. اگر شعاع دایره محاطی آن $\sqrt{5}$ باشد، محیط لوزی کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) $5\sqrt{5}$

(۳) ۲۰ (۴) $10\sqrt{5}$

تالیفی حسین سعیدی

۲۳۵

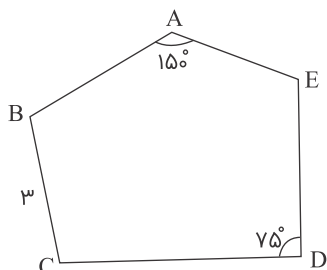
شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ به مساحت $۵۴\sqrt{۳}$ مفروض است. طول کوتاه‌ترین مسیر از A به D به طوری که بخواهیم یک بار از امتداد هر کدام از اضلاع BC و EF رد شویم، کدام است؟

- (۱) ۲۸
(۲) ۲۴
(۳) $\sqrt{۳۹۶ + ۷۲\sqrt{۳}}$
(۴) $\sqrt{۹۹ + ۷۲\sqrt{۳}}$

تالیفی صبا مهدوی

۲۳۶

اگر $ABCDE$ ضلعی مطابق شکل، قابل محاط شدن در یک دایره باشد، شعاع این دایره چقدر است؟

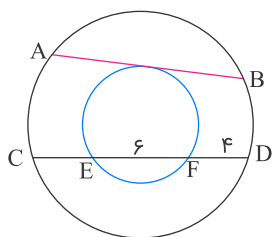


- (۱) ۳
(۲) $\frac{۳}{۲}$
(۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$
(۴) $۳\sqrt{۲}$

تالیفی محمد حسینی فرد

۲۳۷

در شکل زیر دو دایره C و C' هم‌مرکزند. وتر AB از دایره C بر C' مماس بوده و وتر CD دایره C' را در E و F قطع می‌کند به طوری که $EF = ۶$ و $FD = ۴$ می‌شود. طول وتر AB چقدر است؟



- (۱) $۴\sqrt{۶}$
(۲) $۴\sqrt{۱۰}$
(۳) $۸\sqrt{۶}$
(۴) $۸\sqrt{۲}$

تالیفی صبا مهدوی

۲۳۸

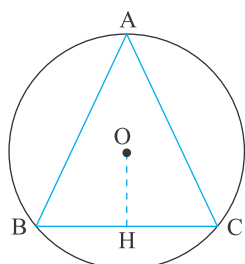
اگر T یک تبدیل ایزومتري (طولپا) باشد و F مجموعه تمام نقاط ثابت T باشد، کدام گزینه نمی‌تواند نشان‌دهنده تعداد اعضای F باشد؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) بی‌شمار

تالیفی مجید قهرمانی

۲۳۹

در شکل زیر، O مرکز دایره محیطی مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) است. اگر $OH = ۳$ و شعاع دایره برابر ۵ باشد، طول ساق مثلث کدام است؟



- (۱) ۶
(۲) $۴\sqrt{۵}$
(۳) ۸
(۴) $۳\sqrt{۱۰}$

تالیفی محمد حسینی فرد

مجانس نقطه $A = (2, 4)$ نسبت به مرکز تجانس $M = (1, 2)$ و عامل مقیاس ۲ را B می‌نامیم. فاصله مجانس نقطه B نسبت به مبدأ و نسبت ۲ تا نقطه A چقدر است؟

$$(2) \quad 4\sqrt{5}$$

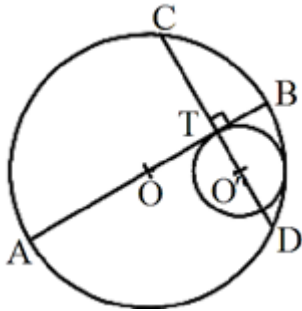
$$(1) \quad 6\sqrt{5}$$

$$(4) \quad 2\sqrt{5}$$

$$(3) \quad 3\sqrt{5}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۵

دو دایره $(O, 3)$ و $(O', 1)$ مماس داخل‌اند. قطر AB از دایره O ، در نقطه T بر دایره O' مماس است. اندازه TC چقدر است؟



$$(1) \quad \sqrt{2}$$

$$(2) \quad \sqrt{3}$$

$$(3) \quad \sqrt{6}$$

$$(4) \quad 3$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

دایره $C(O, 3)$ و $C(O', 2a - 1)$ تصویر یکدیگر تحت انتقال به طول بردار a هستند. اندازه وتر مشترک دو دایره کدام است؟

$$(2) \quad 3$$

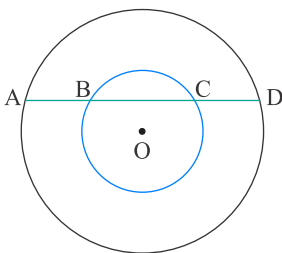
$$(1) \quad \sqrt{2}$$

$$(4) \quad 2$$

$$(3) \quad 4\sqrt{2}$$

تالیفی مجید فهروانی

در شکل زیر دایره‌ها هم‌مرکز می‌باشند و شعاع یکی از آن‌ها یک واحد از دیگری بزرگ‌تر است. اگر $\frac{AD}{3} = \frac{BC}{2} = 4$ باشد، مجموع شعاع دو دایره چقدر است؟



$$(1) \quad 16$$

$$(2) \quad 24$$

$$(3) \quad 12$$

$$(4) \quad 20$$

تالیفی حسین سعیدی

به ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع ۲ واحد اضافه می‌کنیم. شعاع دایره محاطی داخلی و خارجی آن به ترتیب چقدر بزرگ‌تر می‌شوند؟

$$(2) \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ و } \sqrt{3}$$

$$(1) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$(4) \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ و } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) \quad \sqrt{3} \text{ و } \frac{\sqrt{3}}{3}$$

تالیفی حسین سعیدی

دایره‌ای به شعاع r توسط یک مربع محاط و بر مربع دیگری محیط شده است. نسبت تشابه این دو مربع کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
 (۲) 2
 (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (۴) $\sqrt{2} + 1$

تالیفی حسین سعیدی

شعاع دایره محیطی مثلث ABC ، با یک ضلع آن برابر است. این مثلث حتماً:

- (۱) یک زاویه 120° دارد.
 (۲) یک زاویه 90° دارد.
 (۳) یک زاویه 60° دارد.
 (۴) یک زاویه 30° دارد.

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

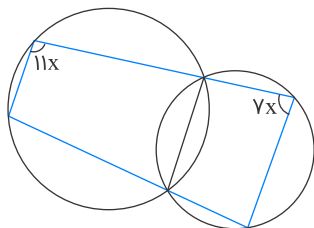
در یک دوزنقه محیط بر دایره، طول خط واصل بین وسط‌های دو ساق آن 12 واحد است. محیط دوزنقه، کدام است؟

- (۱) 36
 (۲) 44
 (۳) 46
 (۴) 48

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

در شکل زیر مقدار x کدام است؟



- (۱) 15°
 (۲) 10°
 (۳) 12°
 (۴) 8°

تالیفی سعید قطبی طاهری

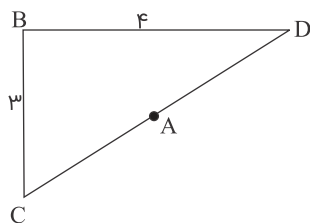
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

در یک تجانس به مرکز A و نسبت k ، دایره C_1 با مرکز O_1 و شعاع r را به دایره C_2 با مرکز O_2 و شعاع 2 تبدیل می‌کنیم. اگر $AO_2 = 6$ و C_1 و C_2 بر هم مماس باشند، k کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) 3
 (۲) $\frac{1}{3}$
 (۳) 2
 (۴) گزینه ۱ و ۲

تالیفی صبا مهدوی

نقطه A روی وتر قرار دارد و آن را نصف کرده است. نزدیک‌ترین مسیر از A به B اگر بخواهیم از دو ضلع قائم بگذریم چه اندازه‌ای دارد؟



(۱) $\frac{1}{25}$

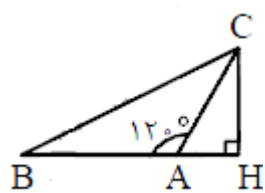
(۲) $\frac{2}{5}$

(۳) $\frac{6}{5}$

(۴) ۵

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

در شکل زیر $AC = 1$ و $BC = \sqrt{4 + \sqrt{3}}$ می‌باشد. اندازه HB چقدر است؟



(۱) $\sqrt{3} + \frac{1}{2}$

(۲) $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

(۳) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

(۴) $\sqrt{3} + \frac{1}{4}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۴

اضلاع زاویه قائمه مثلث ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) بر یک دایره مماس‌اند و وتر مثلث بر یکی از قطرهای منطبق است. اگر $AB = 3$ و $AC = 6$ شعاع دایره کدام است؟

(۲) $\frac{3}{2}$

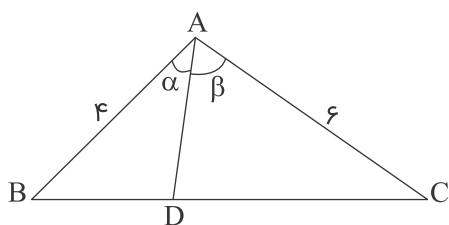
(۱) ۲

(۴) ۱

(۳) $\sqrt{3}$

تالیفی سیامک شهبازی زاده

در مثلث زیر، نقطه D روی ضلع BC است، به طوری که $\frac{CD}{BD} = 2$ می‌باشد. حاصل $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ کدام است؟



(۱) $\frac{4}{3}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{3}{8}$

(۴) $\frac{8}{3}$

تالیفی میثم امین

خط d دایره‌ای به شعاع واحد را قطع می‌کند. اگر زاویه خط مماس بر دایره در نقطه تلاقی خط d و دایره برابر 30° باشد، فاصله مرکز دایره تا d کدام است؟

$$\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۵

دو دایره نامساوی به مرکزهای O و O' مماس خارج‌اند. دایره‌ای به قطر OO' با مماس مشترک خارجی این دو دایره، کدام وضعیت را دارد؟

$$(۲) \text{ مماس}$$

$$(۱) \text{ متقاطع}$$

$$(۴) \text{ نامشخص}$$

$$(۳) \text{ متخارج}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

دو دایره متقاطع در نقطه A مشترک‌اند. خط گذرا بر A دو دایره مفروض را در B و C قطع می‌کند. مماس‌ها بر هر دایره در B و C در نقطه M متقاطع‌اند. در مثلث MBC با چرخش خط قاطع، کدام جزء ثابت می‌ماند؟

$$(۲) \text{ محیط}$$

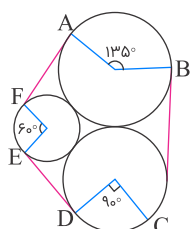
$$(۱) MA$$

$$(۴) \text{ زاویه } \hat{BMC}$$

$$(۳) \text{ مساحت}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

در شکل زیر شعاع دایره‌ها ۶ و ۵ و ۲ است. نخ‌ی دور این دایره‌ها پیچیده‌ایم. اگر نخ فقط یک دور پیچیده شده باشد، طول نخ چقدر بوده است؟ ($\pi \simeq 3$)



$$(۱) 50$$

$$(۲) 23 + 2(\sqrt{30} + \sqrt{10} + \sqrt{12})$$

$$(۳) 21 + 2\sqrt{30} + 2\sqrt{10} + 4\sqrt{3}$$

$$(۴) 40$$

تالیفی سعید قطبی طاهری

مدارس ریاضی و فیزیک مفید

دایره $C(O, 1-2a)$ تحت انتقال به دایره $C'(O', 4-a^2)$ تصویر شده است. اگر C'' مجانس C' به مرکز تجانس O و ضریب a باشد و بدانیم C و C' مماس بیرونی هستند، آنگاه اندازه مماس مشترک داخلی C' و C'' کدام گزینه است؟

$$(۲) 6\sqrt{2}$$

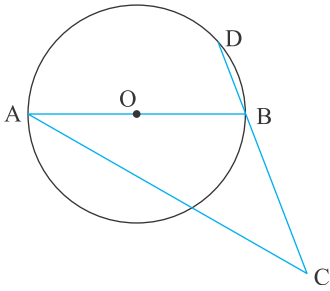
$$(۱) 6\sqrt{3}$$

$$(۴) 3\sqrt{2}$$

$$(۳) 3\sqrt{3}$$

تالیفی مجید قهرمانی

۲۵۹ در شکل زیر، شعاع دایره ۵، $BD = 6$ و $BC = 9$ است. مساحت مثلث ABC کدام است؟



(۱) ۳۶

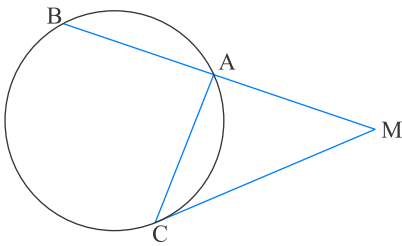
(۲) ۴۸

(۳) ۴۵

(۴) ۵۴

تالیفی سیامک شهبازی زاده

۲۶۰ در شکل زیر زاویه M با کمان $\widehat{AC}$ برابر است. اگر وتر AB محیط دایره را به نسبت ۱ به ۴ تقسیم کند، زاویه $\widehat{C}$ چند درجه است؟
($\widehat{AB} < \widehat{BC}$)



(۱) ۳۶

(۲) ۱۸

(۳) ۴۸

(۴) ۲۴

تالیفی حسین سعیدی

۲۶۱ در یک دوزنقه متساوی الساقین از برخورد نیمسازهای داخلی آن، دقیقاً کدام چهار ضلعی حاصل می‌شود؟

(۲) فقط محاطی

(۱) محاطی و محیطی

(۴) نه محاطی و نه محیطی

(۳) فقط محیطی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۶۲ فاصله مرکز دایره از وتر نظیر کمان 60° چندبرابر فاصله مرکز دایره از وتر نظیر کمان 90° است؟

(۲) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

تالیفی سیامک شهبازی زاده

۲۶۳ دو دایره C_1 و C_2 یک طرف خط l طوری قرار دارند که آن را قطع نمی‌کنند. از نقطه A روی l یک مماس بر هریک از دو دایره C_1 و C_2 رسم می‌کنیم به طوی که با خط l زاویه برابر بسازند. چند جفت از این مماس‌ها می‌توان رسم کرد؟

(۲) سه

(۱) دو

(۴) یک

(۳) چهار

تالیفی صبا مهدوی

در چهار ضلعی ABCD عمود منصف‌ها هم‌رسانند. اگر مجموع زوایای A و D از تفاضل زوایای B و C، 60° درجه بیشتر باشد، زاویه $\hat{B}$ چند برابر زاویه $\hat{D}$ است؟ ($\hat{B} > \hat{C}$)

(۲) ۲

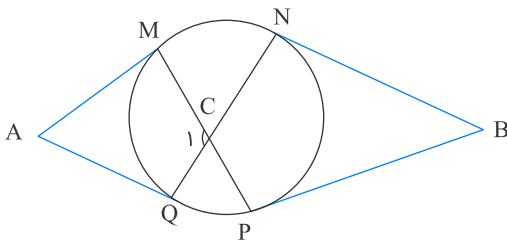
(۱) ۱

(۴) ۵

(۳) ۳

تالیفی حسین سعیدی

در شکل زیر زاویه $\hat{A}$ دو برابر زاویه $\hat{B}$ است. اگر زاویه $\hat{C}_1$ ، 30° درجه از $\hat{B}$ بزرگ‌تر باشد، کدام گزینه صحیح نیست؟



(۱) $A + B = 180^\circ$

(۲) $MQ \parallel NP$

(۳) $A - B = 60^\circ$

(۴) $MP \perp NQ$

تالیفی حسین سعیدی

اگر رابطه $\sqrt{3}(h_a + h_b) = a + b$ بین اجزای مثلث ABC برقرار باشد، آنگاه اندازه زاویه C کدام است؟

(۲) $\sin^{-1} \frac{1}{3}$

(۱) $\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3}$

(۴) $\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{4}$

(۳) $\sin^{-1} \frac{2}{3}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۵

طول کمان 120° از دایره $C(O, R)$ با طول کمان 60° از دایره $C'(O', R')$ برابر است. نسبت مساحت دایره بزرگ به دایره کوچک چقدر است؟

(۲) ۸

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۲

تالیفی سیامک شهبازی زاده

در مثلث به اضلاع ۸، ۹ و ۱۳ فاصله نقطه هم‌رسمی میانه‌ها تا وسط بزرگ‌ترین ضلع کدام است؟

(۲) $\frac{8}{5}$

(۱) $\frac{10}{3}$

(۴) $\frac{11}{6}$

(۳) $\frac{11}{5}$

تالیفی میثم امین

اگر یک چهارضلعی تحت یک بازتاب به روی خودش تصویر شود، کدام گزینه در مورد آن چهارضلعی می‌تواند صحیح باشد؟

(۱) چهارضلعی محاطی است.

(۲) چهارضلعی دو ضلع موازی دارد.

(۳) یک قطر چهارضلعی عمود منصف قطر دیگر است.

(۴) گزینه ۲ یا ۳

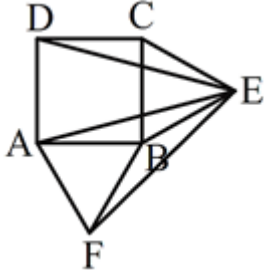
تالیفی مجید قهرمانی

تبدیل طولیای T سه نقطه $(0, 0)$ ، $(0, 1)$ و $(1, 1)$ را ثابت نگه می‌دارد. عرض از مبدأ تصویر خط $y = 2x - 1$ تحت تبدیل T کدام است؟

- (۱) -1 (۲) صفر
(۳) 1 (۴) $-\frac{1}{2}$

تالیفی مجید قهرمانی

اگر ABCD مربع و مثلث‌های BCE و ABF متساوی‌الاضلاع باشند آنگاه نسبت مساحت مثلث AEF به مساحت مثلث DCE برابر کدام است؟



- (۱) $\sqrt{3} + 1$
(۲) $\sqrt{3} + 2$
(۳) $2\sqrt{3} + 2$
(۴) $2\sqrt{3} + 1$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۴

در یک مثلث قائم‌الزاویه، شعاع دایره محاطی داخلی و دایره محیطی به ترتیب برابر ۶ و ۱۷ است. شعاع بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی چقدر است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۲۵
(۳) ۳۴ (۴) ۵۶

تالیفی محمد حسینی فرد

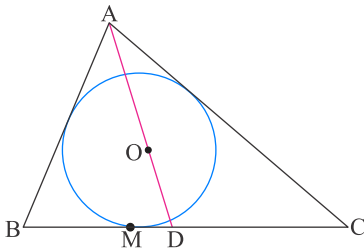
در مثلث متساوی‌الساقین اندازه ارتفاع وارد بر قاعده ۸ و شعاع دایره محاطی داخلی آن ۳ واحد است. طول قاعده این مثلث کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲
(۳) ۱۴ (۴) ۱۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

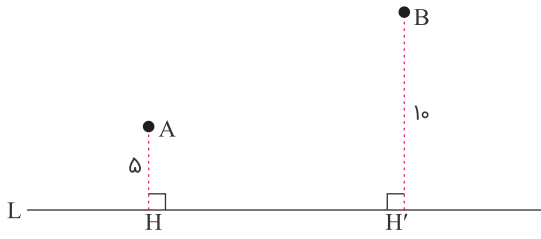
در شکل زیر، $AB = 4$ ، $AC = 6$ و $BC = 5$ است. اگر M محل برخورد دایره محاطی مثلث ABC با BC و O مرکز این دایره باشد، طول MD کدام است؟



- (۱) $5/5$
(۲) $5/6$
(۳) $5/4$
(۴) $5/3$

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

در شکل زیر، فاصله نقاط A و B از خط L به ترتیب ۵ و ۱۰ است. نقطه M را روی خط L چنان انتخاب می‌کنیم که مجموع فواصل آن از A و B حداقل باشد. اگر $AB = ۱۳$ ، طول MH کدام است؟



(۱) $۳/۸$

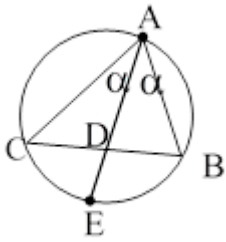
(۲) $۴/۲$

(۳) $۳/۵$

(۴) ۴

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

در شکل زیر نیمساز زاویه A دایره محیطی را در E قطع کرده است، اگر $BE = ۲\sqrt{۶}$ و $DE = ۳$ طول AD کدام می‌باشد؟



(۱) $۴\sqrt{۳}$

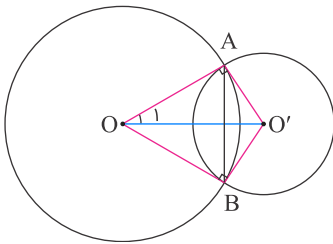
(۲) $۳\sqrt{۲}$

(۳) ۵

(۴) ۶

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

اگر زاویه A و B ، ۹۰ درجه باشند و زاویه O_1 برابر با ۳۰ درجه باشد و OO' برابر با ۱۲ باشد، شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟



(۱) $۶\sqrt{۳}$

(۲) ۶

(۳) ۹

(۴) $۳\sqrt{۳}$

تالیفی سعید قطبی طاهری

مدارس ریاضی و فیزیک مفید

نیمسازهای داخلی B و A از مثلث ABC ، نیمساز خارجی C را در نقاط B' و A' قطع می‌کنند. کدام گزینه در مورد چهار ضلعی $ABA'B'$ درست است؟

(۲) دوزنقه است.

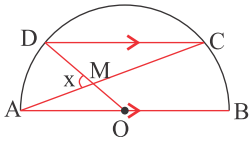
(۱) محیطی است.

(۴) مستطیل است.

(۳) محاطی است.

تالیفی محمد حسینی فرد

در نیم‌دایره شکل زیر، $\widehat{CD} = 100^\circ$ است. اندازه x کدام است؟



(۱) 50°

(۲) 30°

(۳) 40°

(۴) 60°

تالیفی سیامک شهبازی زاده

مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ را نسبت به محل برخورد عمودمنصف‌ها با نسبت ۱- متجانس می‌کنیم. مساحت شش ضلعی حاصل چند است؟

(۱) $\sqrt{3}$

(۲) $6\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{3}$

(۴) $3\sqrt{3}$

تالیفی سعید قطبی طاهری

مدارس ریاضی و فیزیک مفید

اندازه اضلاع مثلث ABC ، ۵ و ۷ و ۱۰ واحد است. نیمسازهای داخلی BD و CE را رسم می‌کنیم. اگر A بزرگ‌ترین زاویه این مثلث باشد، مجموع $\frac{1}{AD} + \frac{1}{AE}$ چقدر است؟

(۱) $\frac{39}{25}$

(۲) $\frac{32}{35}$

(۳) $\frac{87}{70}$

(۴) $\frac{29}{50}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

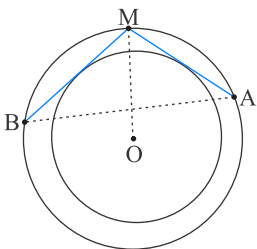
اگر شعاع دایره‌ها $3\sqrt{3}$ و ۶ باشند، طول AB کدام است؟

(۱) $3\sqrt{3}$

(۲) $6\sqrt{3}$

(۳) ۳

(۴) ۶



تالیفی سعید قطبی طاهری

مدارس ریاضی و فیزیک مفید

یک دوزنقه متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{10}$ محیط است. اگر قاعده بزرگ این دوزنقه برابر ۸ باشد، طول قاعده کوچک کدام است؟

(۱) $\sqrt{6}$

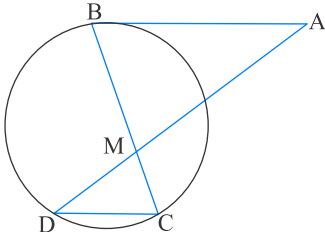
(۲) $\sqrt{5}$

(۳) ۵

(۴) ۶

تالیفی محمد حسینی فرد

در شکل زیر، AB بر دایره مماس و با CD موازی است. اگر $MB = ۶$ ، $MC = ۲$ و $MD = ۴$ باشد، طول AB کدام است؟



(۱) ۱۱

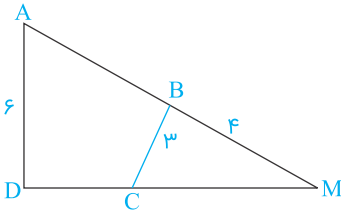
(۲) ۱۲

(۳) ۱۰

(۴) ۱۳

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

اگر چهار ضلعی شکل زیر، محاطی و محیطی باشد، طول پاره خط CM کدام است؟



(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

تالیفی محمد حسینی فرد

دو خط متقاطع d_1 و d_2 با زاویه حاده α متقاطع‌اند. d_1 را نسبت به d_2 بازتاب می‌دهیم و d'_1 می‌نامیم. سپس d'_1 را نسبت به d_1 بازتاب می‌دهیم و d''_1 می‌نامیم. زاویه بین d_1 و d''_1 کدام است؟

(۲) 2α (۱) α (۴) 4α (۳) 3α

تالیفی حسین سعیدی

چهار نقطه $A(۱, ۳)$ ، $B(۱۵, ۹)$ ، $M(a, ۰)$ و $N(a + ۵, ۰)$ در صفحه مختصات مفروض‌اند. کمترین اندازه خط شکسته $AMNB$ ، کدام است؟

(۲) ۱۹

(۱) ۱۸

(۴) ۲۱

(۳) ۲۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

یک دوزنقه متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۳}$ محیط است. اگر نسبت قاعده‌های این دوزنقه $\frac{۱}{۳}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

(۲) ۸

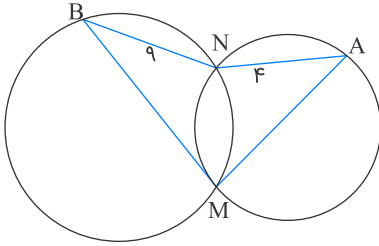
(۱) $4\sqrt{۳}$ (۴) $8\sqrt{۳}$

(۳) ۱۲

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

در شکل زیر MA بر دایره بزرگتر و MB بر دایره کوچکتر در نقطه M مماس‌اند. طول وتر مشترک این دو دایره کدام است؟



(۱) ۶

(۲) ۵

(۳) $2\sqrt{13}$

(۴) $\sqrt{26}$

تالیفی حسین سعیدی

در مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $BC = 3 + \sqrt{3}$ و زاویه‌های $\hat{B} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 45^\circ$ ، اندازه ضلع AC، کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) $2\sqrt{3}$

(۴) $3\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

چهار ضلعی ABCD محیط بر یک دایره است. اگر AB کوچکترین ضلع آن باشد، کدام نابرابری همواره درست است؟

(۱) $\hat{C} > \hat{A}$

(۲) $\hat{B} < \hat{A}$

(۳) $\hat{D} < \hat{C}$

(۴) $\hat{D} < \hat{B}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

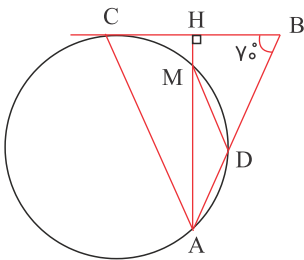
در شکل زیر $AB = AC$ و دایره در نقطه C بر BC مماس است. اگر AH ارتفاع باشد، اندازه زاویه AMD چقدر است؟

(۱) 30°

(۲) 60°

(۳) 45°

(۴) 15°



تالیفی سیامک شهبازی زاده

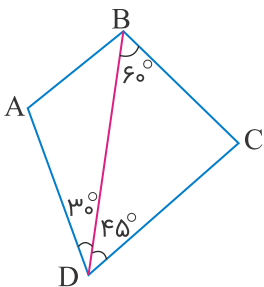
چهار ضلعی زیر محاطی است. کدام گزینه برابر $\sqrt{3}$ است؟

(۱) $\frac{AB}{CD}$

(۲) $\frac{AD}{CD}$

(۳) $\frac{CD}{AB}$

(۴) $\frac{AB}{CD}$



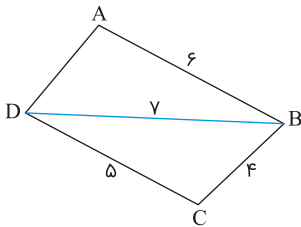
تالیفی حسین سعیدی

شهرهای A و B به فاصله $\sqrt{178}$ از هم و به فاصله ۶ و ۹ کیلومتر از یک رودخانه هستند و در یک سمت رودخانه قرار دارند. می‌خواهیم کوتاه‌ترین مسیر، بین این دو شهر را بسازیم به طوری که مقداری از آن ساحلی باشد. چه مقدار از مسیر ساحلی باشد تا طول کل مسیر ۲۲ km شود؟

- (۱) ۷
(۲) ۶
(۳) ۵
(۴) ۳

تالیفی حسین سعیدی

چهار ضلعی ABCD محاطی است، اندازه ضلع AD کدام است؟



- (۱) ۵
(۲) ۴
(۳) ۵/۵
(۴) ۴/۵

تالیفی نرگس کارگر

دو دایره به شعاع‌های ۴ و $10/5$ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایره کوچک‌تر، مماس بر دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس چقدر است؟

- (۱) $4\sqrt{5}$
(۲) ۸
(۳) $4\sqrt{6}$
(۴) ۱۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

رئوس مثلث $\triangle ABC$ روی دایره $C(0, 6)$ قرار دارند. اگر $AC = 6$ و $AB = 6\sqrt{2}$ باشد، طول کمان $\widehat{BC}$ کدام است؟

- (۱) 7π
(۲) 5π
(۳) 6π
(۴) 12π

تالیفی حسین سعیدی

دایره‌هایی به شعاع ۲ و ۶ یکدیگر را در نقاط A و M قطع می‌کنند. خطی از M رسم می‌کنیم تا دایره کوچک‌تر و بزرگ‌تر را به ترتیب در B و C قطع کند. فاصله A تا B چندبرابر فاصله A تا C است؟

- (۱) ۱
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{1}{4}$

تالیفی حسین سعیدی

مربع ABCD به ضلع ۶ مفروض است. شعاع دایره‌ای که از نقاط A و B گذشته و بر ضلع CD مماس باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{3}{75}$

(۲) $\frac{3}{25}$

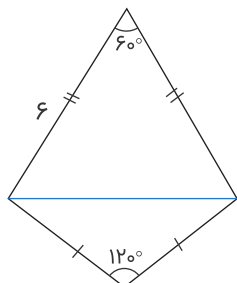
(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۴

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

طول مماس مشترک خارجی دو دایره محاطی دو مثلث زیر چند است؟

$$\begin{aligned} & \frac{6}{\sqrt{2\sqrt{3}+3}} \quad (1) \\ & \sqrt{\frac{36+24\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} \quad (2) \\ & \sqrt{\frac{16+24\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^2}} \quad (3) \\ & 2 \quad (4) \end{aligned}$$

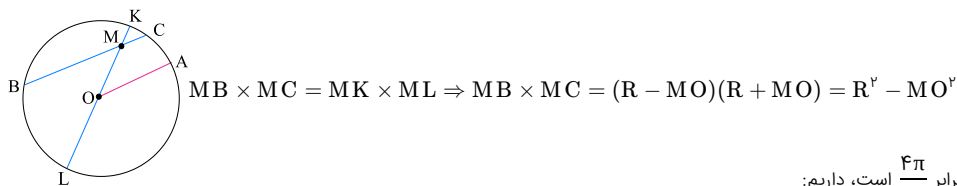


تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

گزینه ۴

۱

نکته: با استفاده از روابط طولی در دایره به شعاع R داریم:



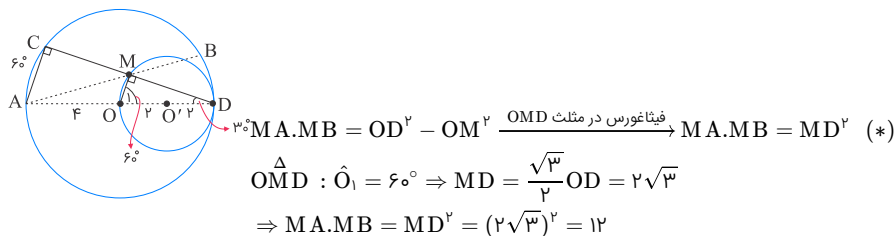
$$MB \times MC = MK \times ML \Rightarrow MB \times MC = (R - MO)(R + MO) = R^2 - MO^2$$

تذکر: قطر دایره بزرگ است.

