

نام درس: هندسه (۲)

نام دبیر:

ساعت امتحان:

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه



جمهوری اسلامی ایران

آزمون پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی

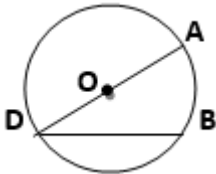
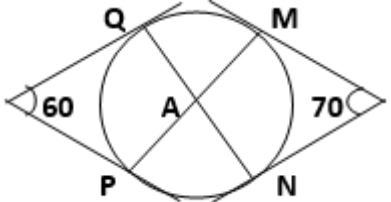
نام و نام خانوادگی:

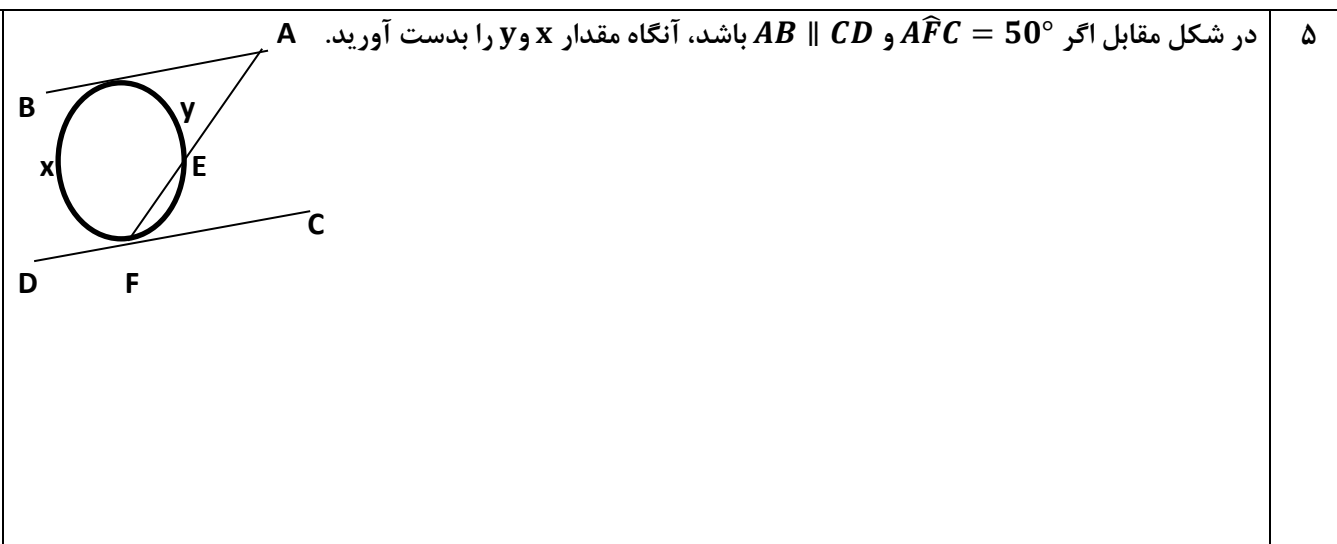
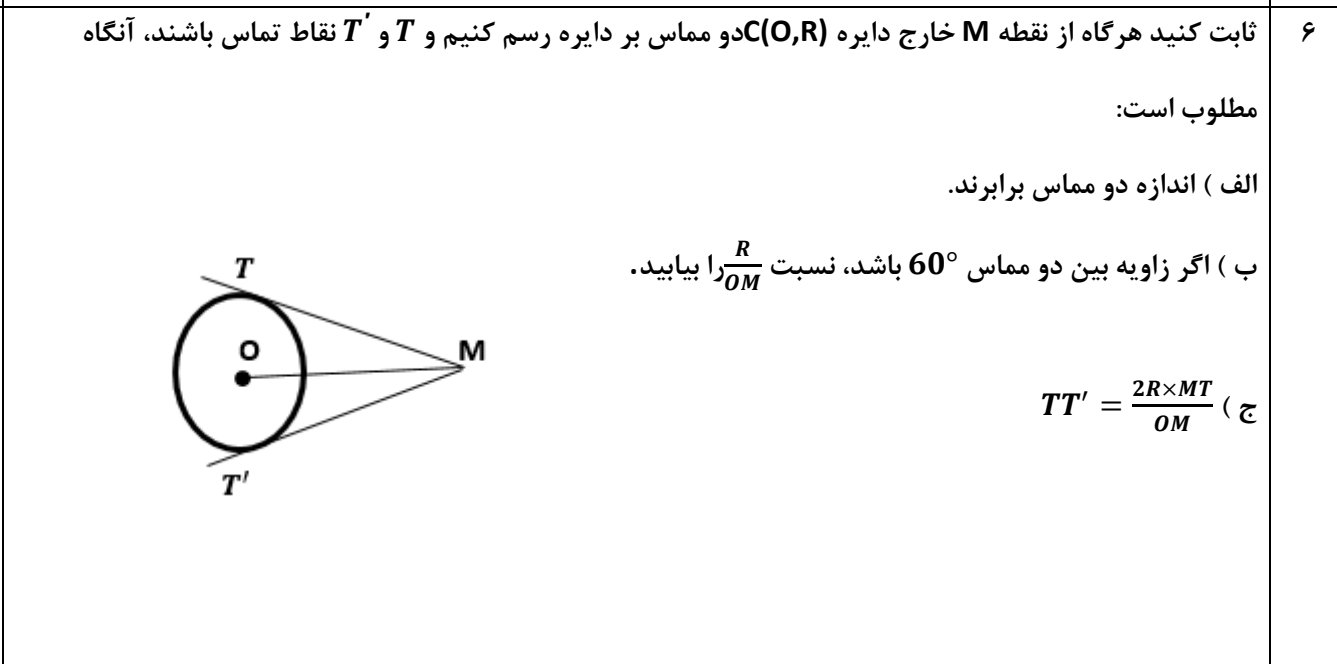
مقطع و رشته: یازدهم ریاضی