اندازه کمان AC را α درجه فرض می‌کنیم. چون طول کمان AC برابر $\frac{F\pi}{3}$ است، داریم:

$$\left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right)(2\pi \times F) = \frac{F\pi}{3} \Rightarrow \frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{D} = \frac{1}{3}(60^\circ) = 20^\circ$$



حال طبق روابط طولی در دایره بزرگ و استفاده از نکته، داریم:

$$MA \cdot MB = OD^2 - OM^2 \xrightarrow{\text{فیثاغورس در مثلث OMD}} MA \cdot MB = MD^2 \quad (*)$$

$$\triangle OMD : \hat{O}_1 = 60^\circ \Rightarrow MD = \frac{\sqrt{3}}{2} OD = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow MA \cdot MB = MD^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

تذکر: رابطه (*) را می‌توانستیم با استفاده از قضیه تالس در مثلث ADC به‌صورت زیر به دست آوریم:

$$\frac{MD}{CM} = \frac{OD}{AO} = 1 \Rightarrow MD = CM \quad (I)$$

$$MA \cdot MB = MD \cdot MC \xrightarrow{(I)} MA \cdot MB = MD^2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

گزینه ۲

۲

چون چهار ضلعی ABCD محاطی است، داریم:

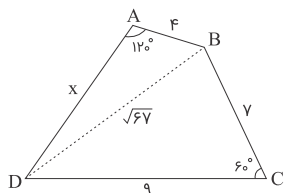
$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{C}=60^\circ} \hat{A} = 120^\circ$$

$$\triangle BCD : \text{قضیه کسینوس‌ها} \Rightarrow BD^2 = 7^2 + 9^2 - 2(7)(9)(\underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}}) = 67 \quad (*)$$

$$\triangle ABD : \text{قضیه کسینوس‌ها} \Rightarrow BD^2 = x^2 + 4^2 - 2(4)(x)(\underbrace{\cos 120^\circ}_{-\frac{1}{2}})$$

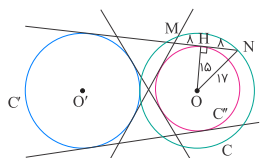
$$\xrightarrow{(*)} 67 = x^2 + 16 + 4x \Rightarrow x^2 + 4x - 51 = 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{4 + 51}$$

$$\xrightarrow{x > 0} x = -2 + \sqrt{55} \Rightarrow x + 2 = \sqrt{55}$$

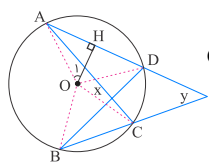


کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

می‌دانیم OH ، MN را نصف می‌کند، پس $OH = ۱۵$. پس درواقع خط موردنظر خطی است که بر C' مماس و بر دایره C'' به مرکز O و شعاع ۱۵ نیز مماس است، یعنی درواقع به دنبال تعداد مماس مشترک‌های C' و C'' هستیم، چون این دو دایره متخارج‌اند F مماس مشترک دارند.



تالیفی صبا مهدوی



مثلث AOD متساوی الساقین $OA = OD \Rightarrow$

$$AD = \sqrt{۳}R \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R$$

$$\sin O_1 = \frac{AH}{OA} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}R}{R} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow O_1 = ۶۰ \Rightarrow \widehat{AOD} = ۱۲۰$$

در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع و میانه باهم برابر است، بنابراین داریم:

چون $\widehat{AOD} = ۱۲۰$ زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان AD است بنابراین:

به طور مشابه برای محاسبه کمان BC ، مثلث OBC متساوی الساقین است و به طریق مشابه $\widehat{BOC} = ۴۵$ بنابراین: $\widehat{BC} = ۹۰$

$$\left. \begin{aligned} AD = R\sqrt{۳} &\Rightarrow \widehat{AD} = ۱۲۰^\circ \\ BC = R\sqrt{۲} &\Rightarrow \widehat{BC} = ۹۰^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CD} = ۳۶۰ - ۲۱۰ = ۱۵۰$$

$$\xrightarrow{\widehat{AB} = ۲۰ + \widehat{CD}} \begin{cases} \widehat{AB} = ۸۵ \\ \widehat{CD} = ۶۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{۸۵ + ۶۵}{۲} = ۷۵ \\ y &= \frac{۸۵ - ۶۵}{۲} = ۱۰ \end{aligned} \Rightarrow \frac{x}{y} = ۷/۵$$

تالیفی نرگس کارگر

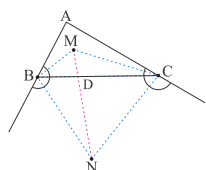
از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} HC^۲ + ۴^۲ &= (۴\sqrt{۵})^۲ \Rightarrow HC = ۸ \\ AH^۲ &= CH \times BH \Rightarrow ۱۶ = ۸ \times BH \Rightarrow BH = ۲ \\ AH^۲ + BH^۲ &= AB^۲ \Rightarrow ۱۶ + ۴ = AB^۲ \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۵} \end{aligned}$$

در مثلث ABH می‌دانیم میانه کوچک‌تر، بر ضلع بزرگ‌تر یعنی وتر AB وارد می‌شود و این میانه نصف وتر است. در نتیجه:

$$HM = \frac{1}{۲}AB = \frac{1}{۲} \times ۲\sqrt{۵} = \sqrt{۵}$$

تالیفی حسین سعیدی

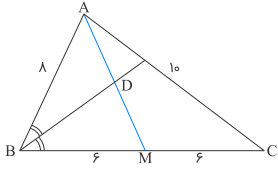


M محل تلاقی نیمسازهای داخلی A و B و C و همچنین N محل تلاقی نیمسازهای خارجی B و C و A است. می‌دانیم نیمساز داخلی و خارجی نظیر یک رأس بر هم عمودند. در نتیجه $\widehat{N\hat{C}M} = \widehat{N\hat{B}M} = ۹۰^\circ$ است، پس چهار ضلعی $BMCN$ محاطی است و خواهیم داشت:

$$BD \times CD = MD \times ND \Rightarrow ۴ \times ۶ = MD \times ۱۰ \Rightarrow MD = ۲/۴$$

تالیفی نرگس کارگر

طبق قضیه میانه ها:



$$AB^{\psi} + AC^{\psi} = 2AM^{\psi} + \frac{BC^{\psi}}{\psi} \Rightarrow AM = \sqrt{\phi\psi}$$

و طبق قضیه نیمسازها:

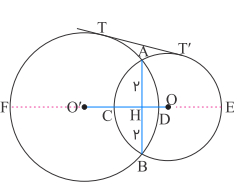
$$\frac{DM}{AM} = \frac{BM}{BM + BA} = \frac{\phi}{1\phi} = \frac{\psi}{\psi} \Rightarrow DM = \frac{\psi\sqrt{\phi\psi}}{\psi}$$

تالیفی صبا مهدوی

شعاع دایره کوچک را ۲ و شعاع دایره بزرگتر را R در نظر می گیریم.

$$OH = x \Rightarrow CH = r - x , HE = r + x$$
$$O'H = y \Rightarrow HD = R - y , HF = R + y$$

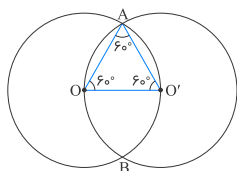
$$\begin{cases} \Delta AOH; r^{\psi} - x^{\psi} = \phi \\ \Delta AO'H; R^{\psi} - y^{\psi} = \phi \end{cases} \Rightarrow (r^{\psi} + R^{\psi}) - (x^{\psi} + y^{\psi}) = \lambda$$



$$TT' = \sqrt{d^{\psi} - (R - r)^{\psi}} \xrightarrow{d=x+y} \psi\phi = x^{\psi} + y^{\psi} + \psi xy - R^{\psi} - r^{\psi} + \psi rR$$
$$\Rightarrow \psi\phi = \underbrace{(x^{\psi} + y^{\psi}) - (R^{\psi} + r^{\psi})}_{-\lambda} + \underbrace{\psi xy}_{+\lambda\sigma} + \underbrace{\psi rR}_{+\psi rR}$$
$$\Rightarrow \psi\phi = -\lambda + \lambda\sigma + \psi rR \Rightarrow \psi\phi = \psi rR \Rightarrow rR = 1\psi$$

تالیفی نرگس کارگر

شکل مسئله را رسم می‌کنیم:

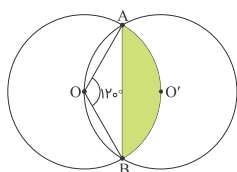


$$OA = OO' = O'A = R$$

پس مثلث $\triangle OAO'$ متساوی‌الاضلاع است. طبق فرض مسئله مساحت چهار ضلعی $OAO'B$ برابر $6\sqrt{3}$ است.

$$S_{OAO'B} = 2S_{OAO'} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 = 6\sqrt{3} \Rightarrow R^2 = 12 \Rightarrow R = 2\sqrt{3}$$

برای محاسبه مساحت ناحیه مشترک، ابتدا مساحت قطعه رنگی را می‌یابیم و آن را ۲ برابر می‌کنیم.



$$\begin{aligned} S_{\text{قطعه}} &= S_{\text{قطاع}} - S_{OAB} = \frac{120}{360} \times \pi \times R^2 - \frac{1}{2} \times R \times R \times \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{3} \pi \times 12 - \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\pi - 3\sqrt{3} \\ \Rightarrow S_{\text{ناحیه مشترک}} &= 8\pi - 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

نکته: در یک دایره، هرچه فاصلهٔ یک وتر از مرکز آن بیشتر شود، طول وتر کوچکتر می‌شود.

بنابراین در چهار ضلعی ABCD قطعاً AB کوچکترین ضلع و BC بزرگترین ضلع خواهد بود، پس ترتیب اضلاع این چهار ضلعی یکی از دو حالت زیر خواهد بود:

$$AB < CD < DA < BC \quad \text{یا} \quad AB < DA < CD < BC$$

می‌دانیم اندازهٔ هر کمان یک دایره کاملاً متناسب با اندازهٔ وتر آن کمان است؛ بنابراین ترتیب کمان‌های این دایره هم یکی از دو حالت بالا خواهد بود.

حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: صحیح است.

$$\hat{D} = \frac{\widehat{ABC}}{۲} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC}}{۲} > \frac{\widehat{AB} + \widehat{DA}}{۲} > \frac{\widehat{DAB}}{۲} = \hat{C}$$

گزینهٔ ۲: صحیح است.

$$\hat{B} = \frac{\widehat{ADC}}{۲} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{CD}}{۲} > \frac{\widehat{AB} + \widehat{DA}}{۲} > \frac{\widehat{DAB}}{۲} = \hat{C}$$

گزینهٔ ۳: صحیح است.

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{۲} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{CD}}{۲} > \frac{\widehat{AD} + \widehat{CD}}{۲} > \frac{\widehat{ADC}}{۲} = \hat{B}$$

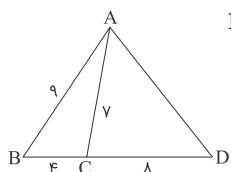
گزینهٔ ۴: لزوماً صحیح نیست:

$$\hat{B} = \frac{\widehat{ADC}}{۲} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{CD}}{۲} \text{ (نامشخص)}, \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC}}{۲} = \frac{\widehat{ABC}}{۲} = \hat{D}$$

بنابراین جواب گزینهٔ ۴ است.

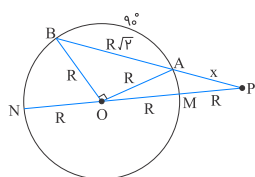
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

طبق قضیهٔ استوارت در مثلث ABD، داریم:



$$\begin{aligned} BD(AC^2 + BC \cdot CD) &= BC \cdot AD^2 + DC \cdot AB^2 \\ \Rightarrow ۱۲(۴۹ + ۳۲) &= ۴AD^2 + ۸ \times ۸۱ \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} ۳ \times ۸۱ = AD^2 + ۲ \times ۸۱ \\ \Rightarrow AD^2 &= ۸۱ \Rightarrow AD = ۹ \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹



$$\begin{aligned} \widehat{AB} = ۹۰^\circ &\Rightarrow \widehat{BOA} = ۹۰^\circ \\ \xrightarrow{\text{فیتاغورس}} AB^2 &= R^2 + R^2 = ۲R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{۲} \end{aligned}$$

نقطهٔ P را به O وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در M و N قطع کند. بنابراین نقطهٔ M، نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره به P است و طبق فرض، $PM = R$. حال طبق روابط طولی در دایره، داریم:

$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= PM \cdot PN \Rightarrow x(x + R\sqrt{۲}) = R(۳R) \Rightarrow x^2 + (R\sqrt{۲})x - ۳R^2 = ۰ \\ \Rightarrow x &= \frac{-R\sqrt{۲} \pm \sqrt{۱۴R^2}}{۲} \xrightarrow{x > ۰} x = \frac{-R\sqrt{۲} + R\sqrt{۱۴}}{۲} \Rightarrow \frac{x}{R} = \frac{\sqrt{۱۴} - \sqrt{۲}}{۲} \end{aligned}$$

تالیفی فرزاد زمانی نژاد

باتوجه به شکل، اندازهٔ زوایا را به دست می‌آوریم:

$$\frac{AH}{AB} = \cos 15^\circ \Rightarrow \frac{168}{AB} = 0.96 \Rightarrow AB = 175 \text{ m}$$

حال در مثلث ABD قضیهٔ سینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\frac{BD}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{BD}{1} = \frac{175}{0.7} \Rightarrow BD = \frac{175}{1/4} = 125 \text{ m}$$

برای یافتن AD در مثلث AHD سینوس زاویهٔ D را می‌نویسیم:

$$\sin 45^\circ = \frac{AH}{AD} \Rightarrow AD = \frac{168}{\sin 45^\circ} = \frac{168}{0.7} = 240 \text{ m}$$

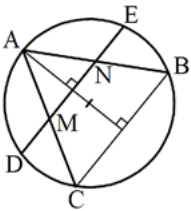
تألیفی حسین سعیدی

چون مثلث OAB قائم‌الزاویه است می‌توان گفت شعاع دایرهٔ محیطی نصف وتر AB است پس:

$$R = \frac{|AB|}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت دایرهٔ محیطی} = \pi R^2 = 8\pi$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴۶

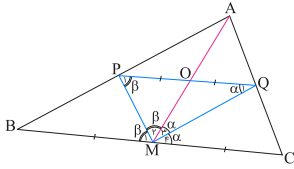


MN با BC موازی است، پس عمودمنصف آن‌ها یکی است و از مرکز دایره می‌گذرد. خطی که از مرکز بر وتر DE عمود شود، از وسط آن می‌گذرد، پس وسط MN و DE بر هم منطبق است و نتیجه می‌شود DM = NE. اگر BC = 2a فرض شود، خواهیم داشت MN = a و با فرض x DM = x

$$DM \cdot ME = AM \cdot MC \Rightarrow x(a + x) = a \times a \Rightarrow a^2 - ax - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{x^2} - \frac{a}{x} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۳۹۶۳



می‌دانیم نیمسازهای دو زاویهٔ مجانب، برهم عمودند، پس $\angle PMQ = 90^\circ$. حال داریم:

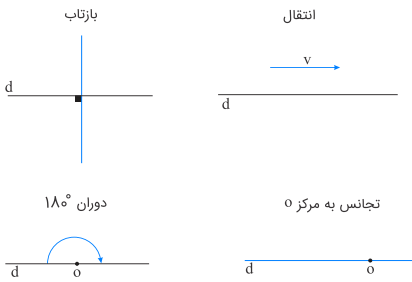
$$\left. \begin{array}{l} \triangle AMB : MP \text{ نیمساز } \angle MAB \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AM}{MB} \\ \triangle AMC : MQ \text{ نیمساز } \angle MAC \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{MC} \end{array} \right\} \xrightarrow{MB=MC} \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC \xrightarrow{\text{موازی-مورب}} \hat{P}_1 = \hat{M}_1 = \beta \\ \Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{M}_1 \Rightarrow OM = OP$$

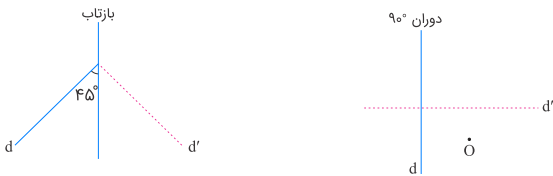
تذکر: به همین روش، نتیجه می‌شود مثلث MPQ قائم‌الزاویه و MO میانهٔ BC دارد بر وتر آن است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

با هر چهار تبدیل می‌توان یک خط را روی خودش منطبق کرد.



ولی فقط با بازتاب و دوران، تصویر می‌تواند بر خط عمود شود، بنابراین گزینهٔ "۱" صحیح است.



تألیفی حسین سعیدی

$$h_a = 2x, \quad h_b = 3x, \quad h_c = 4x$$

طبق رابطهٔ بیان‌شده در کتاب درسی:

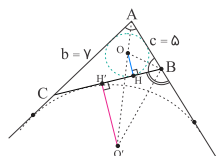
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \\ \Rightarrow \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{4x} = \frac{1}{r} \\ \Rightarrow \frac{6+4+3}{12x} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{12}{13}x \left\} \Rightarrow \frac{r}{h_c} = \frac{3}{13}$$

تألیفی حسین سعیدی

باتوجه به فرض سؤال، نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث و نقطهٔ O' مرکز دایرهٔ محاطی خارجی نظیر BC است. از O و O' بر BC عمود می‌کنیم. پس نقاط H و H' محل تماس این دایره‌ها با ضلع BC می‌باشند و داریم:

$$P = \frac{AB + AC + BC}{۲}$$

$$\left. \begin{array}{l} BH = P - b \\ BH' = P - c \end{array} \right\} \Rightarrow HH' = BH' - BH = (P - c) - (P - b) = b - c = ۲$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

مثلث در رأس B قائم‌الزاویه است (اعداد فیثاغورسی).

$$\frac{BD}{CD} = \frac{۱\delta}{۲\delta} = \frac{۳}{\delta} \Rightarrow \frac{BD}{۲\circ} = \frac{۳}{\lambda} \Rightarrow BD = ۷/\delta \Rightarrow DM = ۱\circ - ۷/\delta = ۲/\delta$$

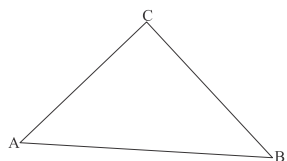
$$S_{ADM} = \frac{1}{۲} AB \cdot DM = \frac{1}{۲} \times ۱\delta \times ۲/\delta = ۱۸/۷\delta$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴۷

مثلث با اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳ قائم‌الزاویه است و کوچک‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی روبه‌روی کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث می‌باشد.

$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{\frac{\delta \times ۱۲}{۲}}{\frac{\delta + ۱۲ + ۱۳}{۲} - \delta} = \frac{۳\circ}{۱\delta - \delta} = \frac{۳\circ}{۱\circ} = ۳$$

تالیفی محمد حسینی فرد



$$\frac{BC}{\cos \hat{A}} = \frac{AC}{\cos \hat{B}} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{\cos \hat{A}}{\cos \hat{B}} \quad (۱)$$

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} \quad (۲)$$

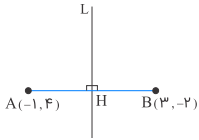
$$(۱), (۲) \Rightarrow \frac{\cos \hat{A}}{\cos \hat{B}} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} \Rightarrow \tan \hat{B} = \tan \hat{A}$$

$$\xrightarrow{^\circ < \hat{A}, \hat{B} < ۱۸^\circ} \hat{A} = \hat{B} \xrightarrow{\hat{C} = ۱۲^\circ} \hat{A} = \hat{B} = ۳\circ$$

پس AC و BC که روبه‌رو به زوایای کوچک مثلث ABC هستند، کوچک‌ترین اضلاع آن هستند:

$$\frac{BC}{\cos \hat{A}} = ۲ \Rightarrow \frac{BC}{\cos ۳\circ} = ۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۳}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی



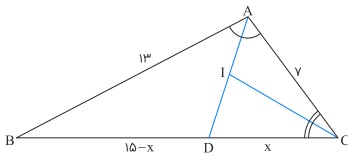
می‌دانیم مرکز دوران روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. پس معادله خط L (عمودمنصف AB) را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} H \Rightarrow H &= \frac{A+B}{2} = (1, 1) \\ m_{AB} &= \frac{-2-4}{3+1} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \\ \frac{L \perp AB}{\rightarrow m_L} &= -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{2}{3} \Rightarrow L: y-1 = \frac{2}{3}(x-1) \\ \Rightarrow L: 3y-3 &= 2x-2 \Rightarrow L: 2x-3y+1=0 \end{aligned}$$

از بین گزینه‌ها فقط نقطه $(4, 3)$ روی خط L قرار دارد.

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

نیمسازهای زاویه‌های $\hat{A}$ و $\hat{C}$ را رسم می‌کنیم. فرض کنیم $DC = x$ پس $BD = 15 - x$ و طبق قضیه نیمساز داخلی، در مثل ABC داریم:



$$\begin{aligned} \frac{BD}{DC} &= \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{15-x}{x} = \frac{13}{7} \Rightarrow 13x = 105 - 7x \\ \Rightarrow 20x &= 105 \Rightarrow x = \frac{105}{20} = \frac{21}{4} \\ \triangle ACD &: CI \text{ نیمساز } \hat{C} \text{ است} \Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{CD}{CA} = \frac{\frac{21}{4}}{7} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

باتوجه به اینکه فاصله نقطه A از مرکز دایره کوچک ثابت است، پس با حرکت نقطه A روی دایره بزرگ، طول مماس‌های AE و AF تغییری نمی‌کند و ثابت می‌ماند. از نقاط B و C مماس‌هایی بر دایره کوچک رسم شده‌اند؛ پس $BD = BE$ و $CD = CF$ و داریم:

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ محیط} &= AB + BC + AC \\ &= AB + \underbrace{BD}_{BE} + \underbrace{DC}_{CF} + AC = AE + \underbrace{AF}_{AE} = 2AE = \text{ثابت} \end{aligned}$$

پس محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.

دایره کوچک، دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC از مثلث ABC است و طول ضلع BC را a و محیط مثلث ABC را P و مساحت آن را S در نظر می‌گیریم، پس داریم:

$$r_a = \frac{S}{P-a} \Rightarrow S = \underbrace{r_a}_{\text{ثابت}} (\underbrace{P}_{\text{ثابت}} - \underbrace{a}_{\text{متغیر}})$$

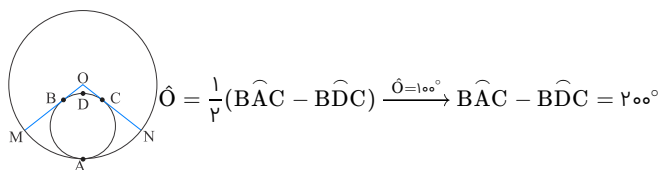
باتوجه به اینکه در عبارت فوق، مقدار a متغیر و بقیه ثابت‌اند، مقدار S هم متغیر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

اولاً در دایرهٔ بزرگ داریم:

$$\widehat{O} = \widehat{MN} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{O} \text{ مرکزی است}$$

حال باتوجه به اینکه OB و OC بر دایرهٔ کوچک مماس‌اند، داریم:

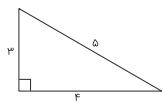


در ادامه، چون $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 360^\circ$ ، داریم:

$$\begin{cases} \widehat{BAC} - \widehat{BDC} = 200^\circ \\ \widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 360^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{BAC} = 280^\circ \\ \widehat{BDC} = 80^\circ \end{cases}$$

تألیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

این دایره همان دایرهٔ محاطی مثلث است و شعاع آن از رابطهٔ $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید که S مساحت و P نصف محیط مثلث است:

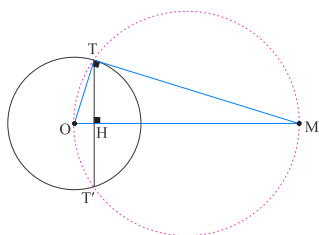


$$P = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6$$

$$S = \frac{3 \times 4}{2} = 6 \Rightarrow r = \frac{6}{6} = 1$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی

شکل مسئله را رسم می‌کنیم:



زاویهٔ $\widehat{OTM}$ چون روبه‌روی قطر OM می‌باشد پس قائمه است؛ یعنی $\widehat{MT}$ بر دایره مماس است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\widehat{OTM}$ روابط طولی را می‌نویسیم:

$$OT^2 = OH \times OM \Rightarrow 4^2 = OH \times 10 \Rightarrow OH = 1/6$$

تألیفی حسین سعیدی

برای شعاع دایرهٔ محاطی و ارتفاع‌ها رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{5r + 3r + 20}{60r} \Rightarrow 60 = 5r + 3r + 20 \Rightarrow 4r = 40 \Rightarrow r = 10$$

تألیفی محمد حسینی فرد

هر چهار گزاره نادرست هستند.

مثال‌های نقض:

الف) تبدیل بازتاب

ب) تبدیل بازتاب

ج) تبدیل دوران

د) تبدیل تجانس

تألیفی مجید قهرمانی

در مثلث AOD، $\hat{O} = 90^\circ$ ، پس بنا بر قضیه فیثاغورس:

$$AD = \sqrt{OD^2 + OA^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$$

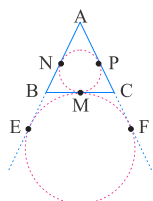
همچنین دو مثلث AOD و AMB متشابه هستند (زاویه A مشترک است و $\hat{O} = \hat{M} = 90^\circ$)، در نتیجه:

$$\frac{AM}{AO} = \frac{MB}{OD} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{AM}{20} = \frac{MB}{15} = \frac{25}{25} = 1$$

در نتیجه $AM = 20$ و $MB = 15$ ؛ بنابراین:

$$MA + MB = 35$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۶



$$2P = \lambda + \lambda + 6 = 22 \Rightarrow P = 11$$

$$BM = P - AC = 11 - \lambda = 3$$

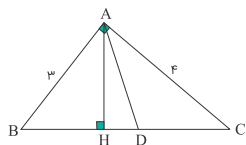
از طرفی:

$$BN = BE = BM = 3$$

$$NE = BN + BE = 6$$

تألیفی حسین سعیدی

مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است، پس:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

$$AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{BD}{5} = \frac{3}{7} \Rightarrow BD = \frac{15}{7}$$

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow 9 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$$

$$DH = BD - BH = \frac{15}{7} - \frac{9}{5} = \frac{12}{35}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) مساحت مثلث $\triangle ABC$ با اضلاع a, b, c و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C$$

داریم:

$$S_{\triangle ABC} = 24\sqrt{5}, \quad b = 16, \quad a = 9$$

ب) طبق قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

گام دوم

باتوجه به قسمت (الف) از گام اول مقدار $\sin C$ را محاسبه می‌کنیم.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C \Rightarrow 24\sqrt{5} = \frac{1}{2} \times 9 \times 16 \times \sin C \Rightarrow 24\sqrt{5} = 72 \sin C$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{24\sqrt{5}}{72} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

اکنون مقدار $\cos C$ را به دست می‌آوریم.

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \cos^2 C = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \cos C = \pm \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$$

چون زاویه $\hat{C}$ منفرجه است، پس $\cos C = -\frac{2}{3}$ در نظر گرفته می‌شود.

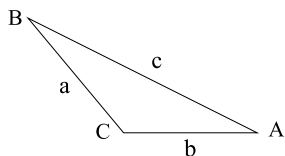
باتوجه به قسمت (ب) از گام اول، طول ضلع c را محاسبه می‌کنیم:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$\Rightarrow c^2 = 9^2 + 16^2 - 2 \times 9 \times 16 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 81 + 256 + 192 = 529$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{529} = 23$$

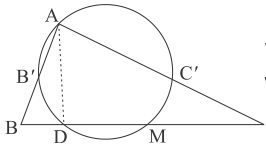
بنابراین طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث $\triangle ABC$ ، برابر با ۲۳ است.



گام اول

(الف) شکل را با جزئیات دقیق رسم می‌کنیم:

(ب) باتوجه به روابط طولی در دایره، این دو رابطه قابل نتیجه گیری است:



$$\begin{aligned} 1) & BD \times BM = BB' \times BA \\ 2) & CM \times CD = CC' \times CA \end{aligned}$$

گام دوم

سؤال از ما نسبت $\frac{BB'}{CC'}$ را می‌خواهد. BB' و CC' را از دو رابطه ۱ و ۲ به دست آورده و برهم تقسیم می‌کنیم. (توجه کنید که M وسط BC بوده و $BM = CM$ است)

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{\frac{BM \times BD}{BA}}{\frac{CM \times CD}{CA}} = \frac{\frac{BD}{BA}}{\frac{CD}{CA}} = \frac{BD \times CA}{CD \times BA}$$

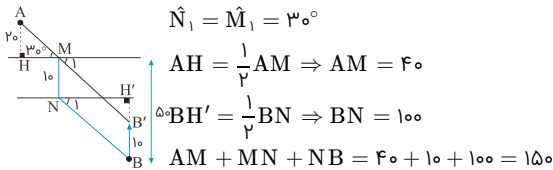
AD نیمساز داخلی زاویه A است. نیمساز داخلی یک زاویه، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع زاویه تقسیم می‌کند. پس داریم:

$$\text{AD نیمساز داخلی} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

پس $\frac{BB'}{CC'}$ برابر است با:

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{BD}{CD} \times \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AC} \times \frac{AC}{AB} = 1$$

برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر نقطه B را با برداری به عرض رودخانه انتقال می‌دهیم که در این صورت چهارضلعی MNBB' متوازی‌الاضلاع است. پس:



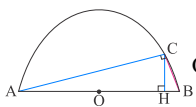
تالیفی حسین سعیدی

$$\left. \begin{aligned} \hat{B}_1 &= \gamma \Delta^\circ \Rightarrow \hat{B}_\gamma = 1\lambda^\circ - \gamma \Delta = 1\circ \Delta \\ \hat{B}_\gamma &= \frac{\widehat{AC} + \widehat{DE}}{\gamma} = 1\circ \Delta \\ \text{محاطی } \hat{A} &= \mathbb{F}^\circ \Rightarrow \widehat{DE} = \lambda^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AC} + \lambda^\circ = \gamma 1^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 1\mathbb{W}^\circ$$

$$x = \frac{\widehat{AC} - \widehat{DE}}{\gamma} \Rightarrow x = \frac{1\mathbb{W}^\circ - \lambda^\circ}{\gamma} = \gamma \Delta^\circ$$

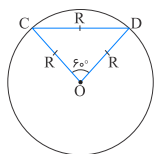
تالیفی امیر عباس ریحانکار

از C به A و B وصل می‌کنیم. مثلث ABC در رأس C قائمه است.



$$\begin{aligned}\angle C &= 180^\circ - 100^\circ - 30^\circ = 50^\circ \\ \angle A &= 100^\circ \\ \angle B &= 30^\circ\end{aligned}$$

تالیفی فرگس کارگر



فرض کنیم نقطه O مرکز دایره است. چون CD با شعاع دایره، برابر است، مثلث OCD متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه $\widehat{CD} = 60^\circ$. حال کمان‌های مجهول را نام‌گذاری می‌کنیم. بنابراین:

$$\begin{aligned}\hat{A} = 10^\circ &\Rightarrow \frac{1}{2}(y + z + 60^\circ - x) = 10^\circ \\ &\Rightarrow y + z + 60^\circ - x = 160^\circ \Rightarrow -x + y + z = 100^\circ \quad (I) \\ \hat{B} = 50^\circ &\Rightarrow \frac{1}{2}(y + x + 60^\circ - z) = 50^\circ\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y + x + 60^\circ - z = 100^\circ \Rightarrow x + y - z = 40^\circ \quad (II)$$

$$(I) + (II) \Rightarrow 2y = 140^\circ \Rightarrow y = 70^\circ \xrightarrow{EDF \text{ محاطی است}} \hat{EDF} = \frac{1}{2}y = 35^\circ$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

می‌دانیم اگر دو وتر در دایره با یکدیگر موازی باشند، کمان‌های محدود بین آن‌ها نیز باهم مساوی‌اند. پس:

$$\begin{aligned}\widehat{AC} = \widehat{BD} = x \\ \left. \begin{aligned} \frac{\widehat{CD} + 2x - \widehat{AB}}{2} &= 40^\circ \Rightarrow 2x + \widehat{CD} - \widehat{AB} = 80^\circ \\ \frac{\widehat{AB} + 2x - \widehat{CD}}{2} &= 50^\circ \Rightarrow 2x - \widehat{CD} + \widehat{AB} = 100^\circ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} 4x = 180^\circ \Rightarrow x = 45^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 45^\circ\end{aligned}$$

تالیفی سعید قطبی طاهری

مدارس ریاضی و فیزیک مفید

برای حل مسئله از نام‌گذاری زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\hat{M} = \frac{x - z}{2} &\Rightarrow x - z = 2\hat{M} \quad (1) \\ \hat{N} = \frac{x - y}{2} &\Rightarrow x - y = 2\hat{N} \quad (2)\end{aligned}$$

از طرفی جمع همه کمان‌ها 360° است.

$$x + y + z = 360^\circ \quad (3)$$

حال سه رابطه اخیر را باهم جمع می‌کنیم.

$$\begin{aligned}x - z + x - y + x + y + z &= 2\hat{M} + 2\hat{N} + 360^\circ \\ \Rightarrow 3x &= 2(\hat{M} + \hat{N}) + 360^\circ \Rightarrow 3x = 480^\circ \Rightarrow x = 160^\circ \Rightarrow \hat{A} = 10^\circ\end{aligned}$$

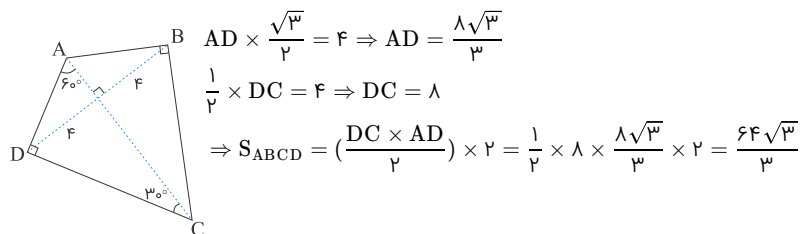
تالیفی حسین سعیدی

جمع شعاع دو دایره داخلی برابر است با خط‌المركزین و جمع قطر این دو دایره برابر است با قطر دایره بزرگ‌تر؛ پس قطر دایره بزرگ‌تر $12 + 4 = 16$ است.

$$\begin{aligned}\left. \begin{aligned} MO' &= 1 \\ MT &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow TO' = 4 \\ \frac{AB}{2} &= \sqrt{R^2 - TO'^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} \Rightarrow AB = 2\sqrt{48}\end{aligned}$$

تالیفی سعید قطبی طاهری

مدارس ریاضی و فیزیک مفید



تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

می‌دانیم:

$$y \times z = w \times x \Rightarrow y \times 3 = 2 \times 6 \Rightarrow y = 4$$

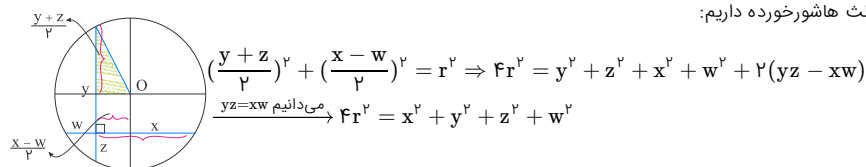
در دایره به شعاع ۲ داریم:

$$fr^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \quad (1)$$

$$fr^2 = 6^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

برای اثبات فرمول (۱) به شکل زیر دقت کنید:

اگر O مرکز دایره باشد، عمود منصف دو وتر یکدیگر را در O قطع می‌کنند. در مثلث هاشورخورده داریم:



تالیفی امیر خمسه

دو موتورسوار بعد از یک ساعت به فاصله‌های $AC = 24$ کیلومتر و $AB = 21$ کیلومتر از نقطه شروع یعنی A قرار دارند. داریم:

$$BC^2 = 24^2 + 21^2 - 2 \times 24 \times 21 \times \cos 120^\circ$$

$$BC^2 = 24^2 + 21^2 - 2 \times 24 \times 21 \times \left(-\frac{1}{2} \right)$$

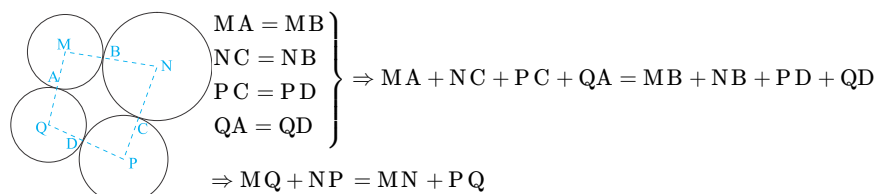
$$\Rightarrow BC^2 = 3^2 \times 18^2 + 3^2 \times 7^2 + 3 \times 18 \times 3 \times 7$$

$$\Rightarrow BC^2 = 9(64 + 49 + 56) = 9 \times 169 \Rightarrow BC = 3 \times 13 = 39$$

پس بعد از گذشت یک ساعت، دو موتورسوار به فاصله ۳۹ کیلومتر از یکدیگر قرار دارند.

تالیفی میثم امین

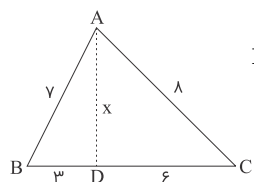
در چهار ضلعی MNPQ داریم:



پس چهار ضلعی MNPQ محیطی است و نیمسازهای آن هم‌رس‌اند. نیمسازهای M, N, P و Q به ترتیب عمودمنصف‌های AB, BC, CD و DA هستند. پس عمودمنصف اضلاع ABCD هم‌رس‌اند و این چهار ضلعی محاطی است. ازطرفی چون مرکز دایره محاطی MNPQ محل هم‌رسی نیمسازها و مرکز دایره محیطی ABCD محل هم‌رسی عمودمنصف‌ها است، پس مرکزهای این دو دایره بر هم منطبق هستند.

تالیفی محمد حسینی فرد

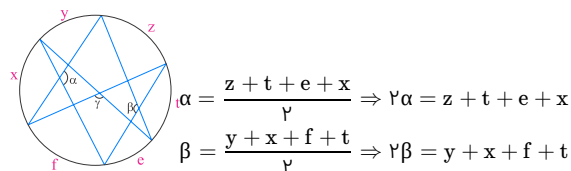
طبق قضیه استوارت، داریم:



$$\begin{aligned} BC(AD^2 + BD \cdot DC) &= BD \cdot AC^2 + DC \cdot AB^2 \\ \Rightarrow 9(x^2 + 18) &= 3 \times \lambda^2 + 6 \times \gamma^2 \xrightarrow{\times \frac{1}{6}} 3x^2 + 54 = 6\lambda^2 + 9\lambda \\ \Rightarrow 3x^2 &= 10\lambda \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

از نام گذاری زیر استفاده می‌کنیم:



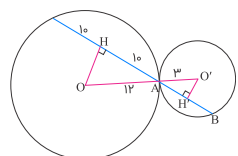
معادلات به دست آمده را با هم جمع می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \gamma\alpha + \gamma\beta &= \underbrace{x + y + z + t + e + f}_{360} + x + t \Rightarrow \alpha + \beta = 180 + \frac{x + t}{\gamma} \\ \Rightarrow \frac{x + t}{\gamma} &= \alpha + \beta - 180 \end{aligned}$$

باتوجه به شکل $\gamma = 180 - \frac{x + t}{\gamma}$ ، بنابراین:

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta - 180) = 360 - (\alpha + \beta)$$

تالیفی حسین سعیدی



$$\begin{aligned} \triangle OAH &\sim \triangle O'AH' \Rightarrow \frac{AH'}{AH} = \frac{AO'}{AO} \Rightarrow \frac{AH'}{10} = \frac{12}{12} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow AH' &= \frac{10}{2} = 5 \xrightarrow{O'H' \perp AB} AB = 2AH' = 10 \end{aligned}$$

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

به کمک قضیه سینوس ها در مثلث قائم‌الزاویه و باتوجه به اینکه در هر مثلث قائم‌الزاویه، وتر همان قطر دایره محیطی است، داریم:

$$\triangle AOB : AB = 2R_1 \sin \angle AOB = 2R_1 \sin 15^\circ \quad (1)$$

$$\downarrow$$

$$R_1 = \frac{1}{2}OB$$

$$\triangle BOC : OB = 2R_2 \sin \angle OCB = 2R_2 \sin 45^\circ \quad (2)$$

$$\downarrow$$

$$R_2 = \frac{1}{2}OC$$

$$\triangle COD : OC = 2R_3 \sin \angle CDO = 2R_3 \sin 60^\circ = 2R_3 \sqrt{3} \quad (3)$$

$$\downarrow$$

$$R_3 = \frac{1}{2}OD = 2$$

$$\xrightarrow{(1), (2), (3)} AB = OC \sin 45^\circ \times \sin 15^\circ = 2\sqrt{3} \times \sin 45^\circ \times \sin 15^\circ$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{3} \cos 15^\circ \times \sin 15^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sin 30^\circ}{2} = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

تالیفی میثم امین

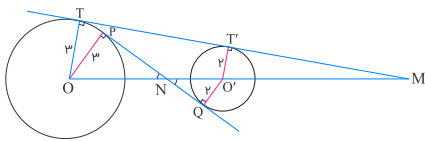
ابتدا در مثلث ABC قضیه استوارت را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} AB^2 \times CD + AC^2 \times BD &= BC(AD^2 + BD \times CD) \\ \Rightarrow 3 \times CD + 3 \times BD &= BC(AD^2 + BD \times CD) \\ \Rightarrow 3(\underbrace{BD + CD}_{BC}) &= BC(AD^2 + BD \times CD) \\ \Rightarrow AD^2 + BD \times CD &= 3 \quad (1) \end{aligned}$$

حال طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$\begin{aligned} BD \times CD &= AD \times \underbrace{MD}_2 \Rightarrow BD \times CD = 2AD \\ \xrightarrow{(1)} AD^2 + 2AD - 3 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} AD = 1 \quad \checkmark \\ AD = -3 \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases} \end{aligned}$$

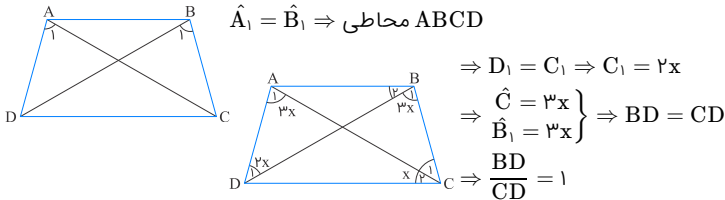
تألیفی نرگس کارگر



$$\begin{aligned} \triangle MOT : O'T' \parallel OT &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MO'}{MO' + 10} = \frac{O'T'}{OT} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3MO' = 2MO' + 20 \Rightarrow MO' = 20 \\ O'NQ \sim ONP &\Rightarrow \frac{O'N}{ON} = \frac{O'Q}{OP} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{O'N}{10 - O'N} = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow 3O'N &= 20 - 2O'N \Rightarrow O'N = 4 \\ MN &= MO' + O'N = 20 + 4 = 24 \end{aligned}$$

تألیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

نکته: چهار ضلعی ABCD محاطی است اگر و تنها اگر $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ باشد.



$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow$ محاطی ABCD

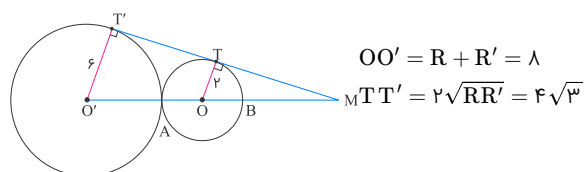
$$\begin{aligned} \Rightarrow D_1 = C_1 &\Rightarrow C_1 = 2x \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} \hat{C} &= 3x \\ \hat{B}_1 &= 3x \end{aligned} \right\} &\Rightarrow BD = CD \\ \Rightarrow \frac{BD}{CD} &= 1 \end{aligned}$$

روش دوم: دو مثلث AOB و BOC دو زاویه برابر دارند، پس زاویه سوم آن‌ها نیز با یکدیگر برابر است، پس:

$$\begin{aligned} C_1 = 2x &\Rightarrow C = 3x \\ \hat{C} = \hat{B} &\Rightarrow BD = CD \Rightarrow \frac{BD}{CD} = 1 \end{aligned}$$

تألیفی حسین سعیدی

در حالتی که دایره‌ها بر هم مماس خارجی‌اند:



$$OO' = R + R' = \lambda$$

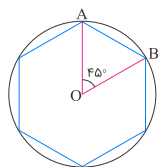
$$MTT' = r\sqrt{RR'} = r\sqrt{3}$$

$$\frac{OT}{O'T'} = \frac{OM}{O'M} = \frac{MT}{MT'}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{r}{r} = \frac{OM}{OM + \lambda} \Rightarrow OM = r \Rightarrow MB = r - r = r \\ \frac{r}{r} = \frac{MT}{MT + r\sqrt{3}} \Rightarrow MT = r\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{MT}{MB} = \sqrt{3}$$

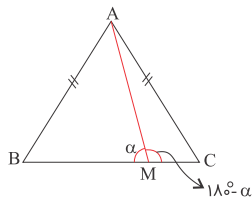
تالیفی حسین سعیدی



$$S_{\text{هشت ضلعی منتظم}} = \lambda \times S_{AOB} = \lambda \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 45^\circ = r\sqrt{2}$$

تالیفی نرگس کارگر

بنا به فرض، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABM برابر R_1 است، در این مثلث طبق قضیهٔ سینوس‌ها داریم:



$$AB = rR_1 \sin \hat{A}MB = rR_1 \sin \alpha$$

همچنین در مثلث AMC ، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث R_1 است و بنا به قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$AC = rR_1 \sin \hat{A}MC \Rightarrow AC = rR_1 \sin(180^\circ - \alpha) = rR_1 \sin \alpha$$

و چون $AB = AC$ است، پس $rR_1 \sin \alpha = rR_1 \sin \alpha$ و در نتیجه: $R_1 = R_1$

تالیفی میثم امین

$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \frac{x+y}{2} = 71^\circ \Rightarrow x+y = 142^\circ \\ \hat{A} = \frac{x-y}{2} = 27^\circ \Rightarrow x-y = 54^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 98^\circ$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

ابتدا زاویه $\widehat{M}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x + x + 4x + 3x = 360^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{M} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{DB}}{2} = \frac{4x}{2} = 80^\circ$$

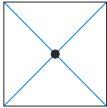
می‌دانیم انجام دو بازتاب با اعمال یک دوران به زاویه $\widehat{M}$ به مرکز M یکسان است، پس $\widehat{OM}O'' = 160^\circ$.

تالیفی مجید قهرمانی

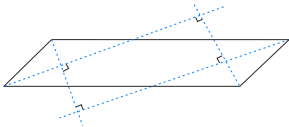
روش اول:

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

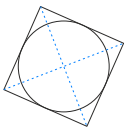
گزینه (۱): نادرست است، زیرا به‌عنوان مثال مربع یک چهار ضلعی محاطی است اما نیمسازهای داخلی آن در یک نقطه (مرکز مربع) هم‌رس‌اند و هیچ چهار ضلعی‌ای تشکیل نمی‌دهند.



گزینه (۲): نادرست است، زیرا از برخورد نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، یک مستطیل ایجاد می‌شود که لزوماً مربع نیست.



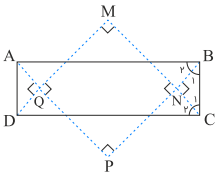
گزینه (۳): نادرست است؛ زیرا نیمسازهای داخلی هر چهار ضلعی محیطی، هم‌رس‌اند و هیچ چهار ضلعی‌ای تشکیل نمی‌دهند.



گزینه (۴): درست است، زیرا از برخورد نیمسازهای داخلی هر مستطیل، یک مربع ایجاد می‌شود.

روش دوم:

فرض کنیم از برخورد نیمسازهای داخلی چهار ضلعی $ABCD$ ، مربع $MNPQ$ ایجاد شده است. داریم:



$$\widehat{BNC} : \widehat{N} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 90^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow AB \parallel DC$$

به روش مشابه داریم:

$AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$ متوازی‌الاضلاع است

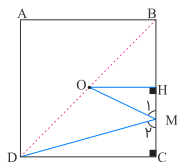
می‌دانیم از برخورد نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع به اضلاع a و b و زاویه α ، مستطیلی به اضلاع $|a - b| \sin \frac{\alpha}{2}$ و $|a - b| \cos \frac{\alpha}{2}$ ایجاد می‌شود. از آنجاکه $MNPQ$ مربع است، نتیجه می‌گیریم:

$$|a - b| \sin \frac{\alpha}{2} = |a - b| \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\xrightarrow{0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ} \frac{\alpha}{2} = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

پس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ زاویه قائمه دارد و در نتیجه مستطیل است.

اگر $OM + MD$ کوتاه‌ترین مسیر باشد، زوایای M_1 و M_2 برابرند.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \hat{H} = \hat{C} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OHM \sim \triangle CDM$$

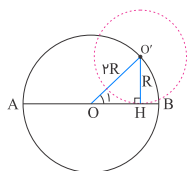
$$\Rightarrow \frac{MH}{MC} = \frac{OH}{CD}$$

OH نصف CD است، پس:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{MH}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MC = 2MH \\ BH = CH = 3MH \Rightarrow BM = 4MH \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{BM}{CM} = 2$$

تالیفی حسین سعیدی

شکل مسئله را رسم می‌کنیم:



باتوجه‌به اینکه دایره کوچک‌تر در نقطه H بر قطر AB مماس است، پس $\hat{H} = 90^\circ$.

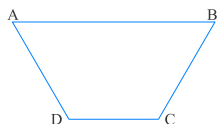
در مثلث $\triangle OO'H$ داریم:

$$\frac{O'H}{OO'} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{O}_1 = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{O'B} = 30^\circ \Rightarrow \hat{O'A} = 150^\circ$$

$$\frac{O'B}{O'A} = \frac{30^\circ}{150^\circ} = \frac{1}{5}$$

تالیفی حسین سعیدی

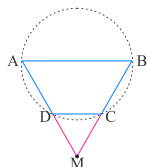


$$\hat{B} = 2\hat{A}, \hat{C} = 4\hat{A}, \hat{D} = 3\hat{A}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \hat{A} + 2\hat{A} + 4\hat{A} + 3\hat{A} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 10\hat{A} = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} = 36^\circ, \hat{B} = 72^\circ, \hat{C} = 144^\circ, \hat{D} = 108^\circ$$

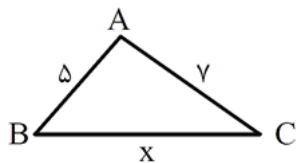
باتوجه به اینکه $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ پس چهار ضلعی ABCD محاطی است و از رئوس آن یک دایره می‌گذرد.



طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$MC \times MB = MD \times MA \Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{MD}{MB}$$

تألیفی حسین سعیدی

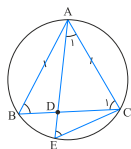


$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \sin A = 10\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{4\sqrt{3}}{7} \Rightarrow \cos A = \frac{1}{7}$$

$$x^2 = 25 + 49 - 2 \times 5 \times 7 \cos A = 74 - 70\left(\frac{1}{7}\right) = 64 \Rightarrow x = 8$$

مدارنس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۵



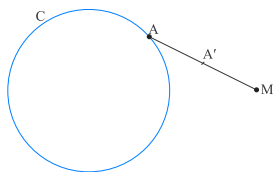
$AB = AC$ پس $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ و داریم:

$$\left. \begin{aligned} AB = AC &\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}_1 \\ \widehat{B} &= \frac{\widehat{AC}}{r} \\ \widehat{E} &= \frac{\widehat{AC}}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{E} \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{E}$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A}_1 &= \widehat{A}_1 \\ \widehat{C}_1 &= \widehat{E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ACE \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AD \cdot AE = AC^2$$

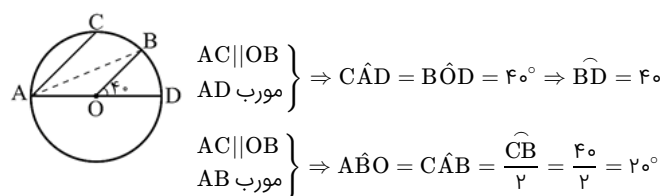
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

به عنوان مثال نقطه A را روی دایره در نظر بگیرید. وسط AM نقطه A' است. در واقع A' تصویر A تحت یک تجانس به مرکز M و نسبت $\frac{1}{p}$ است. پس وسط همه پاره خط‌ها، تصویر این دایره به مرکز M و نسبت تجانس $\frac{1}{p}$ است. بنابراین تشکیل دایره‌ای به شعاع $\frac{R}{p}$ می‌دهند.



تالیفی حسین سعیدی

$$\widehat{CAD} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{CBD} = 80^\circ$$

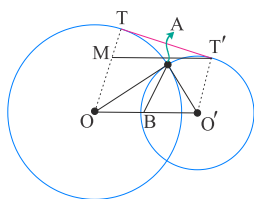


$$(\widehat{CB} = \widehat{CBD} - \widehat{BD})$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۵

گام اول

الف) دو دایره متقاطع با مشخصات گفته شده، رسم می‌کنیم:



$$AB = \frac{1}{2}OO', \quad OA = 4, \quad O'A = 3$$

ب) می‌خواهیم اندازه TT' ، یعنی طول مماس رسم شده بر دو دایره را محاسبه کنیم. مثلث‌های $OO'A$ و MTT' هر دو قائم‌الزاویه هستند. ابتدا با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $OO'A$ اندازه OO' را به دست می‌آوریم و سپس در مثلث MTT' اندازه TT' را محاسبه می‌کنیم. اگر شعاع دایره بزرگ برابر R و شعاع دایره کوچک برابر R' باشد، $MT = R - R'$ است.

گام دوم

$$\triangle OO'A : OA^2 + O'A^2 = OO'^2 \Rightarrow 4^2 + 3^2 = OO'^2 \Rightarrow OO'^2 = 25$$

$$\Rightarrow OO' = \sqrt{25} = 5$$

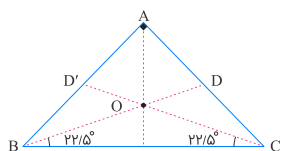
$$\triangle MTT' : MT^2 + TT'^2 = MT'^2$$

$$\xrightarrow[MT=R-R'=1]{MT'=OO'=5} 1^2 + TT'^2 = 5^2 \Rightarrow TT' = \sqrt{25-1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

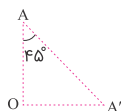
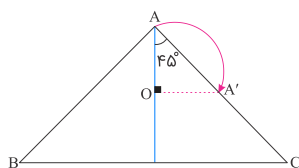
پس اندازه مماس مشترک رسم شده بر دو دایره برابر $2\sqrt{6}$ است.

گزینه ۳

باتوجه به شکل زیر، $\angle DOC = 22/5 + 22/5 = 45^\circ$ ؛ پس زاویه بین دو نیمساز BD و CD' برابر 45° است.



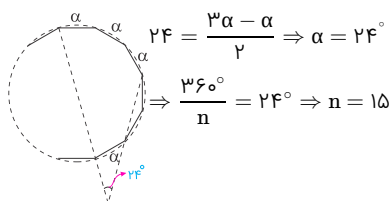
می‌دانیم ترکیب دو بازتاب با محورهایی که زاویه θ می‌سازند، دورانی است به مرکز تلاقی محورها و زاویه 2θ . پس ترکیب این دو بازتاب، دوران نقطه A به مرکز O و زاویه 90° می‌باشد. چون $\angle OAC = 45^\circ$ و $\angle OAA' = 45^\circ$ است؛ پس تصویر A روی ساق مثلث می‌افتد.



تألیفی حسین سعیدی

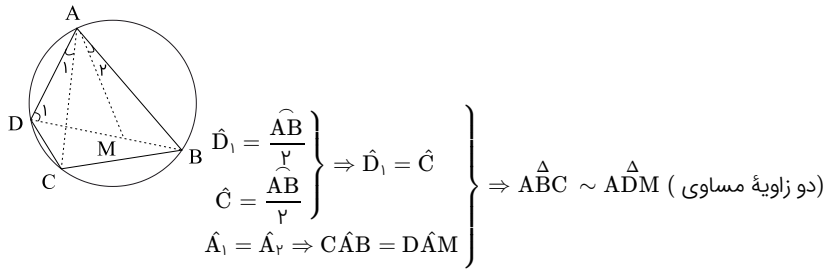
گزینه ۲

اگر دایره محیطی Π ضلعی منتظم را رسم کنیم، محیط دایره به کمان‌هایی به اندازه $\frac{360^\circ}{n}$ تقسیم می‌شود.



تألیفی محمد حسینی فرد

به شکل رسم شده خوب توجه کنید، اثبات می کنیم دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ADM$ باهم متشابه هستند:



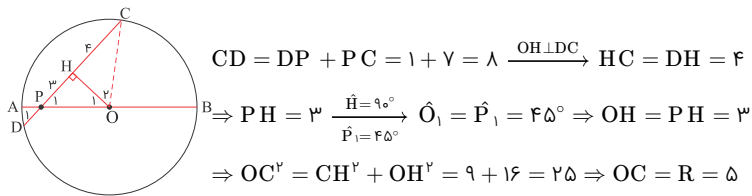
باتوجه به متشابه بودن دو مثلث، نسبت تشابه را نوشته و گزینه درست را به دست می آوریم:

$$\triangle ABC \sim \triangle ADM \Rightarrow \underbrace{\frac{AD}{AC} = \frac{DM}{BC}}_{\text{طرفین وسطین}} = \frac{AM}{AB}$$

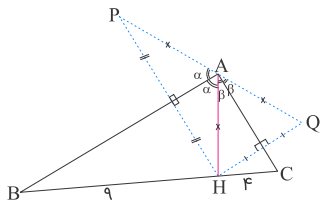
$$\Rightarrow AD \times BC = AC \times DM$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

باید از رابطه فیثاغورس در یک مثلث قائم الزاویه استفاده کنیم، پس عمود OH را بر وتر CD رسم می کنیم.



تالیفی سیامک شهبازی زاده



اولاً باتوجه به شکل، داریم:

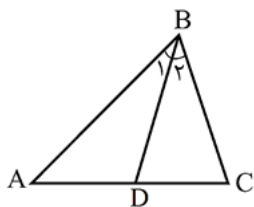
$$\widehat{PAQ} = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) \xrightarrow{\alpha + \beta = 90^\circ} \widehat{PAQ} = 180^\circ$$

پس سه نقطه P ، A و Q روی یک خط قرار دارند. درنتیجه $PQ = 2AH$. حال طول AH را با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم الزاویه ABC می یابیم:

$$AH^2 = BH \cdot HC = 36 \Rightarrow AH = 6 \Rightarrow PQ = 12$$

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

چون طول اضلاع مثلث با اعداد ۲ و ۴ و ۵ متناسب است؛ بنابراین طول اضلاع مثلث برابر است با: $2x$, $4x$, $5x$



طبق سوال AC کوچکترین ضلع مثلث برابر ۱۰ است؛ بنابراین:

$$2x = 10 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \text{طول اضلاع} \begin{cases} 2x = 10 \\ 4x = 20 \\ 5x = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC = 10 \\ AB = 20 \\ BC = 25 \end{cases}$$

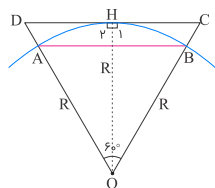
(فرض می‌کنیم $AB < BC$ است)

در هر مثلث نیمساز داخلی هر زاویه ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{4}{5} \xrightarrow[\text{درمخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{DA}{DA + DC} = \frac{4}{4 + 5} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{4}{9} AC = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۵

OH شعاع دایره را رسم می‌کنیم. می‌دانیم شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس (DC) عمود است، پس: $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$.



$$\left. \begin{aligned} \frac{AB}{DC} &= \sin 30^\circ \times R \\ \frac{DC}{R} &= \tan 30^\circ \times R \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{DC}{AB} = \frac{\tan 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{نسبت مساحت‌ها} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{12}{9}$$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

اگر آن نقطه را با شرایط گفته‌شده بازتاب دهیم، در حقیقت طبق تمرین کتاب، نقطه یک دوران انجام داده است و زاویهٔ دوران، دو برابر زاویهٔ بین دو خط d_1 و d_2 است. کمان BC برابر با ۱۰۰ درجه است؛ پس:

$$P_1 = \frac{50 + 100}{2} = 75$$

پس زاویهٔ دوران برابر است با:

$$75 \times 2 = 150^\circ$$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است، پس:

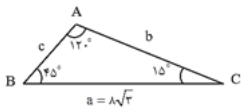
$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۱۶ = ۱۶\sqrt{۳}$$

هر زاویهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع، ۶۰° است، پس مساحت سه قطاع به شعاع‌های ۱، ۳ و ۴ و $\alpha = ۶۰^\circ$ را به دست آورده و از مساحت کل کم می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{\pi \times ۱^۲ \times ۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{\pi}{۶} \\ S_۲ &= \frac{\pi \times ۳^۲ \times ۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{۹\pi}{۶} \\ S_۳ &= \frac{\pi \times ۴^۲ \times ۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{۱۶\pi}{۶} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\text{شایه زده}} = ۱۶\sqrt{۳} - \left(\frac{\pi}{۶} + \frac{۹\pi}{۶} + \frac{۱۶\pi}{۶} \right)$$

$$\Rightarrow S = ۱۶\sqrt{۳} - \frac{۱۳\pi}{۳}$$

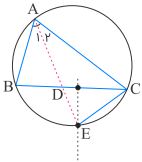
تالیفی، سیامک شهبازی زاده



$$\hat{B} = ۱۸۰^\circ - (۱۲^\circ + ۱۵^\circ) = ۴۵^\circ \Rightarrow \frac{a}{\sin ۱۲^\circ} = \frac{b}{\sin ۴۵^\circ} \Rightarrow \frac{۸\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow b = ۸\sqrt{۲} \Rightarrow AC = ۸\sqrt{۲}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

می‌دانیم نیمساز یک زاویه و عمودمنصف ضلع مقابل به آن یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی قطع می‌کنند.



$$\left. \begin{aligned} \hat{B} &= \hat{E} = \frac{1}{۲}\widehat{AC} \\ A_1 &= A_۲ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACE$$

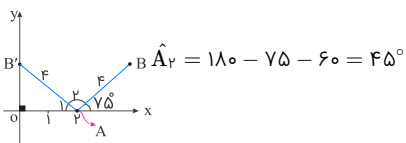
باتوجه‌به اینکه مثلث $\triangle ABD$ متساوی‌الساقین است پس مثلث $\triangle ACE$ نیز متساوی‌الساقین است.

$$AE = AC = ۱۰$$

تالیفی حسین سعیدی

در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است.

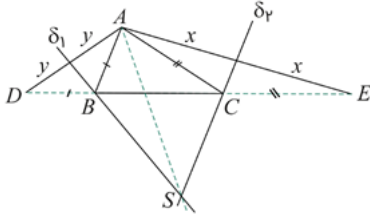
$$OA = \frac{1}{۲}AB' \Rightarrow \hat{B}' = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = ۶۰^\circ$$



حال زاویهٔ دوران یا همان $A_۲$ را به دست می‌آوریم.

تالیفی حسین سعیدی

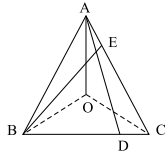
مرکز دایره محیطی مثلث ADE نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع آن است. مطابق شکل، عمودمنصف‌های AD و AE را رسم کرده‌ایم تا یکدیگر را در S قطع کنند، S مرکز دایره محیطی مثلث ADE است. از طرفی، در دو مثلث متساوی‌الساقین BAD و CAE، عمودمنصف‌های قاعده‌های AD و AE، همان نیمسازهای زاویه‌های روبه‌روی قاعده، یعنی $\widehat{ABD}$ و $\widehat{ACE}$ هستند، به عبارت دیگر می‌توان گفت که نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C بر δ_1 و δ_2 واقع هستند و می‌دانیم که در هر مثلث، هر دو نیمساز خارجی و نیمساز داخلی زاویه سوم هم‌رس‌اند، یعنی S روی امتداد نیمساز داخلی زاویه A واقع است.



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

تحت یک دوران به مرکز O و با زاویه 120° داریم:

$$\begin{cases} B \rightarrow C \\ C \rightarrow A \end{cases} \Rightarrow BC \rightarrow CA$$



و چون $BD = CE$ بنابراین تصویر نقطه D تحت این دوران نقطه E است؛ در نتیجه $OD = OE$ و $\widehat{EOD} = 120^\circ$.
از طرفی چون A دوران‌یافته C است، $\widehat{AOC} = 120^\circ$ ؛ بنابراین تمام گزینه‌ها جز گزینه ۲ صحیح هستند. زاویه بین OD و BE به موقعیت نقطه D روی ضلع BC بستگی دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

دو دایره شعاع‌های برابر دارند و $\widehat{O} = \widehat{O'} = 90^\circ$ پس $\widehat{AB} = 90^\circ$ یعنی $\widehat{M} = \widehat{N} = 45^\circ$ بنابراین $\widehat{MAN} = 90^\circ$ ، پس مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

A را به O وصل می‌کنیم. می‌دانیم شعاع دایره، در نقطه تماس، بر خط مماس عمود است.

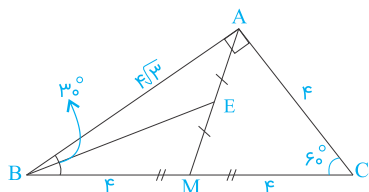
$$S_{AOB} + S_{AOC} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{R \cdot AB}{2} + \frac{R \cdot AC}{2} = \frac{AB \cdot AC}{2}$$

$$\Rightarrow R(AB + AC) = AB \cdot AC \Rightarrow R = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC} = \frac{12 \times 8}{12 + 8} = 4.8$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه به زوایای ۳۰° و ۶۰° ، ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰° نصف وتر است. پس $BC = ۲AC = ۸$. از طرفی میانه نظیر وتر، نصف وتر است. پس $AM = BM = CM = ۴$

همچنین ضلع روبه‌رو به زاویه ۶۰° ، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است، لذا: $AB = \frac{۸\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳}$. حال در مثلث ABM قضیه میانه‌ها را می‌نویسیم:



$$AB^2 + BM^2 = 2BE^2 + \frac{AM^2}{۲}$$

$$\Rightarrow (4\sqrt{۳})^2 + ۴^2 = ۲ \times BE^2 + \frac{۴^2}{۲} \Rightarrow ۴۸ + ۱۶ = ۲BE^2 + ۸$$

$$\Rightarrow BE^2 = ۲۸ \Rightarrow BE = ۲\sqrt{۷}$$

تالیفی میثم امین

فاصله مرکز کره (O) از هریک از وجه‌های چهار وجهی برابر با شعاع کره محاطی می‌باشد (r). از طرفی چون وجوه چهار وجهی برابر است می‌توان چهار وجهی را متشکل از ۴ هرم همنهشت به رأس O، قاعده وجوه و ارتفاع r در نظر گرفت، پس خواهیم داشت:

$$۴V_{\text{کوچک}} = V_{\text{اصلی}} \Rightarrow ۴ \times \frac{1}{۳} \times r \times S_{\text{وجه}} = \frac{1}{۳} \times h \times S_{\text{وجه}} \Rightarrow fr = h$$

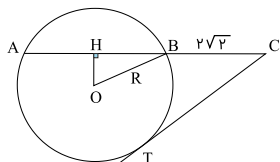
$$\xrightarrow{h=۲۴} r = ۶ \Rightarrow V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi r^3 = ۲۸۸\pi$$

تالیفی صبا مهدوی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

شکل مربوط به تست را رسم می‌کنیم:



OB اندازه شعاع دایره است. ($OB = ۶$) با استفاده از قضیه فیثاغورس اندازه BH را تعیین می‌کنیم. BH نصف AB است. AB را هم محاسبه می‌کنیم، سپس با استفاده از روابط طولی در دایره، اندازه مماس CT را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\triangle OHB : OH^2 + HB^2 = OB^2 \Rightarrow ۲^2 + HB^2 = ۶^2 \Rightarrow$$

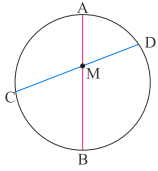
$$۴ + HB^2 = ۳۶ \Rightarrow HB^2 = ۳۲ \Rightarrow HB = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

$$AB = ۲BH = ۲ \times ۴\sqrt{۲} = ۸\sqrt{۲}$$

حالا اندازه مماس CT را به دست می‌آوریم:

$$CT^2 = CB \times CA = ۲\sqrt{۲}(۲\sqrt{۲} + ۸\sqrt{۲})$$

$$= ۲\sqrt{۲} \times ۱۰\sqrt{۲} = ۴۰ \Rightarrow CT = \sqrt{۴۰} = ۲\sqrt{۱۰}$$



M وتر CD را به نسبت ۳ به ۸ تقسیم کرده است، پس می‌توان گفت: $MC = 8x$ و $MD = 3x$ و $CD = 11x$. طبق روابط طولی دایره داریم:

$$MC \times MD = MA \times MB$$

$$8x \times 3x = MA \times MB \Rightarrow MA \times MB = 24x^2$$

از طرفی:

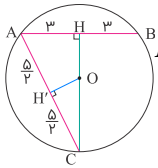
$$CD = 11x \quad AB \Rightarrow AB = \frac{10}{11}CD \Rightarrow MA + MB = \frac{10}{11} \times 11x = 10x$$

$$\begin{cases} MA \times MB = 24x^2 \\ MA + MB = 10x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MA = 6x \\ MB = 4x \end{cases}$$

پس به نسبت $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ قطع می‌کند.

تالیفی حسین سعیدی

OC قسمتی از قطر دایره است، پس وقتی از وسط AB می‌گذرد بر آن عمود نیز می‌باشد.



$$AH^2 + CH^2 = AC^2 \Rightarrow 9 + CH^2 = 25 \Rightarrow CH = 4$$

از O بر AC عمود می‌کنیم تا آن را نصف کند.

مثلث‌های $\triangle OCH'$ و $\triangle ACH'$ متشابه‌اند:

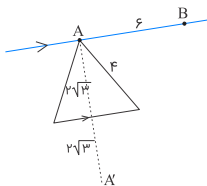
$$\frac{OH'}{AH} = \frac{CH'}{CH} \Rightarrow \frac{OH'}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow OH' = \frac{15}{8}$$

$$\frac{OC}{AC} = \frac{CH'}{CH} \Rightarrow \frac{OC}{5} = \frac{1}{4} \Rightarrow OC = \frac{5}{4} \Rightarrow OH = 4 - \frac{5}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\frac{OH}{OH'} = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{15}{8}} = \frac{11}{15}$$

تالیفی حسین سعیدی

A را نسبت به ضلع روبه‌رویش بازتاب می‌کنیم و آن نقطه را A' می‌نامیم. حال فاصله A' را تا B حساب می‌کنیم.

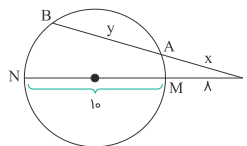


$$A'B = \sqrt{AA'^2 + AB^2} = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{48 + 36} = \sqrt{84}$$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

باتوجه به فرض داریم:

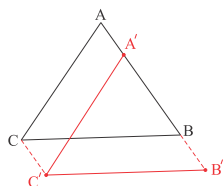
$$x - y = ۲ \Rightarrow x = y + ۲$$



$$\begin{aligned} P A . P B &= P M . P N \Rightarrow x(x+y)=\lambda \times \lambda \lambda \\ &\Rightarrow (y+۲)(y+۲+y)=\lambda \times \lambda \lambda \\ &\Rightarrow (y+۲)(y+۱)=۴ \times \lambda \lambda=۹ \times \lambda \Rightarrow y=۷ \end{aligned}$$

از طرفی باتوجه به شکل داریم:

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰



اگر طول $\frac{1}{۴} \overrightarrow{AB}$ را x قرار دهیم، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} AB = ۴x \\ AA' = x \\ CC' = x \\ BB' = x \end{cases}$$

می‌دانیم در انتقال شیب خطوط حفظ می‌شود، پس $CC' \parallel AB'$ و چهارضلعی $ACC'B'$ یک دوزنقه است. واضح است که ارتفاع دوزنقه و ارتفاع مثلث $A'B'C'$ از رأس C' هم‌اندازه هستند. این ارتفاع را h می‌نامیم.

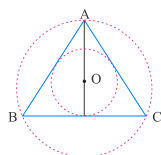
$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{1}{۲}h(CC' + AB') = \frac{1}{۲}h(x + ۵x) = ۳xh$$

$$\text{مساحت } \triangle A'B'C' = \frac{1}{۲}h \cdot A'B' = \frac{1}{۲}h \times ۴x = ۲xh$$

پس مساحت دوزنقه، $\frac{۳}{۲}$ مساحت مثلث است.

تالیفی مجید قهرمانی

باتوجه به شکل زیر، شعاع دایره محیطی $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع مثلث و شعاع دایره محاطی داخلی $\frac{1}{۳}$ ارتفاع مثلث است.



پس می‌توان گفت شعاع دایره محاطی $\frac{1}{۲}$ شعاع دایره محیطی است، بنابراین مجانس آن با نسبت $k = \pm \frac{1}{۲}$ می‌باشد.

تالیفی حسین سعیدی

$$۳\widehat{AB} = ۴\widehat{BC} = ۶\widehat{CD} = x \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{x}{۳}, \widehat{BC} = \frac{x}{۴}, \widehat{CD} = \frac{x}{۶}$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{x}{۳} + \frac{x}{۴} + \frac{x}{۶} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۲۴۰^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = ۸۰^\circ, \widehat{BC} = ۶۰^\circ, \widehat{CD} = ۴۰^\circ$$

راه حل اول:

$$\widehat{D} = \frac{\widehat{AB}}{۲} = ۴۰^\circ \quad , \quad \widehat{A} = \frac{\widehat{CD}}{۲} = ۲۰^\circ \quad (\text{زاویه محاطی})$$

$$\widehat{E} = \widehat{A} + \widehat{D} = ۶۰^\circ \quad (\text{زاویه خارجی})$$

راه حل دوم:

$$\widehat{E} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{۲} = \frac{۸۰^\circ + ۴۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$$

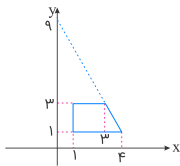
مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۳۹۶

مشخص است که معادله خط داده شده به خط مایل مربوط است، مختصات A را به دست می آوریم:

$$y = ۳ = -۲x + ۹ \Rightarrow x = ۳$$

شکل حاصل از دوران یک مخروط ناقص خواهد بود که استوانه ای به شعاع قاعده یک و ارتفاع ۲ از آن حذف شده است.

ارتفاع مخروط کامل عرض مختصات محل برخورد خط $y = -۲x + ۹$ با محور y منهای یک است، پس این ارتفاع برابر ۸ است.



$$\left. \begin{aligned} V_{\text{مخروط اصلی}} &= \frac{1}{۳}(\pi \times ۴^۲) \times ۹ = ۱۲۸\pi \\ V_{\text{مخروط حذف شده}} &= \frac{1}{۳}(\pi \times ۳^۲) \times ۲ = ۱۲\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_{\text{مخروط ناقص}} = ۱۲۸\pi - ۱۲\pi = ۱۱۶\pi$$

$$V_{\text{استوانه}} = (\pi \times ۱^۲) \times ۲ = ۲\pi \Rightarrow \text{شکل سؤال } V = ۱۱۶\pi - ۲\pi = ۱۱۴\pi$$

تالیفی صبا مهدوی

دو حالت وجود دارد:

- ۱) نقطه M جایی غیر از عمودمنصف AB قرار گیرد، اگر آن را نسبت به عمودمنصف قرینه کنیم تا نقطه M' حاصل شود، مثلث M'AB با MAB همنهشت خواهد بود.
- ۲) اگر نقطه M روی عمودمنصف باشد، بازتابش روی خودش می افتد و همنهشت دیگری ندارد.

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

$$S = \frac{1}{۲}bc \sin A \Rightarrow ۱۶ = \frac{1}{۲} \times ۸ \times ۵ \times \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \cos A = \frac{۳}{۵}$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc \cos A \Rightarrow a^۲ = ۶۴ + ۲۵ - ۲(۸)(۵)(\frac{۳}{۵}) = ۴۱ \Rightarrow a = \sqrt{۴۱}$$

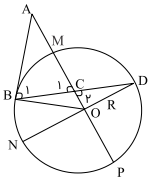
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

دو زنقه متساوی الساقین محاطی است ولی لزوماً محیطی نمی باشد.

تالیفی حسین سعیدی

گام اول

با توجه به اطلاعات صورت سؤال، شکل مربوط را رسم می‌کنیم:



دو زاویه $\hat{C}_1$ و $\hat{B}_1$ باهم برابر هستند (چون مثلث ABC متساوی الساقین است). همچنین زوایای $\hat{C}_1$ و $\hat{C}_2$ هم متقابل به رأس بوده و باهم برابرند. زوایای $\hat{C}_1$ و $\hat{C}_2$ از برخورد دو وتر در داخل دایره تشکیل شده‌اند. زاویه $\hat{B}_1$ هم زاویه ظلی بوده که نصف کمان دربرگیرنده آن است.

گام دوم

$$\left. \begin{aligned} \hat{C}_1 = \hat{C}_2 &= \frac{\widehat{BM} + \widehat{DP}}{2} \\ \hat{B}_1 &= \frac{\widehat{BM} + \widehat{DM}}{2} \\ \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\widehat{BM} + \widehat{DP}}{2} = \frac{\widehat{BM} + \widehat{DM}}{2}$$

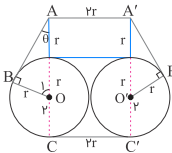
$$\Rightarrow \widehat{BM} + \widehat{DP} = \widehat{BM} + \widehat{DM} \Rightarrow \widehat{DP} = \widehat{DM}$$

وتر MP از مرکز دایره عبور می‌کند پس MP قطر دایره بوده و در نتیجه هرکدام از کمان‌های $\widehat{DP}$ و $\widehat{DM}$ برابر 90° هستند. بنابراین زاویه مرکزی $\hat{O}$ قائمه بوده و مثلث $\triangle OCD$ در رأس O قائمه است. تا اینجا نتیجه گرفتیم که مثلث $\triangle OCD$ قائم الزاویه است. نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که دو زاویه $\hat{C}_2$ و $\hat{D}$ باهم برابر باشند. پس مثلث $\triangle OCD$ متساوی الساقین نبوده و تنها قائم الزاویه بودن آن نتیجه می‌شود.

گزینه ۱

$$\triangle ABO : \sin \theta = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ, \hat{O}_2 = 120^\circ$$

به همین ترتیب در مثلث $A'B'O'$ داریم: $\hat{O}'_2 = 120^\circ$



$$\begin{aligned} \text{طول نخ} &= AA' + CC' + AB + A'B' + \widehat{BC} + \widehat{B'C'} \\ &= 2r + 2r + \sqrt{3}r + \sqrt{3}r + \frac{1}{3} \times 2\pi r + \frac{1}{3} \times 2\pi r \\ &= 4\sqrt{3} + 6 = 2(2\sqrt{3} + 3) \end{aligned}$$

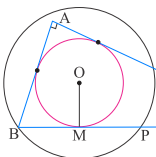
تالیفی نرگس کارگر

گزینه ۱

$$\begin{aligned} 2 \times \begin{cases} \widehat{TAT'} + \widehat{TBT'} = 360^\circ \\ \widehat{M} = \frac{\widehat{TBT'} - \widehat{TAT'}}{2} = 40^\circ \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \widehat{TAT'} + \widehat{TBT'} = 360^\circ \\ \widehat{TBT'} - \widehat{TAT'} = 80^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} 2\widehat{TBT'} = 440^\circ \\ &\Rightarrow \begin{cases} \widehat{TBT'} = 220^\circ \\ \widehat{TAT'} = 140^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

گزینه ۴



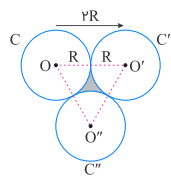
$$BC = \sqrt{30^2 + 16^2} = 2\sqrt{15^2 + 8^2} = 34$$

OM خطی عمود بر BP است که از مرکز رسم شده پس $BM = MP$. می‌دانیم $BM = P - AC = 40 - 30 = 10$ است، پس:

$$CP = 2BM = 20 \Rightarrow CP = BC - BP = 34 - 20 = 14$$

تالیفی صبا مهدوی

شکل مسئله مطابق زیر است:

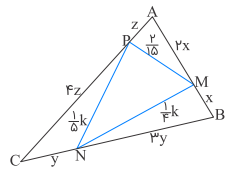


برای محاسبهٔ مساحت سایه‌خورده، مساحت $\triangle OO'O''$ را می‌یابیم و سه قطاع 60° را از آن کم می‌کنیم.

$$S_{\text{سایه‌خورده}} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2R)^2 - 3 \times \frac{60}{360} \times \pi R^2 = (\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}) R^2$$

تالیفی حسین سعیدی

فرض کنیم $S_{\triangle ABC} = k$ ، باتوجه‌به معلومات مسئله، طول پاره‌خط‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم. حال داریم:



$$\frac{S_{\triangle APM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}(z)(x) \sin \hat{A}}{\frac{1}{2}(\omega z)(x) \sin \hat{A}} = \frac{x}{\omega} \Rightarrow S_{\triangle APM} = \frac{x}{\omega} k$$

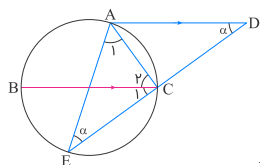
$$\frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}(x)(y) \sin \hat{B}}{\frac{1}{2}(x)(y) \sin \hat{B}} = \frac{y}{\omega} \Rightarrow S_{\triangle BMN} = \frac{y}{\omega} k$$

$$\frac{S_{\triangle CPN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}(y)(z) \sin \hat{C}}{\frac{1}{2}(y)(z) \sin \hat{C}} = \frac{z}{\omega} \Rightarrow S_{\triangle CPN} = \frac{z}{\omega} k$$

$$S_{\triangle MNP} = k - (\frac{x}{\omega} + \frac{y}{\omega} + \frac{z}{\omega})k = k - \frac{x+y+z}{\omega}k = \frac{\omega - (x+y+z)}{\omega}k$$

تالیفی فرزاد زمانی نژاد

در مثلث ADE اضلاع AD و AE برابرند، پس مثلث متساوی الساقین است؛ یعنی $\hat{D} = \hat{E} = \alpha$.



$$AD \parallel BC \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D} = \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{E} = \alpha \Rightarrow \hat{AC} = 2\alpha \\ AD \parallel BC \Rightarrow \hat{AC} = \hat{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{AB} = 2\alpha \Rightarrow \hat{C}_2 = \alpha$$

بنابراین $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 2\alpha$. باتوجه به اینکه $AE = CE$ ، پس $\hat{A}_1 = 2\alpha$.
در مثلث ACE مجموع زوایای داخلی 180° است:

$$\hat{A}_1 + \hat{C} + \hat{E} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$$

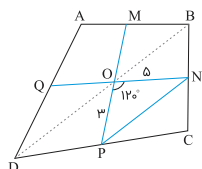
$$\hat{EAD} = 180^\circ - 2\alpha = 108^\circ$$

تألیفی حسین سعیدی

$$\begin{aligned} TT'^2 &= OO'^2 - (R - R')^2 \Rightarrow \lambda^2 = 17^2 - (R - R')^2 \\ &\Rightarrow 17^2 - \lambda^2 = (R - R')^2 \Rightarrow R - R' = 15 \end{aligned}$$

تألیفی امیر خسته

از آنجا که M، N، P و Q اواسط اضلاع هستند، چهار ضلعی MNPQ متوازی‌الاضلاع است. (طبق عکس قضیهٔ تالس)



بنابراین قطرهای این چهار ضلعی، یعنی MP و NQ منصف یکدیگرند، پس:

$$\begin{cases} ON = \frac{QN}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ OP = \frac{MP}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

حال در مثلث ONP طبق قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$\overset{\Delta}{ONP} : NP^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \underbrace{\cos 120^\circ}_{-\frac{1}{2}} = 25 + 9 + 15 = 49$$

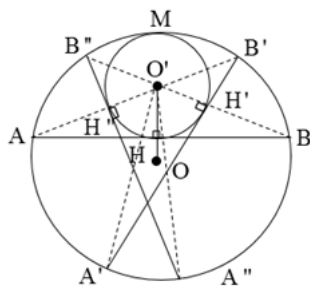
$$\Rightarrow NP = 7$$

$$\overset{\Delta}{BCD} : \frac{CP}{PD} = \frac{NC}{BN} = 1 \Rightarrow NP \parallel BD \Rightarrow BD = 2NP = 14$$

تألیفی نرگس کارگر

گام اول

الف) دو دایره با شعاع‌های ۲ و ۵ که دارای وضعیت مماس داخل هستند را رسم می‌کنیم:



$$R = 5, \quad R' = 2 = O'H = O'H' = O'H''$$

$$OO' = 3, \quad OH = 1$$

با توجه به شکل رسم‌شده و وضعیت دو دایره و تری‌هایی را مشخص می‌کنیم که به اندازه $4\sqrt{6}$ بوده و به دایره کوچک‌تر مماس هستند.

گام دوم

$$1) S_{O'AB} = \frac{1}{2} AB \times O'H = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{6} \times 2 = 4\sqrt{6}$$

$$S_{O'AB} = \frac{1}{2} AH \times O'H + \frac{1}{2} BH \times O'H = \frac{1}{2} \times AH \times 2 + \frac{1}{2} BH \times 2 = AB = 4\sqrt{6}$$

$$2) S_{O'B'A'} = A'B' = 4\sqrt{6}$$

$$3) S_{O'A''B''} = A''B'' = 4\sqrt{6}$$

بنابراین ۳ وتر به طول $4\sqrt{6}$ می‌توان رسم کرد.

گزینه ۲

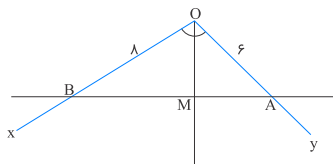
حالت اول: اگر d_1 و d_2 موازی باشند و فاصله آن‌ها m ، آنگاه می‌دانیم S_1S_2 و S_2S_1 تبدیل‌های انتقال به اندازه $2m$ هستند که جهت آن‌ها مخالف یکدیگر است، پس معادله هیچ جوابی نخواهد داشت. پس گزینه ۱ حذف می‌شود.

حالت دوم: اگر d_1 و d_2 در نقطه O با زاویه θ متقاطع باشند، آنگاه می‌دانیم S_1S_2 و S_2S_1 دوران به اندازه 2θ حول O و در خلاف جهت می‌باشند. می‌دانیم O همواره پاسخ معادله است. اگر معادله بیش از یک جواب داشته باشد، در نتیجه نقطه‌ای مانند A وجود دارد که در دو دوران مخالف جهت حول O تبدیل به یک نقطه شده است. پس دوران 180° بوده است. یعنی:

$$2\theta = 180^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

تالیفی مجید قهرمانی

گزینه ۲

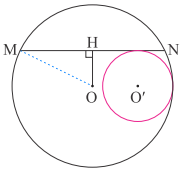


OM نیمساز زاویه O در مثلث OAB است، بنابراین:

$$OM = \frac{2OA \cdot OB \cdot \cos \frac{\hat{O}}{2}}{OA + OB} = \frac{2(6)(8)\left(\frac{1}{2}\right)}{6 + 8} = \frac{48}{14} = \frac{24}{7}$$

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

شکل مسئله را رسم می‌کنیم:



فرض کنید شعاع دایرهٔ بزرگتر R و شعاع دایرهٔ کوچکتر R' باشد. طول وتر MN خواستهٔ سؤال می‌باشد. مساحت ناحیهٔ محصور بین آن‌ها برابر است با:

$$64\pi = \pi R^2 - \pi R'^2 \Rightarrow R^2 - R'^2 = 64$$

باتوجه‌به شکل $OH = R'$ و $OM = R$ می‌باشد.

$$OM^2 = OH^2 + MH^2 \Rightarrow R^2 = R'^2 + MH^2 \Rightarrow MH^2 = R^2 - R'^2 = 64 \Rightarrow MH = 8$$

OH وتر MN را نصف می‌کند، پس:

$$MN = 2MH = 16$$

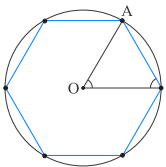
تالیفی حسین سعیدی

با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها اندازهٔ AB را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{A}SB &= 360^\circ - (90^\circ + 60^\circ + 60^\circ) = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ \\ AB^2 &= SB^2 + SA^2 - 2SB \times SA \times \cos 150^\circ \\ &= 4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8 + 4\sqrt{3} \Rightarrow AB = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{6 + 2\sqrt{6} \times \sqrt{2} + 2} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است؛ پس شعاع دایره ۶ است. حال مساحت دایره را به دست می‌آوریم.



$$S_{\text{دایره } B} = 6^2 \times \pi = 36\pi$$

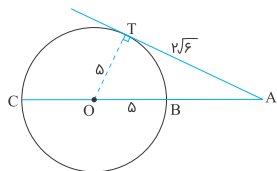
مساحت شش ضلعی با مجموع مساحت‌های شش مثلث متساوی‌الاضلاع برابر است:

$$S_{OAB} = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{ارتفاع}} \times 6 \times \underbrace{\frac{6}{2}}_{\text{قاعده}} \times \frac{1}{2} = 9\sqrt{3} \Rightarrow S_{\text{شش ضلعی}} = 6 \times 9\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$$

$$S_{\text{هاشورخورده}} = \frac{36\pi - 54\sqrt{3}}{2} = 18\pi - 27\sqrt{3}$$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

دورترین نقطه دایره از نقطه A، نقطه C است. با به دست آوردن طول AO می‌توانیم طول CA را محاسبه کنیم:



$$OA^2 = OT^2 + AT^2 = 25 + 24 = 49 \Rightarrow OA = 7 \Rightarrow CA = 5 + 7 = 12$$

تالیفی سیامک شهبازی زاده

زاویه BAT محاطی است، پس:

$$\widehat{BT} = \widehat{BT} = 2x$$

همچنین وترهای برابر در یک دایره، کمان‌های برابر دارند:

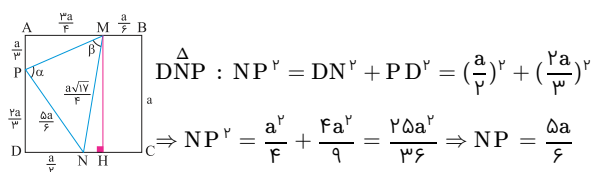
$$\widehat{AT} = \widehat{AB} = \frac{360^\circ - 2x}{2} = 180^\circ - x$$

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2} = \frac{(180^\circ - x) - (2x)}{2} = 90^\circ \Rightarrow 180^\circ - 3x = 120^\circ$$

$$\Rightarrow 3x = 60^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$

تالیفی سیامک شهبازی زاده

$$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-3) = 25$$



$$\Delta_{MNP} : MN^2 = MP^2 + PN^2 = a^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{10a^2}{9} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{10}}{3}$$

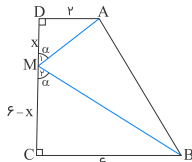
$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{8}{25} = \frac{17}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{17}}{5}$$

$$\Delta_{MNP} : \frac{PN}{\sin \beta} = \frac{MN}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{\frac{a}{3}}{\sin \beta} = \frac{\frac{a\sqrt{17}}{3}}{\frac{\sqrt{17}}{5}} \Rightarrow \frac{1}{\sin \beta} = \frac{5}{3} \Rightarrow \sin \beta = \frac{3}{5} = \frac{2}{3}$$

تالیفی نرگس کارگر

راه حل اول:

می‌دانیم مقدار $MA + MB$ زمانی به حداقل می‌رسد که $\hat{A}MD = \hat{B}MC$. در این صورت داریم:



$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2, \hat{D} = \hat{C} \Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle BMC$$

$$\Rightarrow \frac{x}{6-x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 6-x \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$$

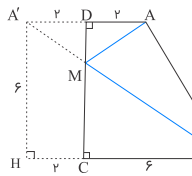
$$\triangle ADM : \hat{D} = 90^\circ \Rightarrow AM = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\triangle BCM : \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow MB = \sqrt{4^2 + (6-x)^2} = \sqrt{16 + \frac{16}{4}} = \frac{10}{2}$$

$$\Rightarrow AM + MB = \frac{6}{2} = 3$$

راه حل دوم:

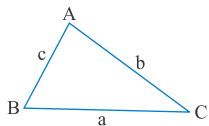
مطابق شکل، کمترین مقدار $MA + MB$ برابر طول پاره خط $A'B$ است. در مثلث قائم‌الزاویه $A'HB$ داریم:



$$A'B^2 = A'H^2 + BH^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow A'B = 10$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

طبق قضیه سینوس‌ها داریم:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{\frac{6}{5}b}{\sin 2B} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{6}{5} \sin B = \sin 2B$$

$$\Rightarrow \frac{6}{5} \sin B = 2 \sin B \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{3}{5}$$

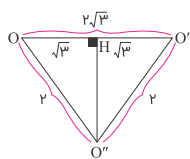
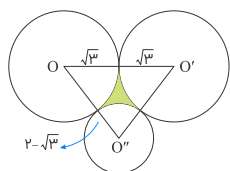
می‌دانیم $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ پس:

$$\sin^2 B + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \sin B = \frac{4}{5}$$

$$\frac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{R}{AC} = \frac{1}{2 \times \frac{4}{5}} = \frac{5}{8}$$

تالیفی حسین سعیدی

باتوجه به شکل زیر باید مساحت مثلث متساوی الساقین $OO'O''$ را بیابیم و مساحت سه قطاع را از آن کم کنیم.



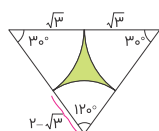
$$\text{OH}^\gamma + \text{O}''\text{H}^\gamma = \text{OO}''^\gamma \Rightarrow \mathfrak{w} + \text{O}''\text{H}^\gamma = \mathfrak{r} \Rightarrow \text{O}''\text{H} = \mathfrak{r} - \mathfrak{w}$$

$$S_{OO'O''} = \frac{1}{r} \times 1 \times r\sqrt{r} = \sqrt{r}$$

$O''H$ نصف وتر OO'' است، پس $\hat{O} = \hat{O}' = 30^\circ$ و $\angle O'' = 120^\circ$.

مساحت قطاع‌ها برابر است با:

$$\begin{aligned} S_{\omega\text{عقظا}} &= \nu \times \frac{\nu_0}{\nu \nu_0} \times \pi \times (\sqrt{\nu})^\nu + \frac{1\nu_0}{\nu \nu_0} \times \pi (\nu - \sqrt{\nu})^\nu \\ &= \frac{\pi}{\nu} + \frac{\pi}{\nu} (\nu + \nu - \nu \sqrt{\nu}) = \frac{1\nu\pi}{\nu} - \nu\pi \frac{\sqrt{\nu}}{\nu} \\ S_{\omega\text{نجرى}} &= \sqrt{\nu} - \left(\frac{1\nu\pi}{\nu} - \nu\pi \frac{\sqrt{\nu}}{\nu} \right) \xrightarrow{\pi=\nu} \omega\sqrt{\nu} - \wedge/\omega \end{aligned}$$



تالیفی حسین سعیدی

طول قطعات مماس رسم شده از یک نقطه بر دایره باهم برابر است، بنابراین:

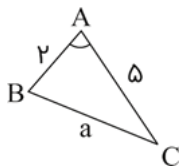
$$AE = AF \Rightarrow \mathfrak{r}_x - \mathfrak{w} = \mathfrak{v}_0 + x \Rightarrow x = \mathfrak{w} \Rightarrow AE = AF = \mathfrak{r}\mathfrak{w}$$

$$BE = BD, \quad CF = CD$$

$$\Rightarrow P_{ABC} = AB + BC + CA = AB + (\cancel{BD} + \cancel{DE} + \cancel{EC}) + CA$$

$$= (\text{AB} + \text{BE}) + (\text{CF} + \text{CA}) = \text{AE} + \text{AF} = \text{१९}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶



$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha$$

$$7 = \frac{1}{2} \times 7 \times 5 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{5}$$

$$a^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow a^2 = 49 + 25 - 70\left(\pm \frac{4}{5}\right) = 29 \mp 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{13} \Rightarrow \text{محیط} = 7 + \sqrt{13} \\ a = \sqrt{45} \Rightarrow \text{محیط} = 7 + 3\sqrt{5} \end{cases}$$

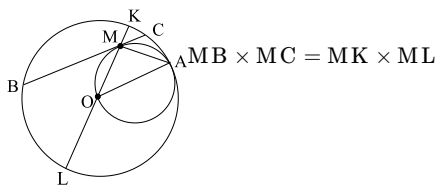
مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) BC یک وتر داخلی در دایره بزرگتر است. قطر دایره بزرگتر را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که در نقطه M وتر BC را قطع کند.

ب) با استفاده از روابط طولی در دایره می‌توان نوشت:



گام دوم

در گزینه‌ها MA و MO مشاهده می‌شود. پس MK و ML را برحسب MA و MO تشکیل می‌دهیم. شعاع دایره بزرگ را R در نظر می‌گیریم:

$$MB \times MC = MK \times ML$$

$$\Rightarrow MB \times MC = (R - MO)(R + MO) = R^2 - MO^2$$

در مثلث AMO، زاویه $\hat{M}$ زاویه محاطی روبه‌رو به قطر است. پس $\hat{M} = 90^\circ$ بوده و این مثلث قائم‌الزاویه محسوب می‌شود. طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$R^2 = MO^2 + MA^2 \Rightarrow R^2 - MO^2 = MA^2 \Rightarrow MB \times MC = MA^2$$

راه حل دوم: زاویه OAM روبه‌رو به قطر است، پس $\angle OAM = 90^\circ$. در مثلث KAL داریم: $AM^2 = MK \times ML$

بنابراین: $AM^2 = MC \times MB$

بازتاب نقطه A نسبت به محور yها را به دست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم. محل برخورد خط A'B با محور yها، رأس سوم مثلث (C) است.

معادله خط A'B را به دست می‌آوریم:

$$A'(-4, 12), B(1, -3) \Rightarrow m_{A'B} = \frac{-3 - 12}{1 + 4} = -3$$

$$y + 3 = -3(x - 1) \Rightarrow y + 3 = -3x + 3 \Rightarrow y = -3x \xrightarrow{x=0} y = 0$$

تالیفی زهرا علیزاده

گام اول

الف) شکل را با نام‌گذاری دقیق و جزئیات بیشتر رسم می‌کنیم:

ب) $AT^2 = AM \times AN$ مماس رسم شده بر دایره است، بنابراین می‌توان نوشت:

باتوجه به این رابطه اندازه t محاسبه می‌شود. بعد از محاسبه t ، چون $PK^2 = PN \times PM$ ، اندازه x که همان مجهول موردنظر تست است، را به دست می‌آوریم.

گام دوم

ابتدا محاسبه اندازه t :

$$AT^2 = AM \times AN \Rightarrow 6^2 = 4(t + 4) \Rightarrow 36 = 4(t + 4)$$

$$\Rightarrow t + 4 = 9 \Rightarrow t = 5$$

حالا که مقدار t محاسبه شد، اندازه x را می‌توانیم به دست آوریم:

$$PK^2 = PN \times PM \Rightarrow x^2 = 3(3 + 5) = 3 \times 8 = 24$$

$$\Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

گزینه ۱

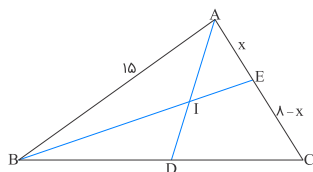
نکته: در یک مثلث محل هم‌رسی دو نیمساز خارجی و یک نیمساز داخلی، مرکز دایره محاطی خارجی است.

در مثلث‌های متساوی‌الساقین ABD و ACE ، عمودمنصف قاعده‌های AD و AE ، نیمساز زاویه رأس روبه‌رو به قاعده هم هستند. پس نقطه O محل هم‌رسی نیمسازهای زاویه خارجی B و C از مثلث ABC است که روی نیمساز داخلی A نیز قرار دارد و مرکز دایره محاطی خارجی روبه‌رو به رأس A است.

ولی عمودمنصف BC از O نمی‌گذرد، بلکه عمودمنصف DE از نقطه O می‌گذرد.

تالیفی محمد حسینی فرد

گزینه ۱



$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow BC = \sqrt{17^2 + 15^2} = 17$$

$$\text{است } BE \text{ نیمساز } \hat{B} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{x}{17-x} = \frac{15}{17} \Rightarrow 17x = -15x + 120$$

$$\Rightarrow 32x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{32} = \frac{15}{4}$$

$$\triangle ABE : \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow BE^2 = AB^2 + AE^2 = 15^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 = 15^2 + \frac{15^2}{16}$$

$$= 15^2 \left(\frac{17}{16}\right) \Rightarrow BE = \frac{15}{4} \sqrt{17} \quad (*)$$

$$\triangle ABE : (\text{AI نیمساز } \hat{A} \text{ است}) \Rightarrow \frac{BI}{IE} = \frac{AB}{AE}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BI}{BI + IE} = \frac{AB}{AB + AE}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{BI}{\frac{15\sqrt{17}}{4}} = \frac{15}{15 + \frac{15}{4}} \Rightarrow \frac{BI}{\frac{15\sqrt{17}}{4}} = \frac{4}{5}$$

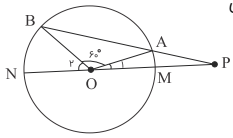
$$\Rightarrow BI = \frac{4}{5} \times \frac{15\sqrt{17}}{4} = 3\sqrt{17}$$

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

گام اول

الف) بار دیگر شکل را با جزئیات گفته شده رسم می کنیم:

$$PN = 3R, \quad \widehat{AB} = 60^\circ$$



ب) با توجه به این که $PN = 3R$ و $MN = 2R$ (قطر دایره) است، $PM = R$ به دست می آید. امتداد دو وتر از دایره رسم شده است بنابراین طبق روابط طولی در دایره رابطه $PA \times PB = PM \times PN$ برقرار است.

ج) در مثلث $\triangle OAB$ ، $OA = OB = R$ ، $\hat{O} = 60^\circ$ است پس این مثلث متساوی الاضلاع بوده و $AB = R$ است.

گام دوم

$$PN = 3R, PM = R, AB = R \Rightarrow PB = PA + R$$

$$PA \times PB = PM \times PN \Rightarrow PA(PA + R) = R(3R)$$

$$\xrightarrow{PA=x} \Rightarrow x^2 + xR = 3R^2 \Rightarrow x^2 + xR - 3R^2 = 0$$

$$\Delta = R^2 - 4(1)(-3R^2) = R^2 + 12R^2 = 13R^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-R + \sqrt{13}R}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{13} - 1)R \\ x_2 = \frac{-R - \sqrt{13}R}{2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{13} - 1)R \end{cases} \quad \text{غ ق ق غ}$$

بنابراین اندازه PA ، $\frac{1}{2}(\sqrt{13} - 1)$ برابر شعاع دایره است.

ابتدا شعاع دایره بزرگ را به دست می آوریم.

$$r = \frac{S}{p}, \quad p = 9$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9 \times 3 \times 2 \times 4} = 6\sqrt{6}$$

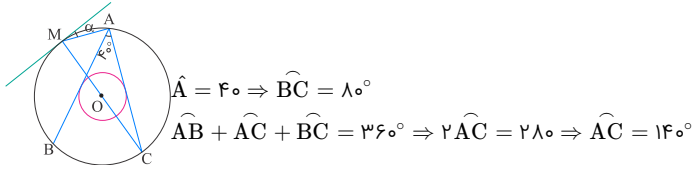
$$\Rightarrow r = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

دایره محاطی داخل مثلث کوچکتر، دقیقاً با همان نسبت تشابه دو مثلث با دایره بزرگتر متشابه است.

$$\frac{r'}{r} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{\frac{4}{3}\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \frac{r'}{\frac{2}{3}\sqrt{6}} = \frac{\frac{4}{3}\sqrt{6}}{4} \Rightarrow r' = \frac{4(\sqrt{6})^2}{9 \times 4} = \frac{4 \times 6}{9 \times 4} = \frac{16}{21}$$

$$\Rightarrow S = \pi r'^2 = \frac{256}{441}\pi$$

باتوجه به اینکه وترهای AB و AC بر دایره کوچک‌تر مماس‌اند، پس از O به یک فاصله هستند. بنابراین طول آن‌ها و اندازه کمان‌های $\widehat{AB}$ و $\widehat{AC}$ باهم برابر است.



$$\widehat{A} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 80^\circ$$

$$\widehat{AB} + \widehat{AC} + \widehat{BC} = 360^\circ \Rightarrow 2\widehat{AC} = 280^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 140^\circ$$

MC قطر دایره است، پس:

$$\widehat{AM} = 180^\circ - \widehat{AC} = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{1}{4}\widehat{AM} = \frac{1}{4} \times 40^\circ = 10^\circ$$

تالیفی حسین سعیدی

طول مماس‌های رسم‌شده از رأس‌های مثلث بر دایره‌های محاطی خارجی به صورت زیر به دست می‌آید:

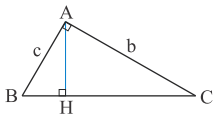
$$CA' + AC = P, \quad CB' + BC = P \Rightarrow CA' = P - AC, \quad CB' = P - BC$$

$$\Rightarrow A'B' = (P - AC) + (P - BC) = 2P - AC - BC$$

$$= (AB + AC + BC) - AC - BC = AB = 6$$

تالیفی محمد حسینی فرد

در مثلث قائم‌الزاویه می‌دانیم:



$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2}$$

ازطرفی به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای، می‌توان به رابطه زیر رسید:

$$(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc \Rightarrow b^2 + c^2 = (b + c)^2 - 2bc$$

درنتیجه:

$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{(b + c)^2 - 2bc}{b^2 c^2} \Rightarrow \frac{10}{64} = \frac{72 - 2bc}{b^2 c^2} \Rightarrow bc = 16$$

به جای حل معادله فوق می‌توان گزینه‌ها را جایگذاری کرد.

تالیفی حسین سعیدی

$$\text{ضلع مربع کوچک} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2} = 2$$

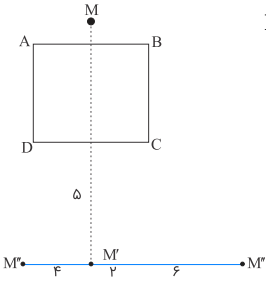
برای حساب کردن مساحت شکل حاصل می‌توانیم مساحت دو مربع بزرگ را باهم جمع کنیم و یک بار مساحت مربع کوچک را که دو بار حساب کرده‌ایم از آن کم کنیم.

$$S = 4^2 \times 2 - 2^2 = 32 - 4 = 28$$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

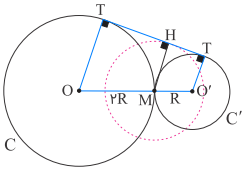
به ترتیب بازتاب می‌کنیم و به M'' می‌رسیم. سپس طول MM'' را حساب می‌کنیم:

$$MM'' = \sqrt{MM'^2 + M'M''^2} = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164}$$

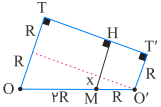


تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

شعاع دایرهٔ اولی را $۲R$ و دایرهٔ دومی را R می‌نامیم. مطابق شکل باید طول MH یعنی شعاع دایرهٔ جدید را بیابیم.



از تالس در دوزنقه استفاده می‌کنیم. از O' خطی موازی TT' رسم می‌کنیم. حال در مثلث به‌دست‌آمده تالس را می‌نویسیم:



$$\frac{x}{R} = \frac{R}{3R} \Rightarrow x = \frac{1}{3}R$$

$$MH = R + \frac{1}{3}R = \frac{4}{3}R$$

نسبت تجانس دو دایره، به نسبت شعاع آن‌ها است:

$$\frac{\frac{4}{3}R}{2R} = \frac{2}{3}$$

تالیفی حسین سعیدی

راه حل اول :

روش یافتن نقاط M و N به صورت زیر است:

ابتدا نقطه $A(3, 5)$ را نسبت به محور y ها بازتاب می‌دهیم تا نقطه $A_1(-3, 5)$ به دست آید. سپس A_1 را نسبت به محور x ها بازتاب می‌دهیم تا نقطه $A_2(-3, -5)$ به دست آید. حال معادله خط L گذرنده از A_2 و B را نوشته و با محور x ها قطع می‌دهیم تا مختصات نقطه N معلوم شود:

$$m = \frac{11 - (-5)}{9 - (-3)} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow{A_2(-3, -5) \in L} L: y + 5 = \frac{4}{3}(x + 3)$$

$$\xrightarrow{y=0} 5 = \frac{4}{3}(x + 3) \Rightarrow 15 = 4x + 12$$

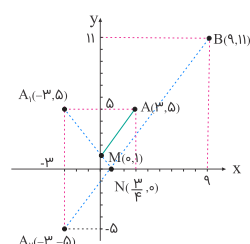
$$\Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow N = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$$

در ادامه، معادله خط L' گذرنده از N و A_1 را نوشته و با محور y ها قطع می‌دهیم تا مختصات نقطه M معلوم شود:

$$m = \frac{5 - 0}{-3 - \frac{3}{4}} = \frac{5}{-\frac{15}{4}} = -\frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow{N(\frac{3}{4}, 0) \in L'} L': y = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{3}{4}\right)$$

$$\xrightarrow{x=0} y = 1 \Rightarrow M(0, 1)$$



در پایان، طول پاره خط شکسته $AMNB$ را می‌یابیم:

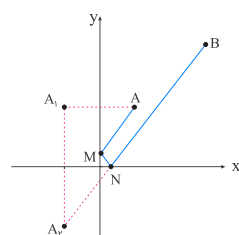
$$|AM| + |MN| + |NB| = \sqrt{(3-0)^2 + (5-1)^2} + \sqrt{\left(0 - \frac{3}{4}\right)^2 + (1-0)^2} + \sqrt{\left(9 - \frac{3}{4}\right)^2 + (11-0)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16} + \sqrt{\frac{9}{16} + 1} + \sqrt{\left(9 - \frac{3}{4}\right)^2 + (11-0)^2} = 5 + \frac{5}{4} + \frac{55}{4} = 20$$

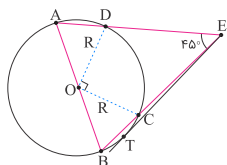
راه حل دوم:

اگر نقطه A را ابتدا نسبت به محور y ها قرینه کنیم، نقطه $A_1(-3, 5)$ به دست می‌آید و قرینه A_1 نسبت به محور x ها، $A_2(-3, -5)$ می‌شود. خط گذرنده از A_2 و B را با محور x ها قطع می‌دهیم تا نقطه N به دست آید. در نتیجه A_2B خطی راست می‌شود و برابر با کمترین طول $AMNB$ است.

پس:



$$|A_2B| = \sqrt{(9+3)^2 + (11+5)^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$$



$$۱) \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{r} = 45 \Rightarrow \frac{180 - \widehat{CD}}{r} = 45 \Rightarrow \widehat{CD} = 90^\circ$$

۲) خط مماس ET را رسم می‌کنیم.

$$۳) ED \times AE = (ET)^r = EC \times EB \Rightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{EB}{AE}, \quad E = 45^\circ \\ \Rightarrow \triangle EDC \sim \triangle EAB$$

$$۴) DC = \sqrt{R^r + R^r} = \sqrt{r}R \\ AB = 2R$$

$$\Rightarrow \frac{DC}{AB} = \frac{\sqrt{r}}{2}$$

$$\text{نسبت مساحت‌ها} = \left(\frac{DC}{AB}\right)^r = \frac{1}{2}$$

تألیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

نکته: اگر زاویه بین مماس مشترک‌های داخلی N باشد، داریم: $\sin \frac{N}{r} = \frac{R + R'}{OO'}$ و اگر زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی M باشد، داریم:

$$\sin \frac{M}{r} = \frac{R - R'}{OO'}$$

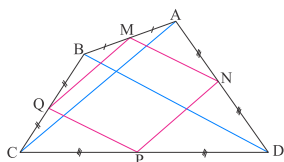
زاویه بین مماس مشترک‌های داخلی 90° است، پس:

$$\sin 45 = \frac{R + R'}{OO'} = \frac{\sqrt{r}}{2}$$

زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی 60° است، پس:

$$\sin 30 = \frac{R - R'}{OO'} = \frac{1}{2} \\ \left\{ \begin{array}{l} R + R' = \frac{\sqrt{r}}{2} OO' \\ R - R' = \frac{1}{2} OO' \end{array} \right. \xrightarrow{+} 2R = \frac{\sqrt{r} + 1}{2} OO' \Rightarrow R = \frac{\sqrt{r} + 1}{4} OO'$$

تألیفی حسین سعیدی



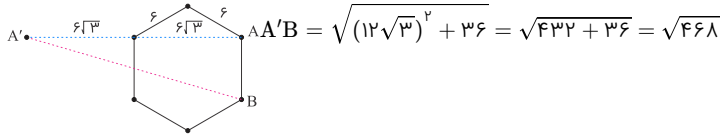
واضح است که M Q و N P به ترتیب در مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ADC$ میان‌خطاند، پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} MQ = \frac{AC}{2}, MQ \parallel AC \\ NP = \frac{AC}{2}, NP \parallel AC \end{array} \right\} \Rightarrow NP = MQ = \frac{AC}{2}, MQ \parallel NP$$

به عبارتی می‌توان گفت QP تصویر پاره خط MN در انتقال با بردار $\frac{\overrightarrow{AC}}{2}$ است. توجه کنید که NP نیز تصویر MQ در انتقال با بردار $\frac{\overrightarrow{BD}}{2}$ است که بین $\frac{\overrightarrow{AC}}{2}$ ، $\frac{\overrightarrow{BD}}{2}$ در گزینه‌ها است.

تألیفی صبا مهدوی

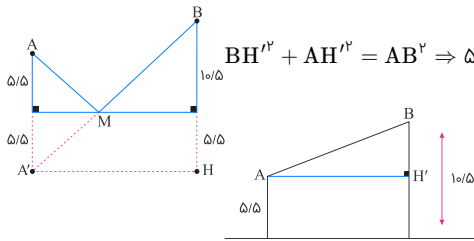
باید A را نسبت به ضلع موردنظر بازتاب کرده و فاصله A' را تا B به دست آوریم.



تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مقید

طبق راه حل هرون A را نسبت به خط بازتاب می‌دهیم. برای مثلث $\triangle A'BH$ فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$A'H^2 + BH^2 = A'B^2 \Rightarrow A'H^2 + 16^2 = 20^2 \\ \Rightarrow A'H = 12$$



تالیفی حسین سعیدی

پس فاصله افقی A و B برابر ۱۲ می‌باشد. حال برای مثلث ABH' فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$BH'^2 + AH'^2 = AB^2 \Rightarrow 5^2 + 12^2 = AB^2 \Rightarrow AB = 13$$

می‌دانیم یک دوزنقه فقط در حالی دارای محور تقارن است که متساوی‌الساقین باشد که در این صورت محور تقارن همان عمودمنصف مشترک دو قاعده است.
درنتیجه دوزنقه محیطی و متساوی‌الساقین (محاطی) است که می‌دانیم:

میانگین حسابی دو قاعده $\times$ میانگین هندسی دو قاعده = S

$$\Rightarrow S = \sqrt{9 \times 4} \times \frac{9 + 4}{2} = 39$$

تالیفی مجید قهرمانی

ابتدا در مثلث ABC قضیهٔ کسینوس ها را می‌نویسیم:

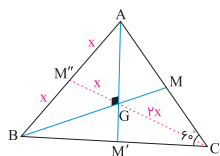
$$\begin{aligned} \triangle ABC : AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos 60^\circ \\ \Rightarrow AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2 \times 16 \times \frac{1}{2} \Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 - 16 \\ \Rightarrow AC^2 + BC^2 &= AB^2 + 16 \quad (1) \end{aligned}$$

حال طبق قضیهٔ میانه‌ها داریم:

$$\begin{aligned} AC^2 + BC^2 &= 2CM''^2 + \frac{AB^2}{2} \xrightarrow{(1)} AB^2 + 16 = 2CM''^2 + \frac{AB^2}{2} \\ \Rightarrow \frac{AB^2}{2} + 16 &= 2CM''^2 \end{aligned}$$

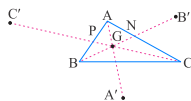
در مثلث AGB، GM'' میانهٔ وارد بر وتر است، پس منصف آن است، یعنی $AM'' = BM'' = GM'' = x$ ، ازطرفی می‌دانیم در هر مثلث، میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند؛ پس $CM'' = 3x$ حال داریم:

$$\begin{aligned} \frac{(2x)^2}{2} + 16 &= 2(3x)^2 \Rightarrow 2x^2 + 16 = 18x^2 \\ \Rightarrow 16 &= 16x^2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 2x = 2 \end{aligned}$$



تالیفی نرگس کارگر

A' مجانس A به مرکز G و نسبت $k = -2$ است، پس:



$$A'G = 2AG \Rightarrow AA' = 3AG$$

ازطرفی میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند، یعنی $AG = \frac{2}{3}AM$. بنابراین $AA' = 2AM$ و به طریق مشابه $BB' = 2BN$ و $CC' = 2CP$. می‌دانیم مجموع مربعات میانه‌های مثلث، $\frac{3}{4}$ مجموع مربعات اضلاع آن است.

$$AM^2 + BN^2 + CP^2 = \frac{3}{4}(\Delta^2 + \Gamma^2 + \Lambda^2) = 103/4$$

$$AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 = 4(AM^2 + BN^2 + CP^2) = 412$$

تالیفی حسین سعیدی

طبق قضیهٔ سینوس ها داریم:

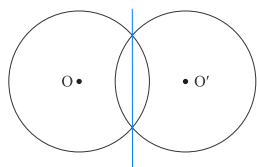
$$2R = \frac{a}{\sin \hat{A}} \Rightarrow rR^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \hat{A}} = \frac{a^2}{1 - \cos^2 \hat{A}} \Rightarrow a^2 = rR^2(1 - \cos^2 \hat{A})$$

به طریق مشابه: $b^2 = rR^2(1 - \cos^2 \hat{B})$

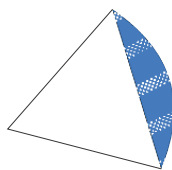
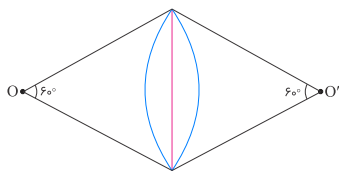
$$\begin{aligned} \frac{a^2 - b^2}{\cos^2 \hat{B} - \cos^2 \hat{A}} &= \frac{rR^2 - rR^2 \cos^2 \hat{A} - (rR^2 - rR^2 \cos^2 \hat{B})}{\cos^2 \hat{B} - \cos^2 \hat{A}} \\ &= \frac{rR^2(\cos^2 \hat{B} - \cos^2 \hat{A})}{\cos^2 \hat{B} - \cos^2 \hat{A}} = rR^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\cos^2 \hat{B} - \cos^2 \hat{A}}} = 2R = \text{قطر دایرهٔ محیطی} \end{aligned}$$

تالیفی حسین سعیدی

اگر مساحت دو دایره را جمع کنیم و مساحت قسمت مشترک را کم کنیم، مساحت شکل حاصل می‌شود؛ چون قسمت وسط دو بار شمرده شده است.



از O' و A به B وصل می‌کنیم. اگر ما مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را از مساحت قطاع کم کنیم، مساحت هاشورخورده به دست می‌آید.



$$\left. \begin{aligned} S_{\text{دایره}} &= 6 \times 6 \times \pi = 36\pi \\ S_{\text{مثلث}} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 \times 6 \times \frac{1}{4} = 9\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\text{هاشورخورده}} = \frac{36\pi}{6} - 9\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت خواسته شده} = \underbrace{72\pi}_{\text{جمع مساحت دو دایره}} - \underbrace{2 \times (6\pi - 9\sqrt{3})}_{\text{دو برابر مساحت هاشورخورده}} = 72\pi - 12\pi + 36\sqrt{3} = 60\pi + 36\sqrt{3}$$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

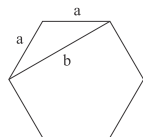
فرض کنیم $\hat{A}CB = \alpha$. بنا به زوایای متقابل به رأس، داریم $\hat{D}CE = \alpha$. حال قضیه سینوس ها را در دو مثلث ABC و CDE می‌نویسیم:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{AC}{\sin 30^\circ} &= \frac{AB}{\sin \alpha} \\ \frac{CD}{\sin 12^\circ} &= \frac{DE}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{AC}{CD} \times \frac{\sin 12^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{DE} \times \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\xrightarrow{AC=CD} \frac{AB}{DE} = \frac{\sin 12^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

تالیفی میثم امین

اندازهٔ ضلع شش‌ضلعی منتظم اولیه را a در نظر می‌گیریم. هر زاویهٔ داخلی شش‌ضلعی منتظم برابر 120° است. اندازهٔ قطر کوچک شش‌ضلعی منتظم اولیه را محاسبه می‌کنیم.



$$b^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 120^\circ$$

$$= 2a^2 - 2a^2 \left(-\frac{1}{2}\right) = 2a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow b = a\sqrt{3}$$

می‌دانیم مساحت یک شش‌ضلعی منتظم به ضلع a از رابطهٔ $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ محاسبه می‌شود، پس نسبت مساحت دو شش‌ضلعی برابر است با:

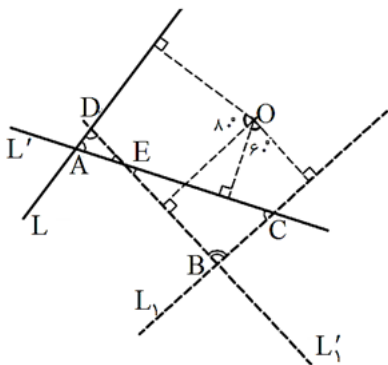
$$\frac{S_{\text{شش ضلعی منتظم جدید}}}{S_{\text{شش ضلعی منتظم اولیه}}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}(a\sqrt{3})^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{3a^2}{a^2} = 3$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

می‌دانیم زاویه بین دو خط دوران یافته برابر با زاویه دوران است.

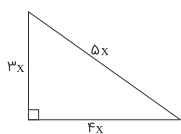
پس مطابق شکل، زاویه C برابر با 60° و زاویه D برابر با 80° خواهد بود. باتوجه به شکل زیر داریم:

$$\triangle ADE, \triangle BCE : \cancel{A_{80^\circ}} + \cancel{D_{80^\circ}} + \cancel{E} = \cancel{B} + \cancel{C_{60^\circ}} + \cancel{E} \\ \Rightarrow \hat{B} = 80^\circ + 80^\circ - 60^\circ = 100^\circ$$



مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

اضلاع این مثلث، $3x$ ، $4x$ و $5x$ هستند.



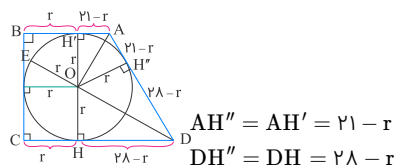
بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی در مثلث قائم‌الزاویه، روبه‌رو به زاویه قائمه است و اندازه شعاع آن برابر نصف محیط می‌باشد.

$$r_a = P = \frac{2F}{\gamma} = 12$$

تألیفی محمد حسینی فرد

این فاصله برابر DE است.

چون ۲ مماس رسم شده از یک نقطه بر دایره باهم برابرند:



$$AH'' = AH' = 11 - r$$

$$DH'' = DH = 14 - r$$

ازطرفی DO و AO نیمساز می‌باشند، پس $\hat{AOD} = 90^\circ$. درنتیجه $\hat{AOD}$ قائم‌الزاویه است، پس:

$$OH'' = AH'' \times DH'' \Rightarrow r^2 = (11 - r)(14 - r) = 11 \times 14 + r^2 - 49r \Rightarrow 49r = 11 \times 14 \Rightarrow r = 12$$

طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$OH^2 + HD^2 = OD^2 \Rightarrow r^2 + (14 - r)^2 = 12^2 + 16^2 = 20^2 \Rightarrow OD = 20 \\ \Rightarrow ED = 20 + r = 32$$

تألیفی صبا مهدوی

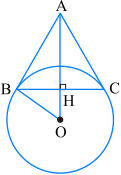
فرض کنیم A' مجانس A تحت این تجانس باشد:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{V} &= \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OA'} = (۷, ۱) - (۳, -۱) \\ &\Rightarrow \overrightarrow{OA'} = (۴, ۲)\end{aligned}$$

اگر ضرب تجانس K باشد، می‌دانیم:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA'} &= K(\overrightarrow{OA}) \\ (۴, ۲) &= K(۲, ۱) \Rightarrow K = ۲\end{aligned}$$

تالیفی مجید قهرمانی

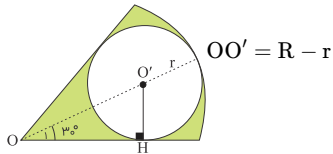


چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس ارتفاع AH ، میانه نیز بوده و $BH = ۳$ است.

$$\begin{aligned}\triangle ABH : AB^2 &= AH^2 + BH^2 = ۱۶ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow AB = ۵ \\ \left. \begin{aligned} \angle AHB &= \angle ABO = ۹۰^\circ \\ \angle OAB &\text{ مشترک} \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle OAB \Rightarrow \frac{BH}{OB} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{۳}{R} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow R = \frac{۱۵}{۴} = ۳\frac{۳}{۴}\end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

شعاع قطاع را R و شعاع دایره را r می‌نامیم.

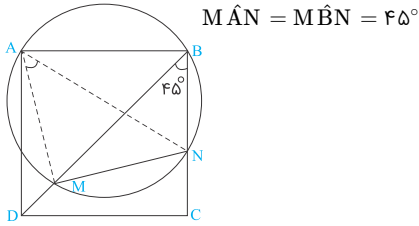


در مثلث $\triangle OHO'$:

$$\begin{aligned}\hat{O}_1 = ۳۰^\circ &\Rightarrow O'H = \frac{1}{2}OO' \Rightarrow r = \frac{1}{2}(R - r) \\ &\Rightarrow \frac{۳}{2}r = \frac{1}{2}R \Rightarrow r = \frac{1}{۳}R \\ S_{\text{رنگی}} &= S_{\text{قطاع}} - S_{\text{دایره}} \\ &= \frac{۶۰}{۳۶۰}\pi R^2 - \pi r^2 = \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{1}{9}\pi R^2 = \frac{1}{۱۸}\pi R^2 \\ &\Rightarrow \frac{S_{\text{رنگی}}}{\pi R^2} = \frac{1}{۱۸}\end{aligned}$$

تالیفی حسین سعیدی

در چهار ضلعی $AMNB$ زوایای AMN و ABN قائمه هستند. پس جمع زوایای روبه‌رو، ۱۸۰° است و چهار ضلعی محاطی است. اگر دایرهٔ گذرنده از رأس‌های این چهار ضلعی را رسم کنیم، زوایای MAN و MBN رو به یک کمان هستند و برابرند. زاویهٔ MBN در مربع از رسم قطر به وجود آمده و ۴۵° است. پس:



تألیفی محمد حسینی فرد

زوایای B و C مکمل یکدیگر هستند. در مثلث ABC چون $AB > BC$ است، پس $\hat{C}_1$ از $\hat{A}_1$ و $\hat{C}_2$ بزرگ‌تر می‌باشد.

$$\left. \begin{aligned} \hat{C}_1 + \hat{C}_2 &= ۱۲۰^\circ \\ \hat{C}_1 - \hat{C}_2 &= ۳۰^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{C}_1 = ۷۵^\circ, \hat{C}_2 = ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_2 = ۴۵^\circ$$

طبق قضیهٔ سینوس‌ها:

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}_1} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲۴}}{\sqrt{۲}} = \frac{AC}{\sqrt{۳}} \Rightarrow AC = ۶$$

تألیفی حسین سعیدی

$$۲p = ۱۰ + ۷ + ۵ = ۲۲ \Rightarrow p = ۱۱$$

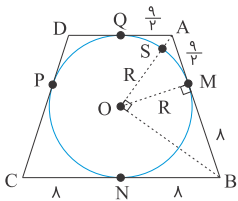
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{۱۱ \times ۶ \times ۴ \times ۱} = ۲\sqrt{۶۶}$$

می‌دانیم بزرگ‌ترین ارتفاع مثلث، وارد بر کوچک‌ترین ضلع آن است. حال اگر طول این ارتفاع را h فرض کنیم، داریم:

$$S = \frac{1}{2} (\omega) (h) \xrightarrow{S=۲\sqrt{۶۶}} \frac{\omega}{2} h = ۲\sqrt{۶۶} \Rightarrow h = \frac{۴\sqrt{۶۶}}{\omega}$$

تألیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

می‌دانیم طول مماس‌هایی که از یک نقطه بر یک دایره رسم می‌شوند، یکسان است؛ پس $AM = AQ = \frac{9}{p}$ و $BM = BN = \lambda$. ازطرف‌دیگر نیمسازهای زاویه‌های A و B برهم عمودند، پس $\hat{AOB} = ۹۰^\circ$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB طبق روابط طولی، داریم:



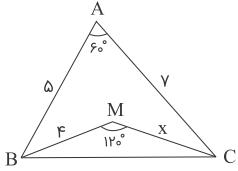
$$OM^2 = AM \cdot MB \Rightarrow R^2 = \left(\frac{9}{p}\right)(\lambda) = ۳۶ \Rightarrow R = ۶$$

$$OA^2 = AM \cdot AB = \left(\frac{9}{p}\right)\left(\frac{۲۵}{p}\right) \Rightarrow OA = \frac{۳ \times ۵}{p} = \frac{۱۵}{p}$$

نزدیک‌ترین نقطهٔ دایرهٔ محاطی به رأس A ، نقطهٔ S است و داریم:

$$SA = OA - OS = \frac{۱۵}{p} - ۶ = \frac{۳}{p}$$

طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث‌های ABC و MBC، داریم:



$$\left. \begin{aligned} BC^2 &= 5^2 + 7^2 - 2(5)(7)(\cos 60^\circ) \\ BC^2 &= 4^2 + x^2 - 2(4)(x)(\cos 120^\circ) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 25 + 49 - 35 = 16 + x^2 + 4x$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 23 = 0 \xrightarrow{x > 0} x = -2 + \sqrt{27} \Rightarrow x + 2 = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

باتوجه‌به اینکه مثلث BCM قائم‌الزاویه است:

$$BC \times BM = CM \times BH = 2S_{\Delta}$$

بنابراین به‌جای $BC \times BM$ می‌توانیم $CM \times BH$ را به دست آوریم:

$$\hat{A} = 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{1}{2}AB \xrightarrow{AB=6} BH = 3$$

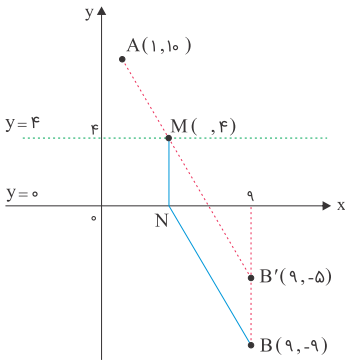
همچنین از مبحث روابط طولی دایره:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AM \times AC \Rightarrow 6^2 = 3 \times (3 + CM) \\ \Rightarrow CM &= 9 \\ \Rightarrow CM \times BH &= 9 \times 3 = 27 \end{aligned}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۵

چون پاره‌خط MN بر دو خط $y = 4$ و $y = 0$ (محور x‌ها) عمود است، روش یافتن نقطهٔ M به این صورت است:

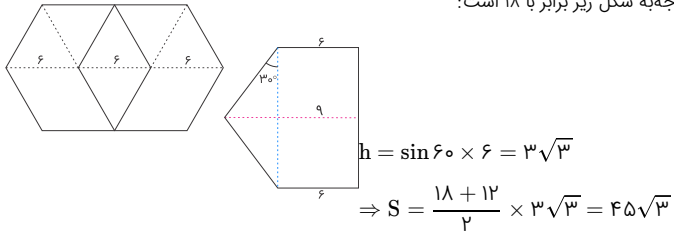
ابتدا نقطهٔ B را ۴ واحد (به‌اندازهٔ فاصلهٔ بین دو خط $y = 0$ و $y = 4$) به بالا انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ $B'(9, -5)$ به دست آید، سپس پاره‌خط AB' را رسم می‌کنیم تا خط $y = 4$ را در M قطع کند. حال داریم:



$$\begin{aligned} AMNB \text{ طول پاره‌خط شکسته} &= AM + MN + \underbrace{NB}_{MB'} = AB' + MN \\ &= \sqrt{(9-1)^2 + (-5-10)^2} + 4 = \sqrt{1^2 + 15^2} + 4 = 17 + 4 = 21 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

می‌توانیم شکل حاصل را دو دوزنقه روی هم در نظر بگیریم. قاعده بالای دوزنقه برابر با ۱۲ و قاعده پایین باتوجه به شکل زیر برابر با ۱۸ است:



همچنین ارتفاع دوزنقه برابر است با

حال مساحت دو دوزنقه را می‌خواهیم:

$$S \times 2 = 45\sqrt{3} \times 2 = 90\sqrt{3}$$

تألیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

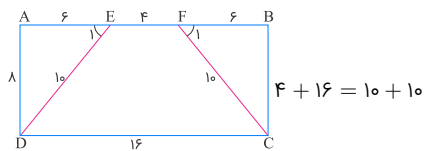
$$S_{\text{مستطیل}} = AD \times AB \Rightarrow 12\lambda = AD \times 16 \Rightarrow AD = \lambda$$

طول ساق‌های دوزنقه در صورتی کمترین مقدار است که $\hat{E}_1 = \hat{F}_1$ باشد، پس مثلث‌های $\triangle ADE$ و $\triangle BFC$ همنهشت‌اند. در نتیجه:

$$AE = BF = 6$$

در مثلث ADE داریم:

$$AD^2 + AE^2 = DE^2 \Rightarrow \lambda^2 + 6^2 = DE^2 \Rightarrow DE = CF = 10$$



می‌دانیم دوزنقه‌های متساوی‌الساقین محاطی‌اند. همچنین مجموع اضلاع روبه‌رو باهم برابر است، پس محیطی هم می‌باشد.

حال شعاع دایره محاطی را می‌یابیم:

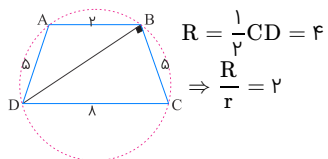
$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2} (4 + 16) \times \lambda}{\frac{1}{2} (4 + 16 + 10 + 10)} = \frac{160}{40} = 4$$

تألیفی حسین سعیدی

می‌دانیم در دوزنقه‌ای که هم محاطی و هم محیطی است، قطر دایره محاطی واسطه هندسی بین قاعده‌ها است، پس:

$$(2r)^2 = 2 \times \lambda \Rightarrow 2r = 4 \Rightarrow r = 2$$

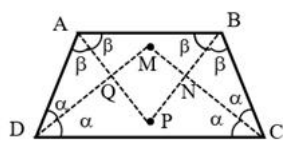
باتوجه به اینکه زاویه $\widehat{CBD}$ قائمه است، پس CD قطر دایره محیطی دوزنقه است پس شعاع آن نصف CD است.



تألیفی حسین سعیدی

گام اول

الف) نیمسازهای داخلی در دوزنقه متساوی الساقین را رسم می‌کنیم:



ب) دو قاعده AB و CD باهم موازی هستند؛ بنابراین می‌توان نوشت:

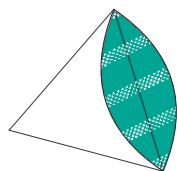
$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ \text{مورب BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad \left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ \text{مورب AD} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$$

گام دوم

$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

از رابطه $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ نیز همین نتیجه حاصل می‌شود. حالا اگر دو مثلث $\triangle A\hat{Q}D$ و $\triangle B\hat{N}C$ را در نظر بگیریم می‌توان نتیجه گرفت $\hat{N} = \hat{Q} = 90^\circ$. با توجه به اطلاعات داده شده نتیجه دیگری حاصل نشد بنابراین چهارضلعی MNPQ که از برخورد نیمسازهای داخلی دوزنقه متساوی الساقین تشکیل می‌شود یک چهارضلعی محاطی است.

باید کمان فرورفته را به حالت اول برگردانیم. حال تفاوت مساحت‌ها را می‌خواهیم. برای به دست آوردن مساحت قسمت رنگی باید مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را از مساحت قطاع کم کنیم و سپس دو برابر کنیم.



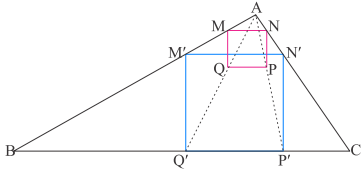
$$\left. \begin{array}{l} S_{\text{دایره}} = 6^2 \pi = 36\pi \\ S_{\text{مثلث}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 \times 6 \times \frac{1}{2} = 9\sqrt{3} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{36\pi}{6} - 9\sqrt{3} = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

توجه کنید که مساحت قطاع، $\frac{1}{6}$ مساحت دایره است.

حال ما دو برابر این مقدار را می‌خواهیم که برابر است با:

$$2 \times (6\pi - 9\sqrt{3}) = 12\pi - 18\sqrt{3}$$

نقاط M و N را روی AB و AC چنان انتخاب می‌کنیم که $MN \parallel BC$ و مربع MNPQ را می‌سازیم. AP و AQ را امتداد می‌دهیم تا BC را در P' و Q' قطع کنند. از P' و Q' بر BC عمود می‌کنیم تا AC و AB را در N' و M' قطع کنند. حال داریم:



$$\left. \begin{aligned} \triangle AM'Q' : MQ \parallel M'Q' &\Rightarrow \frac{AM}{AM'} = \frac{AQ}{AQ'} \\ \triangle AQ'P' : QP \parallel Q'P' &\Rightarrow \frac{AQ}{AQ'} = \frac{AP}{AP'} \\ \triangle AP'N' : PN \parallel P'N' &\Rightarrow \frac{AP}{AP'} = \frac{AN}{AN'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AM}{AM'} = \frac{AQ}{AQ'} = \frac{AP}{AP'} = \frac{AN}{AN'}$$

پس چهار ضلعی $M'N'P'Q'$ مجانس چهار ضلعی MNPQ است و چون MNPQ مربع است، $M'N'P'Q'$ هم مربع است (بدیهی است که اگر $M'N'$ را به موازات BC بالاتر یا پایین‌تر ببریم، چهار ضلعی $M'N'P'Q'$ دیگر مربع نخواهد بود، پس $M'N'P'Q'$ تنها جواب مسئله است).

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

بررسی الف)

$$R = ۳, R' = ۲, OO' = ۱ \\ OO' = |R - R'| \Rightarrow C, C' \text{ مماس داخل‌اند}$$

بررسی ب)

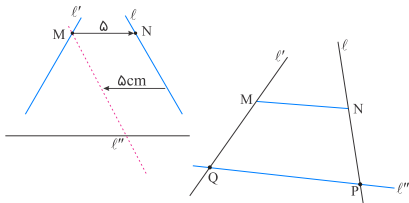
$$R' = ۲, R'' = ۴, O'O'' = ۶ \\ O'O'' = R' + R'' \Rightarrow C', C'' \text{ مماس خارج‌اند}$$

بررسی پ)

$$R = ۳, R'' = ۴, OO'' = ۵ \\ |R - R''| < OO'' < R + R'' \\ \Rightarrow C, C'' \text{ متقاطع‌اند و دارای ۲ مماس مشترک می‌باشند}$$

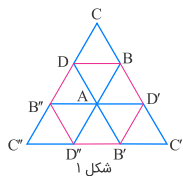
تالیفی حسین سعیدی

خط ℓ را با برداری به طول ۵cm و موازی ℓ'' انتقال می‌دهیم تا ℓ' را در M قطع کند. حال نقطه M را با برداری خلاف جهت قبلی انتقال می‌دهیم تا N روی ℓ پدید آید. دوزنقه MNPQ موردنظر است. از تبدیل انتقال استفاده کرده‌ایم.



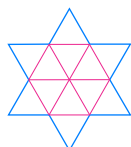
تالیفی حسین سعیدی

شکل حاصل چنین خواهد بود:

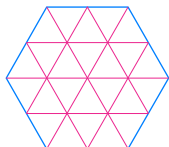


شکل ۱

همان‌طور که مشاهده می‌شود این شکل از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است. به کمک بازتاب نسبت به BD' ، $B'D''$ و $B''D$ ، بدون تغییر محیط مساحت این شکل را افزایش می‌دهیم، شکل تبدیل‌یافته شکل ۲ خواهد بود. اما این شکل همچنان می‌تواند افزایش مساحت داشته باشد. به کمک بازتاب شکل ۲ را به شکل ۳ تبدیل می‌کنیم، همان‌طور که مشاهده می‌شود شکل نهایی از ۲۴ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده پس خواهیم داشت:



شکل ۲



شکل ۳

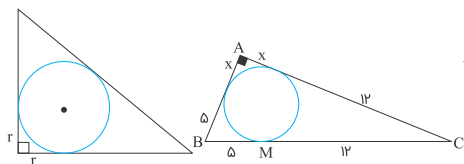
$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{24S}{6S} = 4$$

تالیفی صبا مهدوی

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، طول مماسی که از رأس قائمه بر دایرهٔ محاطی داخلی رسم می‌شود، با شعاع دایره برابر است.

اگر شعاع دایره را x فرض کنیم، باتوجه‌به پاره‌خط‌های برابر داریم:

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC^2 \Rightarrow (5+x)^2 + (x+12)^2 = 17^2 \\ \Rightarrow 2x^2 + 34x - 120 &= 0 \Rightarrow x^2 + 17x - 60 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 20 \end{cases} \times \end{aligned}$$



تالیفی محمد حسینی فرد

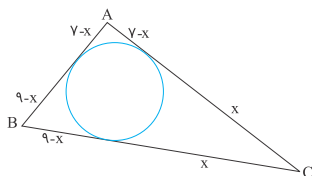
نکته: مساحت n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R ، به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{1}{2} n R^2 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

با استفاده از رابطهٔ ۱۲ ضلعی منتظم محاط در دایره، داریم:

$$S = \frac{1}{2} \times 12 \times (1)^2 \times \sin 30^\circ = 3$$

تالیفی محمد حسینی فرد

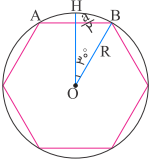


مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه بر دایره برابرند. همچنین طول ضلع AB برابر ۴ است. پس:

$$7 - x + 9 - x = 4 \Rightarrow 16 - 2x = 4 \Rightarrow x = 6$$

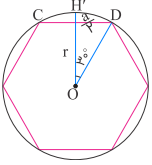
تالیفی محمد حسینی فرد

در مثلث $\triangle OBH$ داریم:



$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{R} \Rightarrow R = a$$

در مثلث $\triangle ODH'$ داریم:



$$\tan 30^\circ = \frac{DH'}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{a}{2}}{r} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

مساحت بین دو دایره برابر است با:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi a^2 - \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}\pi a^2$$

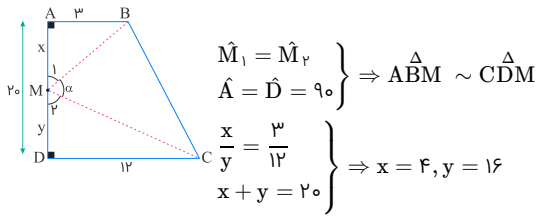
از طرفی مساحت شش ضلعی برابر است با مساحت شش مثلث متساوی الاضلاع:

$$S_{\text{شش ضلعی}} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$\frac{S_{\text{محصور}}}{S_{\text{شش ضلعی}}} = \frac{\frac{1}{4}\pi a^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

تألیفی حسین سعیدی

وقتی محیط مثلث ΔBMC کمترین مقدار را دارد، پس $BM + MC$ کوتاهترین مسیر است.
در نتیجه:



به کمک فیثاغورس طول BM و CM را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \text{AM}^\vee + \text{AB}^\vee &= \text{BM}^\vee \Rightarrow \text{BM} = \wp \\ \text{DM}^\vee + \text{CD}^\vee &= \text{CM}^\vee \Rightarrow \text{CM} = \mathfrak{r}_\circ \end{aligned}$$

حال مساحت مثلث $\hat{BMC}$ را می‌یابیم که به کمک آن سینوس زاویه $\hat{BMC}$ را به دست بیاوریم.

$$\begin{aligned} S_{BMC}^{\Delta} &= S_{ABCD} - S_{ABM}^{\Delta} - S_{CDM}^{\Delta} \\ &= \frac{1}{\nu}(\psi + \nu) \times \nu \circ - \frac{1}{\nu} \times \psi \times \mathbf{F} - \frac{1}{\nu} \times \nu \times \nu \mathbf{F} \\ &= \lambda \circ - \mathbf{F} - \mathbf{F} \mathbf{F} = \mathbf{F} \mathbf{F} \\ S_{BMC}^{\Delta} &= \frac{1}{\nu} \mathbf{B} \mathbf{M} \times \mathbf{C} \mathbf{M} \times \sin \alpha \\ \Rightarrow \mathbf{F} \mathbf{F} &= \frac{1}{\nu} \times \mathbf{M} \times \nu \circ \times \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \circ / \mathbf{F} \mathbf{F} \end{aligned}$$

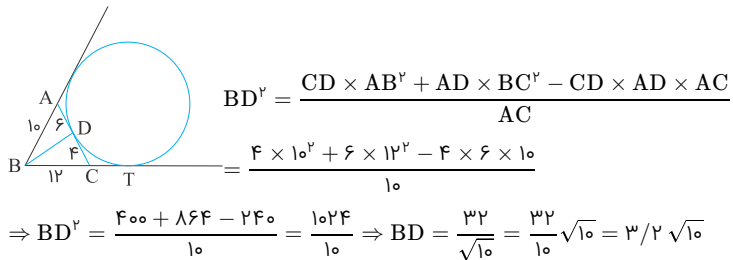
تالیفی حسین سعیدی

$$P = \frac{a + b + c}{r} = \frac{12 + 10 + 10}{r} = 16$$

می دانیم:

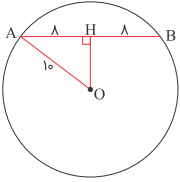
$$\begin{aligned} \text{BT} &= \text{P} \xrightarrow{-\mathbf{a}} \text{BT} - \mathbf{a} = \text{P} - \mathbf{a} \\ \frac{\text{BT} - \mathbf{a} = \text{CT}}{\text{CT} = \text{CD}} &\rightarrow \text{CD} = \text{P} - \mathbf{a} = \mathbf{1}\mathcal{E} - \mathbf{1}\mathcal{F} = \mathbf{F} \\ \text{AD} &= \text{AC} - \text{CD} = \mathbf{1}\mathbf{o} - \mathbf{F} = \mathcal{E} \end{aligned}$$

حال بنا به قضیه استوارت داریم:



تالیفی میثم امین

فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر AB را به دست می‌آوریم:



$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow OH = 8$$

پس نقطهٔ H همواره روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۶ یا قطر ۱۲ واقع است.

تالیفی سیامک شهبازی زاده

زاویهٔ C محاطی است، بنابراین:

$$\widehat{BAD} = 2 \times 50^\circ = 100^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 80^\circ$$

ازطرفی:

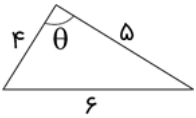
$$BC = AB \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{AD} = 180^\circ - (2 \times 80^\circ) = 20^\circ$$

بنابراین:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2} = \frac{80^\circ - 20^\circ}{2} = 30^\circ$$

تالیفی سیامک شهبازی زاده

ابتدا به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها یک زاویهٔ مثلث را به دست می‌آوریم.



$$6^2 = 5^2 + 4^2 - 2(5)(4) \cos \theta \Rightarrow 36 = 25 + 16 - 40 \cos \theta \Rightarrow -5 = -40 \cos \theta$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$S = \frac{1}{2}(4)(5) \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{5\sqrt{63}}{4}$$

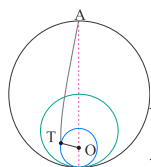
مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۴

طبق رابطهٔ سینوس‌ها در مثلث داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \\ a &= (2b^2 - 3) \times \frac{\sin A}{\sin B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 = (2b^2 - 3) \times \frac{2}{b}$$

$$\Rightarrow 2b^2 - 3 = b \Rightarrow 2b^2 - b - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 \Rightarrow \begin{cases} b = -1 & \text{غ.ق.ق} \\ b = \frac{3}{2} & \checkmark \end{cases}$$

تالیفی نرگس کارگر



اگر شعاع دایره کوچک را r در نظر بگیریم، شعاع دایره متوسط r' و شعاع دایره بزرگتر r'' است، بنابراین داریم: $AO = r'' + r' + r = r''$

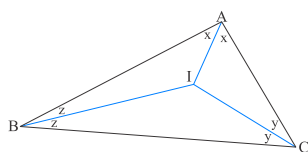
$$\triangle AOT; AO' = TO' + AT' \Rightarrow (r'')^2 = r'^2 + AT'^2 \Rightarrow AT = \sqrt{r''^2 - r'^2}$$

$$\triangle AOT : \sin \hat{O} = \frac{AT}{AO} = \frac{\sqrt{r''^2 - r'^2}}{r''}$$

$$S_{TOO'} = \frac{1}{2} \times r \times r \times \sin \hat{O} \Rightarrow \frac{1}{2} r^2 \sin \hat{O} = \frac{1}{2} r'^2 \times \frac{\sqrt{r''^2 - r'^2}}{r''} \Rightarrow r = r'$$

$$\text{محیط دایره متوسط} = 2\pi(r') = 2\pi r$$

تالیفی نرگس کارگر



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC : x + y + z = 180^\circ \\ \triangle BIC : z + \hat{BIC} + y = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{BIC} = 90^\circ + x \quad (I)$$

باتوجه به صورت سؤال:

$$BC = \frac{IB \cdot IC}{IA} \Rightarrow \frac{BC}{IC} = \frac{IB}{IA}$$

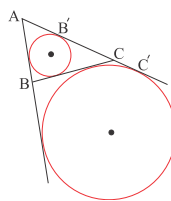
از قضیه سینوس ها در مثلث BIA داریم:

$$\frac{IB}{IA} = \frac{\sin x}{\sin z}$$

و از قضیه سینوس ها در مثلث BIC داریم:

$$\begin{aligned} \frac{BC}{IC} &= \frac{\sin \hat{BIC}}{\sin z} \\ \Rightarrow \frac{\sin x}{\sin z} &= \frac{\sin \hat{BIC}}{\sin z} \Rightarrow \sin \hat{BIC} = \sin x \\ \xrightarrow{(I)} \sin(90^\circ + x) &= \sin x \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow \hat{x} = 45^\circ \\ \Rightarrow \hat{A} &= 2x = 90^\circ \end{aligned}$$

تالیفی صبا مهدوی



$$AB' = P - a = 3$$

$$r_a = \frac{S}{P - a} \Rightarrow r = \frac{S}{P} \Rightarrow S = 18$$

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow r = \frac{18}{P} \Rightarrow P = 9$$

$$\Rightarrow P - a = 9 - a = 3 \Rightarrow a = 6$$

$$B'C' = AC' - AB' = P - (P - a) = a = 6$$

طول مماسی که از A بر دایره محاطی داخلی و خارجی رسم شده است به ترتیب برابر $P - a$ و P می باشد. پس:

همچنین شعاع دایره محاطی خارجی روبه رو به رأس A به صورت زیر است:

تالیفی محمد حسینی فرد

برای استفاده از تساوی کمان‌ها، آن‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم تا در محاسبات ساده‌تر عمل کنیم:

$$\widehat{CD} = \widehat{DE} = x, \quad \widehat{BC} = \widehat{BF} = y$$

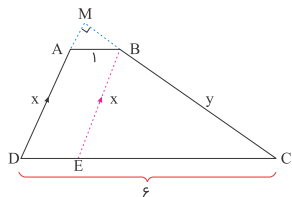
بنابراین:

$$\widehat{BCD} = 2 \times 70^\circ \Rightarrow x + y = 140^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EF} = 360^\circ - 2(x + y) = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{EF}}{2} = \frac{140^\circ - 80^\circ}{2} = 30^\circ$$

تالیفی سیامک شهبازی زاده



چون نیمسازها هم‌رس‌اند، پس چهار ضلعی محیطی است.

$$AB + CD = x + y = 7 \quad (1)$$

از B خطی موازی AD رسم می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} MD \perp MC \\ BE \parallel MD \end{array} \right\} \Rightarrow BE \perp BC$$

$$DE = AB = 1 \Rightarrow CE = 5, BE = AD = x$$

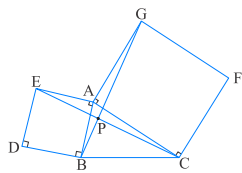
در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle BCE$ فیثاغورس می‌نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 5^2 \\ (1) \Rightarrow x + y = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + (7 - x)^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ x = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \text{کوچک‌ترین ساق}$$

تالیفی حسین سعیدی

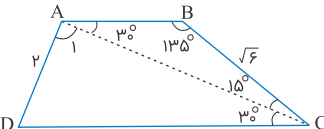
باتوجه به اینکه $AE = AB$ و $AG = AC$ و $\hat{BAE} = \hat{CAG} = 90^\circ$ ، در دوران به مرکز A و زاویه 90° ، B به E و C به G انتقال می‌یابد. چون دوران طولپا است: $BG = CE$.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{BPC} = 90^\circ \Rightarrow PB^2 + PC^2 = BC^2 \\ \hat{BPE} = 90^\circ \Rightarrow \hat{BPE} + \hat{BDE} = 180^\circ \Rightarrow \text{مخاطبی } BPE \text{ و } BDE \\ \hat{GPC} = 90^\circ \Rightarrow \hat{GPC} + \hat{GFC} = 180^\circ \Rightarrow \text{مخاطبی } GPC \text{ و } GFC \end{array} \right\} \Rightarrow \text{هر سه مورد درست است}$$

تالیفی صبا مهدوی

در مثلث ABC قضیهٔ سینوس ها را می‌نویسیم:



$$\frac{AC}{\sin 135^\circ} = \frac{BC}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AC = \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$

حال در مثلث ACD قضیهٔ سینوس ها را می‌نویسیم:

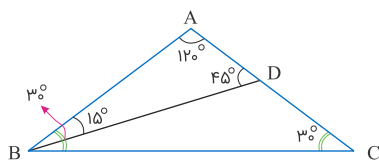
$$\frac{AD}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin \hat{D}} \Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin \hat{D}} \Rightarrow \sin \hat{D} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{D} = 60^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = 90^\circ \\ \hat{D} = 120^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = 30^\circ \end{cases}$$

در هر دو حالت مساحت مثلث را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 = 90^\circ &\Rightarrow S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \times AC = 2\sqrt{3} \\ \hat{A}_1 = 30^\circ &\Rightarrow S_{ACD} = \frac{1}{2} \times AD \times AC \times \sin 30^\circ = \sqrt{3} \end{aligned}$$

تالیفی حسین سعیدی

می‌دانیم بلندترین نیمساز بر کوتاه‌ترین ضلع وارد می‌شود و AB و AC کوتاه‌ترین اضلاع هستند.



طبق قضیهٔ سینوس ها در مثلث $\triangle ABD$:

$$\frac{BD}{\sin \hat{A}} = \frac{AB}{\sin \hat{D}} \Rightarrow \frac{BD}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{BD}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow BD = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

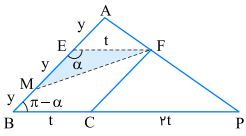
تالیفی حسین سعیدی

مساحت کل شش ضلعی برابر است با:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times 6 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 16 \times 6 = 24\sqrt{3}$$

مساحتی که به شکل اضافه می‌شود برابر با مساحت این شش ضلعی است.

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید



$$\begin{aligned} PC &= \frac{2}{3} PB \Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{2}{3} = \frac{2t}{3t} \Rightarrow \begin{cases} PC = 2t \\ BC = t \end{cases} \\ EF \parallel BP &\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BP} = \frac{t}{3t} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow \begin{cases} AE = y \\ AB = 3y \end{cases} \Rightarrow EB = 2y \Rightarrow EM = MB = y \end{aligned}$$

نسبت مساحت دو مثلث را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{S_{EFM}}{S_{ABP}} = \frac{\frac{1}{2} \times EF \times EM \times \sin \alpha}{\frac{1}{2} \times AB \times BP \times \sin(\pi - \alpha)} = \frac{EF \times EM}{AB \times BP} = \frac{t \times y}{3t \times 3y} = \frac{1}{9}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

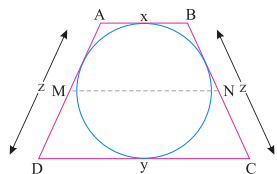
دوزنقه متساوی الساقین به قاعده‌های x و y و ساق‌های z را در نظر می‌گیریم. پس طول میان خط این دوزنقه (پاره‌خط واصل وسط‌های دو ساق) برابر است با $\frac{1}{2}(x + y)$. از طرف دیگر، می‌دانیم یک چهارضلعی، محیطی است هرگاه مجموع اضلاع روبه‌رو، یکسان باشد. بنابراین:

$$ABCD \text{ محیطی} \Leftrightarrow x + y = z + z$$

$$\Leftrightarrow x + y = 2z$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x + y) = z$$

$$\Leftrightarrow (\text{یک ساق}) = (\text{میان خط})$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) H محل برخورد امتداد ارتفاع‌های مثلث ABC است. یعنی اگر ارتفاع AH' را رسم کنیم، در امتداد AH قرار می‌گیرد.

ب) دو مثلث BHH' و BCH'' را در نظر می‌گیریم. در این دو مثلث $\hat{H}' = \hat{H}'' = 90^\circ$ است. پس مجموع دو زاویه دیگر نیز باید برابر 90° باشد. از این رابطه زاویه $\hat{AHD}$ را برحسب یکی از زوایای موجود در شکل به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\left. \begin{array}{l} \hat{BHH}' : \hat{H}' = 90^\circ \Rightarrow \hat{AHD} + \hat{B} = 90^\circ \\ \hat{BCH}'' : \hat{H}'' = 90^\circ \Rightarrow \hat{C} + \hat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{AHD} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{B} \Rightarrow \hat{AHD} = \hat{C}$$

در گزینه‌های داده‌شده، زاویه $\hat{C}$ وجود ندارد. بگردیم دنبال زاویه‌ای که اندازه آن با C برابر باشد. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{چهارضلعی محاطی } ADBC \Rightarrow \hat{ADB} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{ADB} + \hat{ADH} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{ADH} = \hat{C}$$

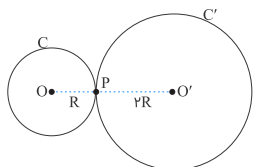
بنابراین زاویه $\hat{AHD}$ ، با زاویه $\hat{ADH}$ برابر است.

$$(6k)^2 + (8k)^2 = 10^2 \Rightarrow k = \frac{10}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\text{ارتفاع} = AB \times AC = \frac{6\left(\frac{1}{5}\right) \times 8\left(\frac{1}{5}\right)}{10} = \frac{6 \times 8}{100} = \frac{48}{100}$$



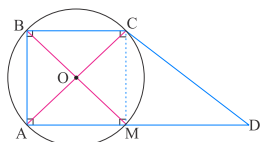
مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶



اولاً از آنجاکه نقطه P روی دایره C قرار دارد و در هر تجانس، مرکز تجانس ثابت می‌ماند، نقطه P روی دایره C' هم قرار دارد. حال مجانس O را O' می‌نامیم. باتوجه به اینکه $k = -2$ ، شعاع دایره C' دو برابر شعاع دایره C است و مطابق شکل، دو دایره بر هم مماس خارج‌اند.

تالیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

شکل مسئلہ را رسم می‌کنیم:



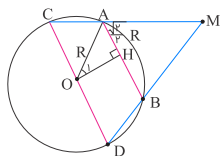
زاویه A و B قائمه هستند، پس AC و BM قطرهای دایره می‌باشند.

ABCM چار ضلعی، مستطیل، است و $AB = CM$.

طبق فرض مسئله $AD = 2AB$ ، پس $AD = 2CM$.

در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ACD$ می‌دانیم میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است و چون CM نصف AD می‌باشد، پس CM میانه است. ازطرفی CM ارتفاع نیز است، بنابراین مثلث ACD قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و زاویهٔ $\hat{D} = 45^\circ$ می‌باشد.

تالیفی حسین سعیدی



$$\begin{cases} \widehat{\text{AH}} = \frac{\sqrt{P}}{\nu} \text{R} \Rightarrow \hat{\text{O}}_1 = \mathfrak{r}\hat{\Delta}^\circ \Rightarrow \widehat{\text{A}\hat{\text{O}}\text{B}} = \mathfrak{q}^\circ \Rightarrow \widehat{\text{A}\hat{\text{B}}} = \mathfrak{q}^\circ \\ \widehat{\text{CD}} = \mathfrak{l}\lambda^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{\text{M}} = \frac{\widehat{\text{CD}} - \widehat{\text{AB}}}{\nu} = \frac{\mathfrak{l}\lambda^\circ - \mathfrak{q}^\circ}{\nu} = \mathfrak{r}\hat{\Delta}^\circ$$

می‌دانیم شعاع عمود بر وتر آن را نصف می‌کند، پس:

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بالعکس، پس:

$$\text{OH} = \text{OH}' \Rightarrow \text{AB} = \text{CD} \Rightarrow \text{w} - \text{w}_m = m + \text{w} \Rightarrow m = \text{w} \Rightarrow \text{AB} = \text{CD}$$

و تری که بزرگتر است به مرکز دایره نزدیکتر است و بالعکس، پس:

$$\text{OH} > \text{OH}'' \Rightarrow \text{AB} < \text{EF} \Rightarrow \mathfrak{f} < \mathfrak{w} + \mathfrak{n} \Rightarrow \mathfrak{n} > \mathfrak{w}$$

همچنین باید دقت کرد طول وتر EF باید از قطر دایره کوچکتر باشد.

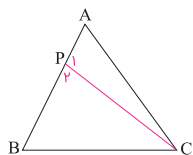
$$m + n < 12 \Rightarrow n < 9$$

در نتیجه:

$$3 < n < 9 \Rightarrow n \text{ مقادير صحيح} = 4, 5, 6, 7, 8$$

تالیفی حسین سعیدی

شعاع دایره‌های محیطی مثلث‌های APC و BPC را به ترتیب R_1 و R_2 فرض می‌کنیم. داریم:



$$\hat{P}_1 + \hat{P}_2 = 180^\circ \Rightarrow \sin \hat{P}_1 = \sin \hat{P}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle APC : \frac{AC}{\sin \hat{P}_1} = 2R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{AC}{2 \sin \hat{P}_1} \\ \triangle BPC : \frac{BC}{\sin \hat{P}_2} = 2R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{BC}{2 \sin \hat{P}_2} \end{array} \right\} \xrightarrow[\sin \hat{P}_1 = \sin \hat{P}_2]{AC=BC} R_1 = R_2$$

$$\Rightarrow R_1 - R_2 = 0$$

تالیفی نرگس کارگر

نقطه دلخواهی روی خط $D : x - 2y = 4$ مثل $A(4, 0)$ انتخاب و بازتاب آن را نسبت به نقطه $O(2, a)$ محاسبه می‌کنیم و آن را A' می‌نامیم.

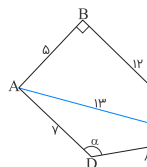
$$O = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow A' = 2O - A = 2(2, a) - (4, 0) = (0, 2a)$$

حال این نقطه باید در خط $D' : x - 2y + 6 = 0$ صدق کند:

$$0 - 2a + 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

با رسم قطر AC ، داریم:



$$\triangle ABC : \text{فیثاغورس} \Rightarrow AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

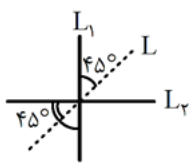
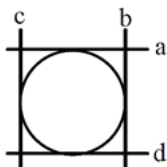
$$\triangle ADC : \text{قضیه کسینوس ها} \Rightarrow AC^2 = DA^2 + DC^2 - 2DA \cdot DC \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 169 = 49 + 169 - 112 \cos \alpha \Rightarrow 112 \cos \alpha = -56 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{56}{112} = -\frac{1}{2}$$

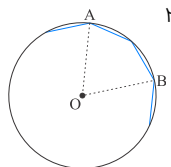
$$\xrightarrow{0^\circ < \alpha < 180^\circ} \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

اگر دو خط L_1 و L_2 بر هم عمود باشند، خط L یکی از نیمسازهای زاویه بین L_1 و L_2 است؛ اکنون اگر موازی L_1 و L_2 مماس‌هایی بر دایره رسم کنیم، جواب‌ها به دست می‌آید؛ حداکثر 4 مماس: a, b, c و d ،



مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۴



$$2\left(\frac{(n-2)180}{n}\right) + \hat{O} = 360^\circ \Rightarrow 360 - 2\left(\frac{360}{n}\right) + \hat{O} = 360$$

$$\Rightarrow \hat{O} = \widehat{AB} = 2\left(\frac{360}{n}\right) = 60 \Rightarrow n = 12$$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

اندازه هر زاویه داخلی هشت ضلعی منتظم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{(n-2) \times 180}{n} = \frac{(8-2) \times 180}{8} = 135$$

چهار ضلعی ABCD مربع است، زیرا چهار مثلث کناری همنهشت و متساوی‌الساقین با زاویه رأس 135° هستند. پس یک لوزی است که اندازه زاویه‌های آن قائمه است. به کمک قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$x^2 + x^2 - 2x \times x \times \cos 135^\circ = 6^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 36$$

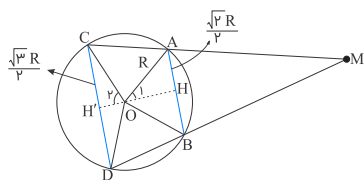
$$\Rightarrow x^2(2 + \sqrt{2}) = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36}{2 + \sqrt{2}} = 18(2 - \sqrt{2})$$

مساحت هشت‌ضلعی منتظم برابر است با مساحت مربع به علاوه مساحت چهار مثلث کناری:

$$S = 6^2 + 4 \times \frac{1}{2} \times x \times x \times \sin 135^\circ = 36 + 2x^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 36 + \sqrt{2} \times 18 \times (2 - \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow S = 18(2 + 2\sqrt{2} - 2) = 36\sqrt{2}$$

تالیفی میثم امین

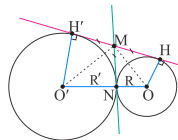


$$\triangle AOH : AH = \frac{\sqrt{2}}{2}R \Rightarrow \hat{O}_1 = 45^\circ \Rightarrow \hat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 90^\circ$$

$$\triangle COH' : CH' = \frac{\sqrt{2}}{2}R \Rightarrow \hat{O}_2 = 60^\circ \Rightarrow \hat{COD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow M = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2} = \frac{120 - 90}{2} = 15^\circ$$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

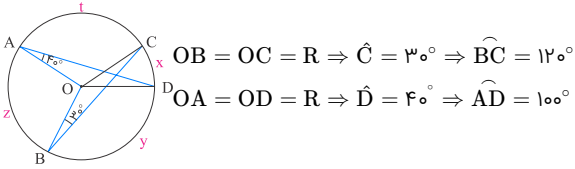


اولاً دایره به قطر OO' در نقطه M بر HH' مماس است و نقطه M وسط HH' است. ثانیاً چون دو دایره، مماس خارج‌اند، مماس مشترک داخلی آن‌ها، مماس مشترک خارجی را نصف می‌کند. پس مماس مشترک داخلی هم از M می‌گذرد و داریم:

$$MN = \frac{1}{2}HH' \quad (*)$$

$$\text{اند دو دایره مماس خارج‌اند} \Rightarrow HH' = 2\sqrt{9 \times 4} = 12 \xrightarrow{(*)} MN = \frac{12}{2} = 6$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸



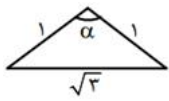
$$\left. \begin{array}{l} x + y = 120^\circ \\ x + t = 100^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 2x + y + t = 220^\circ \Rightarrow y + t = 220^\circ - 2x \quad (1)$$

$$x + y + z + t = 360^\circ \xrightarrow{(1)} x + z + 220^\circ - 2x = 360^\circ \Rightarrow z - x = 140^\circ$$

طبق نام‌گذاری در شکل داریم:

مجموع کمان‌های دایره 360° است، پس:

تالیفی حسین سعیدی



$$(\sqrt{3})^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴۶

گام اول

الف) مماس AC با وتر AB برابر است. بنابراین مثلث $\triangle ABC$ متساوی الساقین بوده و دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ باهم برابرند.

ب) دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را برحسب کمان‌های $\widehat{AB}$ و $\widehat{AD}$ به دست آورده و باتوجه به اینکه $\widehat{DMB} = 222^\circ$ است، ابتدا اندازه کمان‌های $\widehat{AB}$ و $\widehat{AD}$ و سپس اندازه زاویه $\hat{C}$ را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

روش اول:

$$\left. \begin{aligned} AB = AC &\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \\ \hat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2}, \hat{C} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AD}}{2} \Rightarrow 2\widehat{AD} = \widehat{AB} \quad (I)$$

$$\begin{aligned} \widehat{AB} + \widehat{AD} + \widehat{DMB} &= 360^\circ \xrightarrow{\widehat{DMB}=222^\circ} \widehat{AB} + \widehat{AD} = 138^\circ \\ \xrightarrow{(I)} \Rightarrow 3\widehat{AD} &= 138^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 46^\circ \\ \Rightarrow \widehat{AB} &= 2\widehat{AD} = 2 \times 46 = 92^\circ \end{aligned}$$

پس زاویه $\hat{C}$ برابر است با:

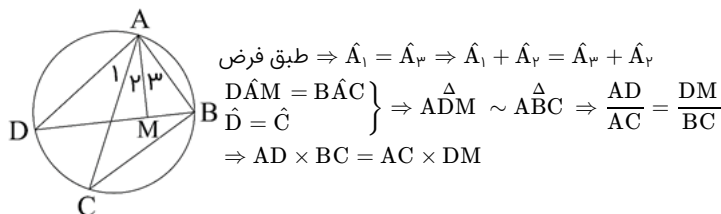
$$\hat{C} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AD}}{2} = \frac{92 - 46}{2} = \frac{46}{2} = 23^\circ$$

روش دوم:

می‌دانیم $\hat{B} = \hat{C}$, $B = \frac{\widehat{AD}}{2}$, $A = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DMB}}{2}$ است. ازطرفی مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° درجه است، پس:

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{AD} + 222^\circ}{2} + \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{AD}}{2} = 180^\circ \\ \Rightarrow \frac{3}{2}\widehat{AD} + 111^\circ &= 180^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 46^\circ \end{aligned}$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} = 23^\circ \text{ بنابراین}$$

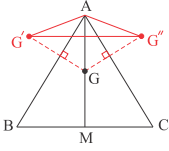


ابتدا به کمک قضیه کسینوس‌ها در مثلث AMN ، اندازه زاویه $\hat{A}$ را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} MN^2 &= AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos \hat{A} \\ \Rightarrow 4 &= 1 + 4 - 4 \cos \hat{A} \Rightarrow 4 \cos \hat{A} = 1 \\ \Rightarrow \cos \hat{A} &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

حال طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC ، داریم:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow BC^2 = 16 + 36 - 2(4)(6)\left(\frac{1}{4}\right) = 40 \\ \Rightarrow BC &= \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$



می‌دانیم:

$$AG' = AG = AG''$$

و همین‌طور:

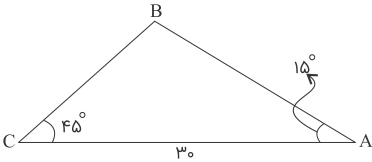
$$\angle G'AG'' = \angle A = 90^\circ$$

از طرف دیگر طبق خواص میانه می‌دانیم:

$$AG = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AG'G''} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

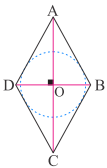
تالیفی مجید قهرمانی



$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{30}{\sin 120^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow AB = 30 \times \frac{\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = 30 \times \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 30 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{6}$$

تالیفی میثم امین



$$AC = 2BD \Rightarrow OA = 2OD$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OD = x \\ OA = 2x \end{cases}$$

ازطرفی می‌دانیم $r = \frac{S}{P}$ ، پس:

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{\frac{1}{2}(AC \times BD)}{\frac{P \times AD}{2}} = \frac{2x \times 4x}{2 \times \sqrt{5}x}$$

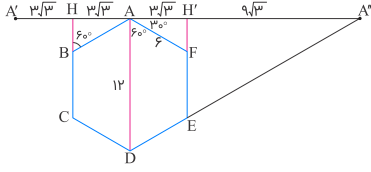
$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{2x}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow AD = \frac{5\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{محیط} = \frac{4 \times 5\sqrt{5}}{2} = 10\sqrt{5}$$

تالیفی حسین سعیدی

می‌دانیم مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر $a^۲ \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ است، پس:

$$\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ = ۵۴\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۶$$

حال برای به دست آوردن کوتاه‌ترین مسیر از A به D با شرایط ذکرشده A را نسبت به BC و سپس نسبت به EF قرینه کرده و فاصله نقطه حاصل تا D را می‌یابیم:



$$AH = ۶ \sin \hat{ABH} = ۳\sqrt{۳}$$

$$AH = A'H = AH' \Rightarrow A'H' = ۹\sqrt{۳}$$

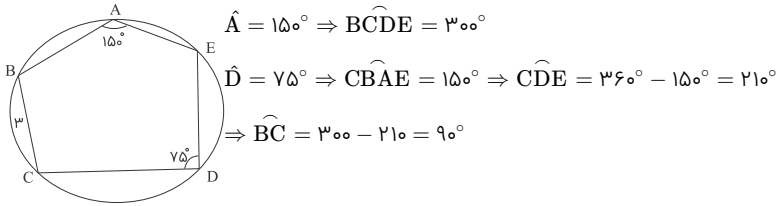
$$A''H' = A'H' \Rightarrow A''H' = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow AA'' = ۱۲\sqrt{۳}$$

AD A'' قائم‌الزاویه است و قطر ۶ ضلعی منتظم دو برابر ضلع آن است، پس داریم:

$$A''D = \sqrt{۱۲^۲ + (۱۲\sqrt{۳})^۲} = ۱۲\sqrt{۱+۳} = ۲۴$$

تالیفی صبا مهدوی

دایرهٔ گذرنده از رأس‌ها را رسم می‌کنیم.



کمان $\widehat{BC} = ۹۰^\circ$ ، یعنی وتر BC به طول $R\sqrt{۲}$ است.

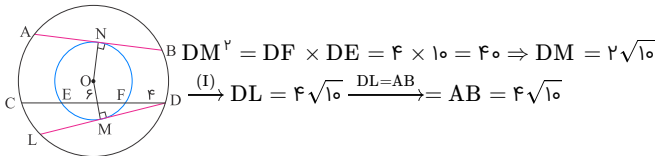
$$R\sqrt{۲} = ۳ \Rightarrow R = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

تالیفی محمد حسینی فرد

از نقطهٔ D وتری مماس بر C' رسم می‌کنیم و چون $OM = ON$ ، پس دو وتر AB و LD از مرکز دایرهٔ C به یک فاصله بوده و $AB = DL$. از طرفی می‌دانیم OM عمودمنصف وتر DL است،

$$\text{پس: } MD = \frac{1}{۲}DL \quad (I)$$

از روابط طولی داریم:



تالیفی صبا مهدوی

می‌دانیم تبدیل بازتاب، بی‌شمار نقطه ثابت دارد (نقاط محور بازتاب). پس گزینه ۴ قابل قبول است.

می‌دانیم تبدیل انتقال، هیچ بی‌شمار (انتقال با بردار صفر) نقطه ثابت دارد و همین‌طور تبدیل دوران فقط یک نقطه ثابت دارد (مرکز دوران) یا بی‌شمار. پس گزینه‌های ۱ و ۲ نیز قابل قبول هستند. به روش حذف گزینه دیدیم که گزینه قابل قبول مسئله، گزینه ۲ است.

حال ثابت می‌کنیم که تبدیل ایزومتري اگر دو نقطه ثابت داشته باشد، آنگاه تمام نقاط روی خط گذرنده از آن دو نقطه در واقع نقاط ثابت تبدیل هستند. پس تبدیل بی‌شمار نقطه ثابت دارد.

فرض کنیم $T(C) = C'$ ، A و B نقاط ثابت T باشند و C بین A و B باشد. از آنجا که T ایزومتري و A و B نقاط ثابت است، داریم:



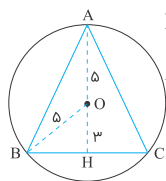
$$AC' + BC' = AC + BC = AB$$

پس $C = C'$ و به همین روش می‌توان برای نقاط خارج پاره‌خط AB که روی خط AB قرار دارند، نیز ثابت کنیم که نقاط ثابت تبدیل هستند.

در نتیجه یک تبدیل ایزومتري یا نقطه ثابت ندارد یا یک نقطه ثابت و یا بی‌شمار نقطه ثابت دارد.

تألیفی مجید قهرمانی

اگر از مرکز دایره به رأس‌های A و B وصل کنیم، داریم:



$$BO = 5, \quad OH = 3 \Rightarrow BH = 4$$

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

تألیفی محمد حسینی فرد

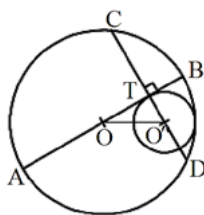
$$\vec{MB} = 2\vec{MA} \Rightarrow B - M = 2(A - M) \Rightarrow B = 2A - M$$

$$B = 2(2, 4) - (1, 2) = (3, 6)$$

$$\text{مبدأً } OB' = 2\vec{OB} = B' = 2(3, 6) = (6, 12)$$

$$AB' = \sqrt{(6-2)^2 + (12-4)^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۵



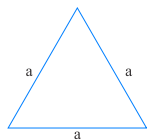
$$\begin{aligned} \angle \hat{O}T\hat{O}' : \hat{T} &= 90^\circ \Rightarrow OT = \sqrt{OO'^2 - O'T^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \\ \Rightarrow AT &= 3 + \sqrt{3}, \quad TB = 3 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

چون دو دایره مماس داخل‌اند: $OO' = R - R' = 3 - 1 = 2$

می‌دانیم قطر عمود بر هر وتر، آن وتر را نصف می‌کند؛ بنابراین: $CT = TD$

$$AT \cdot TB = CT \cdot TD \Rightarrow CT^2 = (3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = 6 \Rightarrow CT = \sqrt{6}$$

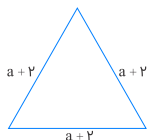
مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶



$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3a}{2} - a} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

حال به ضلع a ، 2 واحد اضافه می‌کنیم:

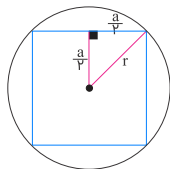


$$r' = \frac{\sqrt{3}}{6}(a + 2) = r + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$r'_a = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + 2) = r_a + \sqrt{3}$$

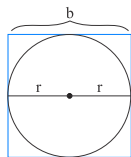
تألیفی حسین سعیدی

ضلع مربع محاطی را a می‌گیریم.



$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow \frac{a^2}{2} = r^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}r$$

ضلع مربع محیطی را b می‌گیریم.



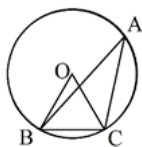
$$b = 2r$$

نسبت تشابه این دو مربع برابر است با نسبت اضلاع آن‌ها:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}r}{2r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{b}{a} = \frac{2r}{\sqrt{2}r} = \sqrt{2}$$

تألیفی حسین سعیدی

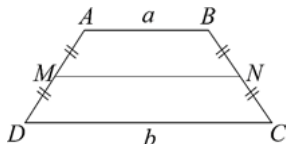
اگر شعاع دایره محیطی مثلث ABC با ضلع BC برابر باشد، مثلث OBC متساوی الساقین است و $\widehat{O} = ۶۰^\circ$.



$$\widehat{O} = \widehat{BC} = ۶۰^\circ, \quad \widehat{A}_{\text{محاطی}} = \frac{\widehat{BC}}{۲} = ۳۰^\circ$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

طول پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، میانگین طول دو قاعده ذوزنقه است. یعنی طبق شکل: $MN = \frac{a+b}{۲}$



طبق فرض:

$$MN = ۱۲ \Rightarrow \frac{a+b}{۲} = ۱۲ \Rightarrow a+b = ۲۴ \quad (*)$$

اما طبق فرض سؤال ذوزنقه ABCD محیطی است، می‌دانیم که در هر چهار ضلعی مجموع ضلع‌های روبه‌رو باهم برابر است، یعنی در ذوزنقه محیطی ABCD داریم:

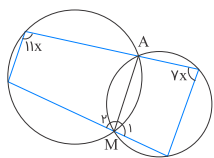
$$AB + CD = AD + BC$$

$$\Rightarrow \text{محیط } ABCD = AB + CD + AD + BC$$

$$= AB + CD + AB + CD = a + b + a + b = ۲(a+b)$$

$$\xrightarrow{(*)} \text{محیط } ABCD = ۲ \times ۲۴ = ۴۸$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵



$$\begin{cases} \hat{M}_۲ + ۱۱x = ۱۸۰^\circ \\ \hat{M}_۲ + = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{M}_۱ = ۱۱x$$

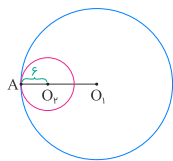
$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{M}_۱ = ۱۱x \\ \hat{M}_۱ + ۷x = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow ۱۸x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۰^\circ$$

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

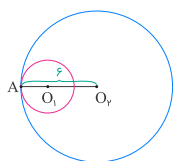
۴ حالت داریم:

دو دایره مماس داخل باشند:

$$۱) r > \rho : \begin{cases} AO_\rho = \rho \\ AO_\rho = r = \rho \Rightarrow \times \end{cases}$$



$$۲) r < \rho : \begin{cases} AO_\rho = \rho \\ AO_\rho = r = \rho \Rightarrow \times \end{cases}$$



دو دایره مماس خارج باشند:

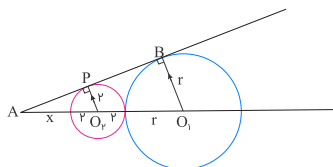
$$۳) r > \rho$$

$$AO_\rho = \rho = x + \rho \Rightarrow x = \rho$$

$$\text{تالس: } \frac{\rho}{r} = \frac{\rho + x}{\rho + r + x} = \frac{\rho}{\rho + r}$$

$$\Rightarrow 1\rho + \rho r = \rho r \Rightarrow r = \rho$$

$$\Rightarrow k = \frac{\rho}{r} = \frac{1}{\rho}$$



$$۴) r < \rho$$

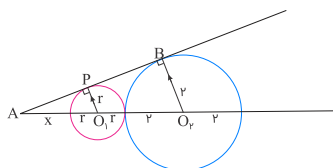
$$AO_\rho = \rho = x + r + r + \rho = \rho + x + \rho r \Rightarrow x + \rho r = \rho \quad (I)$$

$$\text{تالس: } \frac{r}{\rho} = \frac{x + r}{x + \rho r + \rho} = \frac{x + r}{\rho}$$

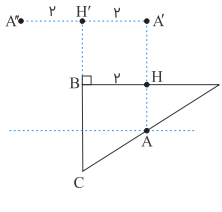
$$\Rightarrow \rho r = \rho x + \rho r \Rightarrow \rho r = x$$

با جایگذاری در رابطه (I) داریم:

$$\rho r + \rho r = \rho \Rightarrow r = 1 \Rightarrow k = \frac{\rho}{r} = \rho$$



نکته جالب اینجا این است که B دقیقاً روی تقاطع دو ضلع قائمه است؛ پس یک خط مستقیم از A به B تمام شرایط صورت سؤال را برآورده می‌کند. ولی روش کتاب را هم بررسی می‌کنیم.
A را نسبت به یکی از اضلاع قائمه و سپس نسبت به دیگری بازتاب می‌دهیم تا A'' به دست آید.
طبق قضیه تالس داریم:



$$\frac{AH}{CB} = \frac{DH}{DB} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DH = BH = 2, \quad AH = 1/5$$

$$\frac{A''H'}{BH'} = \frac{2}{1/5} \Rightarrow A''B = A''H' + BH' = 4 + 2/25 = 6/25 \Rightarrow A''B = 2/5$$

9

تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

قضیه کسینوس‌ها : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 120^\circ$

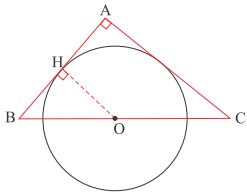
$$\Rightarrow 4 + \sqrt{3} = AB^2 + 1 - 2AB\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow AB^2 + AB - 3 - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$$

چون AH روبه‌روی زاویه 30° است پس نصف AC است؛ یعنی $AH = \frac{1}{2}$

$$HB = AH + AB = \sqrt{3} + \frac{1}{2}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴۵

از مرکز دایره به نقطه تماس با AB وصل می‌کنیم.



پس $OH \perp AB$ ، بنابراین:

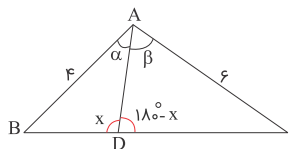
$$OH \perp AB, AC \perp AB \Rightarrow OH \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OH}{AC} = \frac{BH}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{6} = \frac{3 - R}{3} \Rightarrow 3R = 18 - 6R \Rightarrow R = 2$$

تذکر: اگر از O به نقطه تماس دایره با AC نیز وصل کنیم چهار ضلعی حاصل مربع است بنابراین $AH = R$ است و داریم: $BH = AB - AH = 3 - R$

تالیفی سیامک شهبازی زاده

قضیه سینوس‌ها را در دو مثلث ABD و ACD می‌نویسیم:



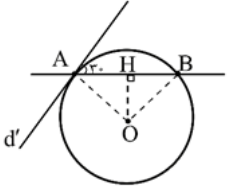
$$\begin{cases} \triangle ABD : \frac{AB}{\sin x} = \frac{BD}{\sin \alpha} \\ \triangle ACD : \frac{AC}{\sin(180^\circ - x)} = \frac{CD}{\sin \beta} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{\sin(180^\circ - x)}{\sin x} \times \frac{AB}{AC} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \times \frac{BD}{CD}$$

بنا به فرض $\frac{CD}{BD} = 2$ و می‌دانیم $\sin(180^\circ - x) = \sin x$. پس:

$$\frac{\sin x}{\sin x} \times \frac{4}{6} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \times \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

تالیفی میثم امین

خط d و مماس d' یکدیگر را در نقطه‌ای مانند A قطع می‌کنند یعنی A زاویهٔ ظلی با زاویهٔ ۳۰° است.

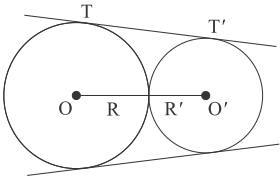


$$A = ۳۰ = \frac{AB}{۲} \Rightarrow AB = ۶۰ \Rightarrow \widehat{AOB} = ۶۰$$

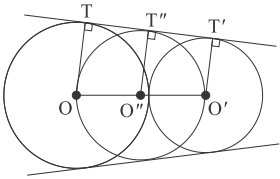
$$\Rightarrow ((\widehat{AOH}) = ۳۰^\circ, \widehat{HAO} = ۶۰^\circ) \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}AO \xrightarrow{AO=۱} OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۵

دو دایره که بر هم مماس خارج باشند و طول خط‌المركزین آن‌ها برابر OO' باشد را در نظر گرفته و مماس مشترک خارجی دو دایره را رسم می‌کنیم:



بر روی این دو دایره، دایره‌ای به قطر $R + R'$ رسم کرده و وضعیت آن را با خط‌المركزین مشخص می‌کنیم.



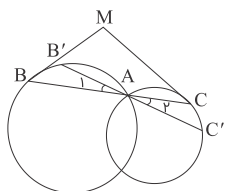
O'' وسط O و O' است. همچنین سه پاره‌خط OT ، $O'T'$ و $O''T''$ باهم موازی هستند. بنابراین T'' وسط T و T' بوده و می‌توان نوشت:

$$O''T'' = \frac{OT + O'T'}{۲} = \frac{R + R'}{۲}$$

از طرفی $R'' = \frac{R + R'}{۲}$ پس فاصلهٔ مرکز دایرهٔ جدید از مماس مشترک دو دایرهٔ اول برابر با شعاع این دایره است ($O''T'' = R''$) بنابراین دایره بر خط مماس مشترک دوایر اولیه، مماس است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

دو دایره متقاطع با نقطه تقاطع A را رسم می‌کنیم:



خط قاطع BC را می‌چرخانیم. باید بررسی کنیم چرخش خط قاطع کدام جزء از مثلث MBC را بدون تغییر نگه می‌دارد. برای تعیین جزء بدون تغییر، توجه به تغییرات زاویه‌ها و کمان‌های موجود در شکل می‌تواند به شما کمک کند.

فرض می‌کنیم خط قاطع BC را چرخش داده و به قاطع جدیدی مانند B'C' (که در قسمت برداشت از صورت سؤال مشخص شده است) رسیده‌ایم. تغییرات کمان‌های موجود در شکل را بررسی می‌کنیم:

$$\widehat{AB'} + \widehat{AC'} = \widehat{AB} - \widehat{BB'} + \widehat{AC} + \widehat{CC'}$$

چون زوایای $\hat{A}_1$ و $\hat{A}_2$ متقابل به رأس هستند، باهم برابرند. پس برای این دو زاویه محاطی کمان‌های روبه روی آن‌ها نیز برابر می‌شود:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 &= \frac{\widehat{BB'}}{2} \\ \hat{A}_2 &= \frac{\widehat{CC'}}{2} \\ \hat{A}_1 &= \hat{A}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\widehat{BB'}}{2} = \frac{\widehat{CC'}}{2} \Rightarrow \widehat{BB'} = \widehat{CC'}$$

پس مجموع دو کمان $\widehat{AB'} + \widehat{AC'}$ برابر می‌شود با $\widehat{AB} + \widehat{AC}$. مجموع این دو کمان که ثابت باشد، مجموع دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هم ثابت بوده و در نتیجه زاویه $\widehat{BMC}$ ثابت می‌ماند.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

BC و ED و FA همان مماس مشترک‌های خارجی هستند. می‌دانیم طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های R و R' برابر است با: $\sqrt{d^2 - (R - R')^2}$. همچنین طول کمان روبه‌رو به زاویه α از رابطه $l = \alpha r$ به دست می‌آید، پس:

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{11^2 - 1^2} = \sqrt{120} \quad , \quad AB = \frac{135}{180} \times 6 \times \pi = \frac{135}{10} = 13.5 \\ AF &= \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \quad , \quad EF = \frac{60}{180} \times 2 \times \pi = 2 \\ ED &= \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{40} \quad , \quad DC = \frac{90}{180} \times 5 \times \pi = 7.5 \\ &\Rightarrow AB + DC + EF + BC + ED + FA \\ &= 13.5 + 7.5 + 2 + \sqrt{120} + \sqrt{40} + \sqrt{48} = 23 + 2\sqrt{30} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{12} \end{aligned}$$

تالیفی سعید قطبی طاهری

مدارس ریاضی و فیزیک مفید

C و C' انتقال یافته هم هستند، پس شعاع برابر دارند.

$$۴ - a^۲ = ۱ - ۲a$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۲a - ۳ = ۰$$

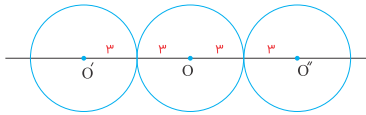
$$\Rightarrow (a + ۱)(a - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \checkmark \\ a = ۳ \times \end{cases}$$

پس دو دایره C و C' به شعاع ۳ به شعاع ۱ - ۲(-۱) = ۳ می‌باشند.

می‌دانیم C و C' مماس بیرونی هستند. پس:

$$OO' = ۲ \times ۳ = ۶$$

C'' مجانس C' به مرکز O و ضریب ۱- می‌باشد، پس در واقع وضعیت سه دایره به صورت زیر است:

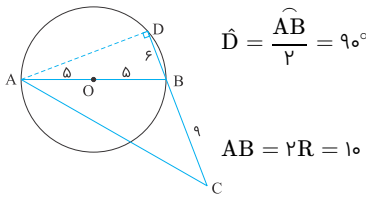


می‌دانیم $O'O'' = ۱۲$ و شعاع هر دو دایره، ۳ می‌باشد. پس اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره C' و C'' برابر است با:

$$\sqrt{۱۲^۲ - (۳ + ۳)^۲} = \sqrt{۱۴۴ - ۳۶} = \sqrt{۱۰۸} = ۶\sqrt{۳}$$

تالیفی مجید قهرمانی

از A به D وصل می‌کنیم:



از طرفی:

بنابراین در مثلث ABD داریم:

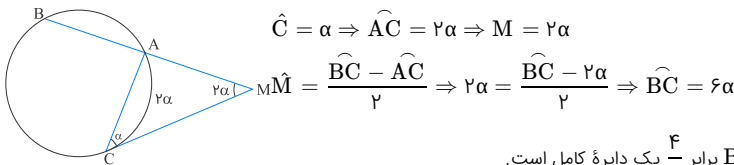
$$AD^۲ = AB^۲ - BD^۲ = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \Rightarrow AD = ۸$$

با در نظر گرفتن AD به عنوان ارتفاع خارجی $\triangle ABC$ خواهیم داشت:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{۲} BC \cdot AD = \frac{1}{۲} \times ۹ \times ۸ = ۳۶$$

تالیفی سیامک شهبازی زاده

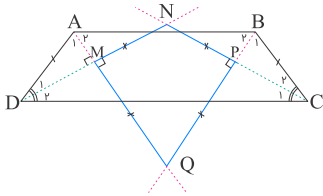
زاویه $\hat{C}$ را α می‌نامیم.



وتر AB دایره را به نسبت ۱ به ۴ تقسیم کرده است ($\widehat{AB}$ کمان کوچک‌تر است)، پس کمان $\widehat{BCA}$ برابر $\frac{۴}{۵}$ یک دایره کامل است.

$$\widehat{BCA} = ۶\alpha + ۲\alpha = \frac{۴}{۵} \times ۳۶۰ \Rightarrow ۸\alpha = \frac{۴}{۵} \times ۳۶۰ \Rightarrow \alpha = ۳۶^\circ$$

تالیفی حسین سعیدی



می‌دانیم در دوزنقه نیمسازهای زاویه‌های مجاور به هر ساق، بر هم عمودند، پس $\hat{M} = \hat{P} = 90^\circ$ و $\hat{M} + \hat{P} = 180^\circ$ ، در نتیجه چهار ضلعی $MNPQ$ محاطی است. حال داریم:

$$AD = BC \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \text{متساوی الساقین } \triangle NDC \Rightarrow ND = NC$$

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1, AD = BC, \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \xrightarrow{\text{(قضیه)}} \triangle AMD \cong \triangle BPC \Rightarrow MD = PC$$

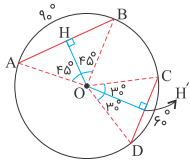
$$\Rightarrow ND - MD = NC - PC \Rightarrow NM = NP \quad (*)$$

$$\Rightarrow PQ = MQ \quad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow NM + PQ = NP + MQ \Rightarrow \text{چهار ضلعی } MNPQ \text{ محیطی است}$$

تذکر: اگر یک دوزنقه متساوی الساقین، محیطی باشد، آنگاه نیمسازهای داخلی آن، در یک نقطه هم‌رس‌اند و هیچ چهار ضلعی از برخورد آن‌ها به وجود نمی‌آید.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸



عمود منصف‌های هر وتر از مرکز دایره می‌گذرد و نیمساز زاویه مرکزی نظیر آن وتر است، بنابراین مطابق شکل اگر فرض کنیم $\widehat{AB} = 90^\circ$ ، پس:

$$OH = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

همچنین اگر $\widehat{CD} = 60^\circ$ ، آنگاه:

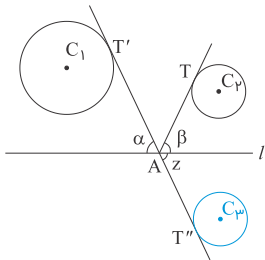
$$OH' = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

بنابراین:

$$\frac{OH'}{OH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} R}{\frac{\sqrt{2}}{2} R} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

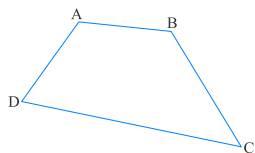
تالیفی سیامک شهبازی زاده

فرض کنید AT و AT' مماس‌های مورد نظر باشند، خواهیم داشت: $\alpha = \beta$. بازتاب C_2 نسبت به l را C_3 می‌نامیم و مماس AT'' را بر آن رسم می‌کنیم، پس $\beta = x$ و در نتیجه $\alpha = x$ ، پس T', A و T'' هم‌خط هستند و $T'T''$ مماس مشترک C_1 و C_3 می‌باشد. چون C_1 و C_3 قطعاً متخارج‌اند، چهار مماس مشترک دارند. پس چهار جفت از مماس‌های مذکور می‌توان رسم کرد.



تالیفی صبا مهدوی

چون عمود منصف‌ها هم‌رسانند، چهار ضلعی ABCD محاطی است، پس:



$$A + C = B + D = 180^\circ \quad (*)$$

طبق فرض مسئله داریم:

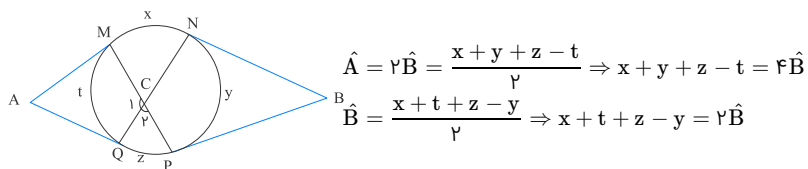
$$A + D = |B - C| + 60 \xrightarrow{B > C} A + D = B - C + 60 \Rightarrow A + C = B - D + 60$$

$$\left. \begin{aligned} 180 &= B - D + 60 \Rightarrow B - D = 120 \\ (*) : B + D &= 180 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{B} = 150^\circ, \hat{D} = 30^\circ$$

$$\frac{\hat{B}}{\hat{D}} = 5$$

تألیفی حسین سعیدی

از نام‌گذاری زیر استفاده می‌کنیم:



$$\hat{A} = 2\hat{B} = \frac{x + y + z - t}{2} \Rightarrow x + y + z - t = 2\hat{B}$$

$$\hat{B} = \frac{x + t + z - y}{2} \Rightarrow x + t + z - y = 2\hat{B}$$

رابطه‌های به‌دست‌آمده را باهم جمع می‌کنیم.

$$2\hat{B} + 2\hat{B} = 2x + 2z \Rightarrow 3\hat{B} = x + z \quad (1)$$

از طرفی:

$$\left. \begin{aligned} \hat{C}_1 = 30^\circ + \hat{B} \Rightarrow \hat{C}_r = 180^\circ - (B + 30^\circ) = 150^\circ - \hat{B} \\ \hat{C}_r = \frac{x + z}{2} \xrightarrow{(1)} \hat{C}_r = \frac{3\hat{B}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3\hat{B}}{2} = 150^\circ - \hat{B} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ, \hat{A} = 120^\circ$$

زاویه $\hat{C}_1$ ، 30° درجه از B بزرگ‌تر است، پس $C = 90^\circ$ ؛ یعنی $MP \perp NQ$. همچنین $A - B = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ و $A + B = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$. فقط گزینه ۲ قابل استدلال نیست.

تألیفی حسین سعیدی

$$\left. \begin{aligned} h_a &= \frac{2S}{a} \\ h_b &= \frac{2S}{b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{3} \left(\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} \right) = a + b$$

$$\Rightarrow 2S\sqrt{3} \left(\frac{a+b}{ab} \right) = a + b \Rightarrow 2S\sqrt{3} = ab$$

می‌دانیم در مثلث ABC مساحت برابر $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ است، داریم:

$$2 \left(\frac{1}{2}ab \sin C \right) \sqrt{3} = ab \Rightarrow \sin C = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow C = \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۵

از تساوی طول کمان‌ها نسبت شعاع‌ها و در نهایت نسبت مساحت‌ها را به دست می‌آوریم:

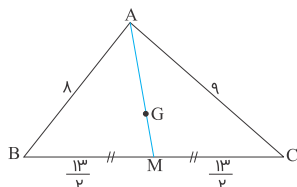
$$\left. \begin{aligned} \text{طول کمان } ۱۲۰^\circ &= \frac{۲\pi R}{۳} \\ \text{طول کمان } ۶۰^\circ &= \frac{\pi R'}{۳} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{۲\pi R}{۳} = \frac{\pi R'}{۳} \Rightarrow R' = ۲R$$

بنابراین نسبت تشابه آن‌ها $\frac{R'}{R} = ۲ = k$ و در این صورت:

$$\frac{S'}{S} = k^۲ = ۲^۲ = ۴$$

تالیفی سیامک شهبازی زاده

مطابق شکل، G نقطهٔ هم‌رسمی میانه‌ها است. می‌خواهیم GM را محاسبه کنیم. می‌دانیم $GM = \frac{AM}{۳}$ ؛ پس کافی است طول میانهٔ AM را بیابیم.



$$\begin{aligned} AB^۲ + AC^۲ &= ۲AM^۲ + \frac{BC^۲}{۲} \Rightarrow ۸^۲ + ۹^۲ = ۲AM^۲ + \frac{۱۳^۲}{۲} \Rightarrow ۶۴ + ۸۱ = ۲AM^۲ + \frac{۱۶۹}{۲} \\ \Rightarrow ۲AM^۲ &= ۱۴۵ - \frac{۱۶۹}{۲} = \frac{۲۹۰ - ۱۶۹}{۲} \Rightarrow ۲AM^۲ = \frac{۱۲۱}{۲} \Rightarrow AM^۲ = \frac{۱۲۱}{۴} \\ \Rightarrow AM &= \frac{۱۱}{۲} \Rightarrow GM = \frac{AM}{۳} = \frac{۱۱}{۶} \end{aligned}$$

تالیفی میثم امین

برای گزینهٔ ۱ مثال نقض لوزی وجود دارد.

در حالت کلی اگر یک چهارضلعی دارای محور تقارن باشد، دو حالت پیش رو داریم:

حالت اول: یکی از قطرهای محور تقارن باشد، که در این صورت می‌دانیم قطری که محور تقارن است، عمودمنصف قطر دیگر می‌شود. نمونهٔ این چهارضلعی‌ها را می‌توان در کایت و لوزی و مربع دید.

حالت دوم: محور تقارن در واقع عمودمنصف مشترک دو ضلع باشد که در این صورت آن دو ضلع موازی هستند و البته دو ضلع دیگر نیز باید هم‌اندازه باشند. نمونهٔ این چهارضلعی را می‌توان در دوزنقهٔ متساوی‌الساقین مشاهده کرد.

تالیفی مجید قهرمانی

هر تبدیل طولی که دو نقطهٔ ثابت داشته باشد، تمام نقاط روی خط شامل آن دو نقطه را ثابت نگه می‌دارد. در نتیجه اگر یک تبدیل طولی سه نقطهٔ غیرواقع بر یک خط را ثابت نگه دارد، آنگاه آن تبدیل طولی در واقع تبدیل همانی است، یعنی تمام نقاط صفحه را ثابت نگه می‌دارد.

باتوجه به اینکه تبدیل طولی T سه نقطهٔ $(۰, ۰)$ ، $(۰, ۱)$ و $(۱, ۱)$ ، که غیرواقع بر یک خط هستند را ثابت نگه داشته است، پس T تبدیل همانی است. در نتیجه تبدیل خط $y = ۲x - ۱$ خود خط می‌شود که عرض از مبدأ آن -۱ است.

تالیفی مجید قهرمانی

فرض کنیم ضلع مربع برابر a باشد. مثلث AEF از یک مثلث متساوی‌الاضلاع و دو مثلث متساوی‌الساقین مساوی با زاویهٔ رأس ۱۵۰° تشکیل شده است.

$$\frac{S_{AEF}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ + ۲\left(\frac{۱}{۲}a^۲ \sin ۱۵۰^\circ\right)}{\frac{۱}{۲}a^۲ \sin ۱۵۰^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ + \frac{۱}{۲}a^۲}{\frac{۱}{۴}a^۲} = \frac{\sqrt{۳} + ۲}{۱} = \sqrt{۳} + ۲$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۴

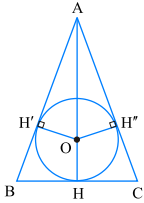
نکته: در مثلث قائم‌الزاویه اگر a وتر، r_a شعاع بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، آنگاه:

$$r_a = r + a$$

در مثلث قائم‌الزاویه، شعاع دایره محاطی نصف وتر است؛ پس طول وتر در این مثلث برابر ۳۴ می‌باشد.

$$r_a = r + a \Rightarrow r_a = ۳۴ + ۶ = ۴۰$$

تألیفی محمد حسینی فرد



مطابق شکل $OH = OH' = OH'' = ۳$ و در نتیجه $OA = ۵$ است.

$$\begin{aligned} \Delta OAH' : AH'^{\circ} &= OA^{\circ} - OH'^{\circ} = ۲۵ - ۹ \\ \Rightarrow AH'^{\circ} &= ۱۶ \Rightarrow AH' = ۴ \end{aligned}$$

حال اگر $BH = HC = x$ فرض شود، باتوجه به آنکه مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه بر دایره، برابر با یکدیگرند، داریم:

$$AH'' = AH' = ۴$$

$$BH' = BH = CH = CH'' = x$$

راه‌حل اول:

در مثلث ABC اگر S مساحت مثلث و P نصف محیط مثلث باشد، آنگاه:

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow ۳ = \frac{\frac{1}{2} \times \lambda \times ۲x}{۴ + ۲x} \Rightarrow ۱۲ + ۶x = \lambda x \Rightarrow ۲x = ۱۲$$

بنابراین طول قاعده مثلث متساوی‌الساقین ABC، برابر با ۱۲ است.

راه‌حل دوم:

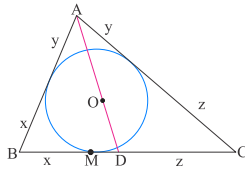
رابطه فیثاغورس را در مثلث ACH می‌نویسیم:

$$CH = CH'' = x, \quad AH = \lambda, \quad AH'' = ۴$$

$$\begin{aligned} AC^{\circ} &= AH^{\circ} + CH^{\circ} \\ \Rightarrow (۴ + x)^{\circ} &= \lambda^{\circ} + x^{\circ} \Rightarrow ۱۶ + \lambda x + x^{\circ} = ۶۴ + x^{\circ} \\ \Rightarrow \lambda x &= ۴۸ \Rightarrow x = ۶ \Rightarrow BC = ۱۲ \end{aligned}$$

کتک‌ور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸



$$\text{محیط مثلث } ۲P = ۲x + ۲y + ۲z = ۱۵ \Rightarrow P = x + y + z = ۷/۵$$

$$BM = x = ۷/۵ - \underbrace{(y + z)}_{AC} = ۷/۵ - ۶ = ۱/۵$$

$$\text{AD نیمساز } \hat{A} \text{ است} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{۵ - BD} = \frac{۴}{۳} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳BD = ۱۰ - ۲BD$$

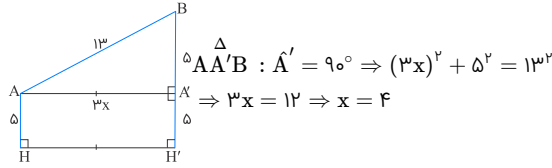
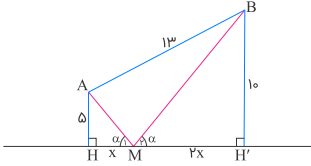
$$\Rightarrow BD = ۲$$

$$MD = BD - BM = ۲ - ۱/۵ = ۹/۵$$

تألیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

فرض کنیم M نقطهٔ موردنظر است. می‌دانیم در این صورت $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ، درنتیجه دو مثلث MAH و MBH' متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{MH}{MH'} = \frac{AH}{BH'} \Rightarrow \frac{MH}{MH'} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow MH = x, \quad MH' = 2x$$



حال در دوزنقهٔ $ABH'H$ ، ارتفاع AA' را رسم می‌کنیم. بنابراین:

تالیفی، فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

مثلث‌های $\triangle ABE$ و $\triangle BDE$ متشابه‌اند پس:

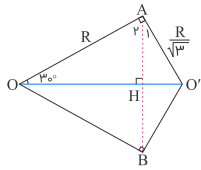
$$\frac{AB}{BD} = \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow BE^2 = AE \cdot DE \Rightarrow (2\sqrt{6})^2 = (AD + 3) \times 3 \\ \Rightarrow 24 = 3AD + 9 \Rightarrow AD = 5$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

$$AO = R, \quad O'A = R'$$

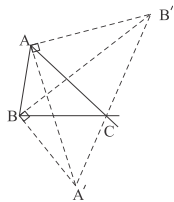
چون $O_1 = 30^\circ$ است، پس $\frac{R'}{R} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ می‌شود. مثلث AHO قائم‌الزاویه است، پس $A_2 = 60^\circ$ و $A_1 = 30^\circ$ همچنین $\frac{\sqrt{3}}{2}R = OH$ و $O'H = \frac{\sqrt{3}}{6}R$ پس.

$$\begin{aligned} OO' &= OH + O'H = \frac{3\sqrt{3}}{6}R + \frac{\sqrt{3}}{6}R = \frac{4\sqrt{3}}{6}R = 12 \\ &\Rightarrow R = 6\sqrt{3} \\ &\Rightarrow R' = \frac{R}{\sqrt{3}} = 6 \end{aligned}$$



تالیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید

مطابق شکل، AB' نیمساز خارجی A و BA' نیز نیمساز خارجی B است. همچنین نیمسازهای داخلی و خارجی در هر رأس بر هم عمودند. بنابراین مثلث‌های $AA'B'$ و $BA'B'$ قائم‌الزاویه‌اند. پس اگر دایره‌ای به قطر $A'B'$ رسم کنیم، حتماً از نقاط A و B می‌گذرد. بنابراین چهار ضلعی $ABA'B'$ محاطی است.



تالیفی محمد حسینی فرد

می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در یک دایره باهم برابرند، یعنی:

$$DC \parallel AB \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{CB} = 180^\circ$$

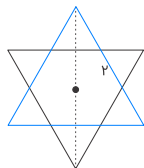
$$\Rightarrow 2\widehat{AD} + 100^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 40^\circ$$

زاویهٔ x برای مثلث OAM زاویهٔ خارجی است، بنابراین:

$$x = \underbrace{\widehat{A}}_{\text{محاطی}} + \underbrace{\widehat{MOA}}_{\text{مرکزی}} = \frac{\widehat{BC}}{2} + \widehat{AD} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$$

تالیفی سیامک شهبازی زاده

چون مثلث‌های کوچک‌تر با بزرگ‌ترها متشابه‌اند (ز ز)، پس زوایای آن‌ها هم ۶۰ درجه است و متساوی‌الاضلاع هستند، پس شش ضلعی حاصل منتظم است.



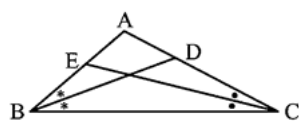
حالا با نکاتی که گفته شد می‌توان نتیجه گرفت که ضلع شش ضلعی، ثلث ضلع مثلث بزرگ و برابر با ۲ است.

$$S_{\text{شش ضلعی}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 \times 6 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times 6 = 6\sqrt{3}$$

تالیفی سعید قطبی طاهری

مدارس ریاضی و فیزیک مفید

چون A بزرگ‌ترین زاویه است، پس $BC = 10$ و دو ضلع دیگر به دلخواه می‌توانند $AB = 5$ و $AC = 7$ باشند.



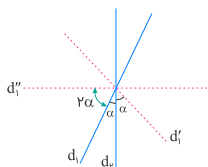
$$\triangle ABC : BD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{\cancel{AC}_7} = \frac{\cancel{AB}_5}{\cancel{AB} + \cancel{BC}_{10}} \Rightarrow AD = \frac{35}{15}$$

$$\triangle ABC : CE \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AE}{\cancel{AB}_5} = \frac{\cancel{AC}_7}{\cancel{AC} + \cancel{BC}_{17}} \Rightarrow AE = \frac{35}{17}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AD} + \frac{1}{AE} = \frac{15}{35} + \frac{17}{35} = \frac{32}{35}$$

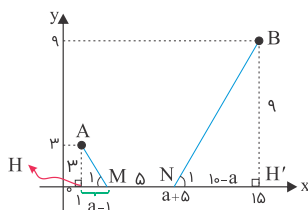
مدارس پرتو ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

باتوجه به شکل زاویه بین d_1 و d'_1 می‌باشد و مجدد چون محور بازتاب نیمساز زاویه بین خطوط تصویر است پس زاویه بین d_1 و d''_1 نیز ۲α خواهد بود.



تالیفی حسین سعیدی

فرض کنیم طول پاره خط شکسته AMNB حداقل است، در این صورت $\hat{M}_1 = \hat{N}_1$ و داریم:



$$\hat{H} = \hat{H}', \hat{M}_1 = \hat{N}_1 \Rightarrow \triangle AHM \sim \triangle BH'N \Rightarrow \frac{AH}{BH'} = \frac{HM}{NH'}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۹} = \frac{a-1}{15-(a+5)} \Rightarrow \frac{1}{۳} = \frac{a-1}{10-a} \Rightarrow ۳a-۳=10-a$$

$$\Rightarrow ۴a=1۳ \Rightarrow a=\frac{1۳}{۴} \quad (*)$$

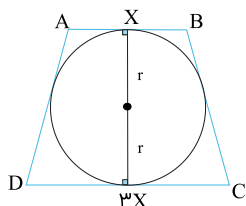
$$AM = \sqrt{۳^2 + (a-1)^2} = \sqrt{9 + \left(\frac{۹}{۴}\right)^2} = \sqrt{\frac{۲۲۵}{۱۶}} = \frac{15}{۴}$$

$$\frac{1}{۳} = \frac{1}{۳}, BN = ۳AM = \frac{۴۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \text{طول پاره خط شکسته AMNB} = AM + MN + BN$$

$$= \frac{15}{۴} + ۵ + \frac{۴۵}{۴} = ۲۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹



اگر شعاع دایره محاطی دوزنقه متساوی الساقین ABCD برابر r باشد، داریم:

$$۴r^2 = AB \times CD$$

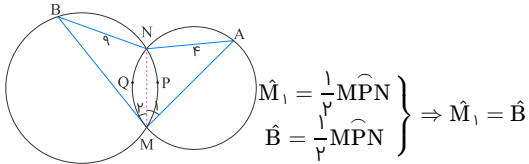
$$\Rightarrow ۴(\sqrt{۳})^2 = x(۳x) \Rightarrow x^2 = ۴ \Rightarrow x = ۲$$

مطابق شکل، مساحت دوزنقه برابر است با:

$$S(ABCD) = \frac{(x+۳x) \times ۲r}{۲} \Rightarrow S(ABCD) = \frac{۸ \times ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۸\sqrt{۳}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶



$$\left. \begin{aligned} \hat{M}_1 &= \frac{1}{2} \widehat{MPN} \\ \hat{B} &= \frac{1}{2} \widehat{MPN} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{B}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{M}_2 &= \frac{1}{2} \widehat{MQN} \\ \hat{A} &= \frac{1}{2} \widehat{MQN} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{M}_2 = \hat{A}$$

$$\frac{AN}{MN} = \frac{MN}{BN} \Rightarrow MN^2 = 4 \times 9 \Rightarrow MN = 6$$

زوایای $\hat{M}_1$ و $\hat{M}_2$ به ترتیب برای دایره‌های بزرگ و کوچک ظلی هستند.

پس مثلث‌های $\triangle AMN$ و $\triangle BMN$ متشابه هستند.

تالیفی حسین سعیدی

$$\begin{aligned} \hat{B} &= 6^\circ, \hat{C} = 45^\circ \Rightarrow \hat{A} = 75^\circ \\ \sin(75^\circ) &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

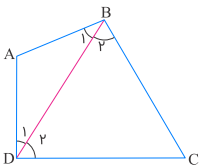
طبق قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\begin{aligned} \frac{BC}{\sin A} &= \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \frac{3 + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 \times \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \\ &= 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

$AB + CD = AD + BC \Rightarrow$ چهارضلعی ABCD محیطی است

$\xrightarrow{AB \text{ کوچکترین ضلع است}}$ CD بزرگ‌ترین ضلع است



$$\left. \begin{aligned} \triangle ABD : AD > AB &\Rightarrow \hat{B}_1 > \hat{D}_1 \\ \triangle BCD : CD > BC &\Rightarrow \hat{B}_2 > \hat{D}_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{B}_2 > \hat{D}_1 + \hat{D}_2 \Rightarrow \hat{B} > \hat{D}$$

به طور مشابه با رسم قطر AC می‌توان نشان داد $\hat{A} > \hat{C}$.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۳۹۹ ۷

در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و نیمساز بر هم منطبق هستند، پس:

$$\hat{B} = \hat{C} = 70^\circ \Rightarrow \hat{BAH} = \hat{HAC} = 20^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{CM} = \hat{DM} = 40^\circ \\ \hat{ADMC} = 140^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{AD} = 60^\circ \Rightarrow \hat{AMD} = 30^\circ$$

تالیفی سیامک شهبازی زاده

باتوجه‌به اینکه چهار ضلعی ABCD محاطی است، داریم:

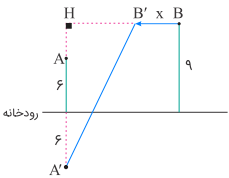
$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \sin \hat{A} = \sin \hat{C}$$

و در مثلث‌های $\triangle ABD$ و $\triangle BCD$ قضیهٔ سینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{CD}{\sin 60^\circ} &= \frac{BD}{\sin \hat{C}} \\ \frac{AB}{\sin 30^\circ} &= \frac{BD}{\sin \hat{A}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{CD}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{CD}{AB} = \sqrt{3}$$

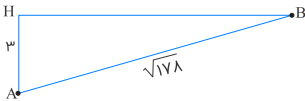
تالیفی حسین سعیدی

برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر وقتی x کیلومتر آن ساحلی باشد، کافی است B را با برداری به طول x انتقال دهیم و از بازتاب A به آن وصل کنیم. طول $BB' + A'B'$ طول کوتاه‌ترین مسیر است.



$$BB' + A'B' = 22 \Rightarrow A'B' = 22 - x$$

فاصلهٔ افقی A و B را می‌یابیم:



$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow BH^2 = 17^2 - 13^2 = 144 \Rightarrow BH = 12 \\ \Rightarrow B'H = 13 - x$$

حال برای مثلث $\triangle A'B'H$ فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$A'H^2 + B'H^2 = A'B'^2 \Rightarrow 15^2 + (13 - x)^2 = (22 - x)^2 \\ \Rightarrow 225 + 169 - 26x = 484 - 44x \Rightarrow 18x = 90 \Rightarrow x = 5 \text{ km}$$

تالیفی حسین سعیدی

ابتدا در مثلث BCD قضیهٔ کسینوس ها را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \overset{\Delta}{BCD} : \gamma^2 &= \omega^2 + \varphi^2 - 2 \times \omega \times \varphi \times \cos \hat{C} \\ \Rightarrow 49 &= 41 - \varphi \circ \cos \hat{C} \Rightarrow \cos \hat{C} = -\frac{1}{\omega} \end{aligned}$$

از آنجایی که ABCD محاطی است، $A + C = 180^\circ$ ، بنابراین:

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{C} \Rightarrow \cos A = \frac{1}{\omega}$$

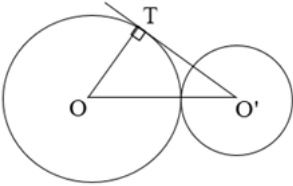
حال در مثلث ABD قضیهٔ کسینوس ها را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \overset{\Delta}{ABD} : \gamma^2 &= \varphi^2 + AD^2 - 2 \times \varphi \times AD \times \frac{1}{\omega} \\ \xrightarrow{AD=x} 49 &= 36 + x^2 - \frac{12x}{\omega} \Rightarrow \omega x^2 - 12x - 6\omega = 0 \\ \Rightarrow \Delta &= 144 - 20 \times (-6\omega) = 1444 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{12 + 38}{10} = \omega \Rightarrow AD = \omega \\ x_2 = \frac{12 - 38}{10} = -2/6 \end{cases} \end{aligned}$$

غ.ق.ق

تالیفی نرگس کارگر

دو دایرهٔ مماس بر هم با مشخصات گفته شده را رسم می‌کنیم:



$O'T$ بر OT عمود است بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{OTO'}$ قائم الزاویه است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، اندازهٔ $O'T$ یا همان مماس رسم شده از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر بر دایرهٔ بزرگ‌تر را به دست می‌آوریم.

$$OO' = R + R' = 10/\omega + \varphi = 14/\omega$$

$$OT = R = 10/\omega$$

$$\begin{aligned} \overset{\Delta}{OTO'} : (OT)^2 + (O'T)^2 &= (OO')^2 \Rightarrow (10/\omega)^2 + (O'T)^2 = (14/\omega)^2 \\ \Rightarrow (O'T)^2 &= (14/\omega)^2 - (10/\omega)^2 = (14/\omega - 10/\omega)(14/\omega + 10/\omega) \\ &= 4 \times 2\omega = 100 \Rightarrow O'T = \sqrt{100} = 10 \end{aligned}$$

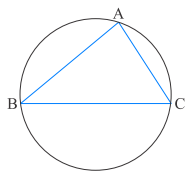
کتک‌ور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

نکته:

۱) اگر وترى در دایره مساوى شعاع باشد، کمان محصور آن ۶۰° است.

۲) اگر وترى $\sqrt{۲}$ برابر شعاع باشد، کمان محصور آن ۹۰° است.

۳) همچنین اگر وترى $\sqrt{۳}$ برابر شعاع باشد، کمان محصور آن ۱۲۰° است.



AC با شعاع برابر است، پس $\widehat{AC} = ۶۰^\circ$.

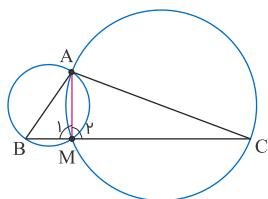
AB، $\widehat{AB} = ۹۰^\circ$ پس برابر شعاع است، پس $\sqrt{۲}$.

$$\widehat{BC} = ۳۶۰ - (۶۰ + ۹۰) = ۲۱۰^\circ$$

$$|\widehat{BC}| = \frac{\widehat{BC}}{۳۶۰} \times ۲\pi R = \frac{۲۱۰}{۳۶۰} \times ۲\pi \times ۶ = ۷\pi$$

تالیفی حسین سعیدی

شکل مسئله را رسم می‌کنیم:



در مثلث‌های $\triangle ABM$ و $\triangle ACM$ قضیه سینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{\sin \hat{M}_1} = ۲R_1 \xrightarrow{R_1=۲} AB = ۴ \sin \hat{M}_1$$

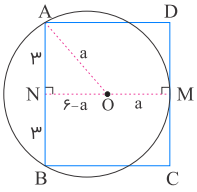
$$\frac{AC}{\sin \hat{M}_۲} = ۲R_۲ \xrightarrow{R_۲=۳} AC = ۱۲ \sin \hat{M}_۲$$

زوایای $\hat{M}_1$ و $\hat{M}_۲$ مکمل یکدیگرند، پس: $\sin \hat{M}_1 = \sin \hat{M}_۲$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{۴ \sin \hat{M}_1}{۱۲ \sin \hat{M}_۲} = \frac{۱}{۳}$$

تالیفی حسین سعیدی

OM بر CD عمود است، پس بر AB هم عمود است و در نتیجه، آن را نصف می‌کند. شعاع دایره را a فرض می‌کنیم. مطابق شکل، داریم:



$$\widehat{OAN} : \hat{N} = 90^\circ \Rightarrow 9 + (\epsilon - a)^r = a^r \Rightarrow 9 + 3\epsilon + \cancel{a^r} - 12a = \cancel{a^r}$$

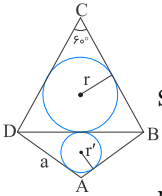
$$45 - 12a = 0 \Rightarrow a = \frac{45}{12} = 3.75$$

تألیفی فرزاد زمانی نژاد - حمیدرضا پردازی مقدم

شعاع دایره محاطی مثلث متساوی‌اضلاع برابر است با:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times 3\epsilon}{9} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}a = \epsilon \Rightarrow a = AB = AD = \frac{\epsilon}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$



$$S' = \frac{1}{2}AD \times AB \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2}(2\sqrt{3})^r \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r' = \frac{S'}{P'} = \frac{(2\sqrt{3})^r \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \times (2\sqrt{3} + 3)} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{d^r - (r - r')^r} &= \sqrt{\left(\underbrace{\sqrt{3}}_x + \underbrace{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3}}_y\right)^r - \left(\underbrace{\sqrt{3}}_x - \underbrace{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3}}_y\right)^r} = \sqrt{4(\sqrt{3}) \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3}\right)} \\ &= \frac{\epsilon}{\sqrt{2\sqrt{3} + 3}} \end{aligned}$$

در مثلث متساوی‌الساقین با زاویه 120° درجه رابطه زیر برقرار است.

تألیفی سعید قطبی طاهری
مدارس ریاضی و فیزیک مفید