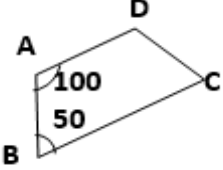
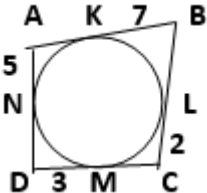
نام پدر:

شماره داوطلب:

تعداد صفحه سؤال: ۴ صفحه

نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نمره به عدد:	نمره به حروف:	محل مهر و امضاء مدیر
ردیف	سؤالات	نام	نمره	نمره	نمره	نمره
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید الف) تبدیل هایی که طول پاره خط را حفظ می کنند، تبدیلات _____ نامیده می شوند. ب) یک چهارضلعی محاطی است، اگر فقط اگر دو زاویه مقابل آن _____ باشند. ج) اگر فاصله ی خطی از مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد. خط ودایره _____ نقطه اشتراک دارند، یعنی _____	۱				
۲	ثابت کنید اگر قطری از یک دایره یکی از وترهای آن دایره را نصف کند، بر آن وتر عمود است و کمان نظیر آن وتر را نیز نصف می کند.	۱				
۳	در شکل زیر $\widehat{ADB}$ یک زاویه محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است، ثابت کنید اندازه این زاویه برابر با نصف اندازه کمان متقابل آن است. 	۱				
۴	در شکل زیر زاویه $\widehat{PAN}$ را محاسبه نمایید. 	۲				

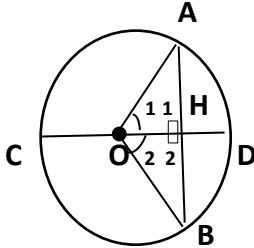
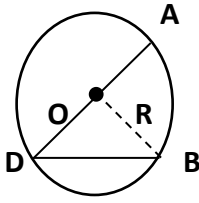
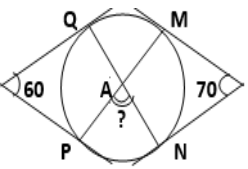
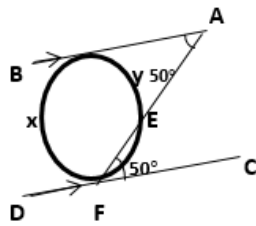
۱/۵	۵ در شکل مقابل اگر $\widehat{AFC} = 50^\circ$ و $AB \parallel CD$ باشد، آنگاه مقدار x و y را بدست آورید. 
۲	۶ ثابت کنید هرگاه از نقطه M خارج دایره $C(O,R)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T' نقاط تماس باشند، آنگاه مطلوب است: الف) اندازه دو مماس برابرند. ب) اگر زاویه بین دو مماس 60° باشد، نسبت $\frac{R}{OM}$ را بیابید.  ج) $TT' = \frac{2R \times MT}{OM}$
۱/۵	۷ شعاع های دو دایره متخارج را بدست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.
۱/۵	۸ در شکل روبرو مقدار x و y را بدست آورید. 
صفحه ی ۲ از ۴	

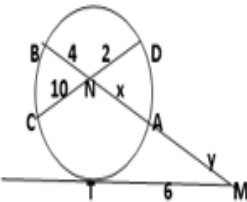
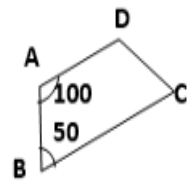
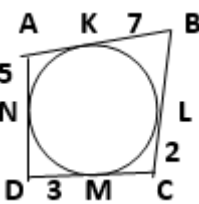
۱/۵	۹ اگر شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید : $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$	۹
۱	۱۰ دو زاویه مجاور یک چهارضلعی محاطی 50° و 100° است. قدر مطلق تفاضل دو زاویه دیگر چقدر است ؟ 	۱۰
۲	۱۱ الف) نشان دهید اگر یک چهارضلعی محیطی باشد، آنگاه مجموع اندازه های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه های دو ضلع دیگر است ؟ ب) در شکل زیر دایره محاطی در نقاط K و L و M و N بر اضلاع چهارضلعی مماس است. محیط چهارضلعی را بدست آورید. 	۱۱

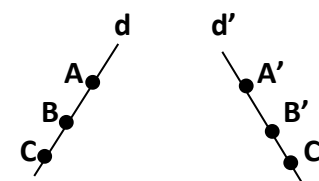
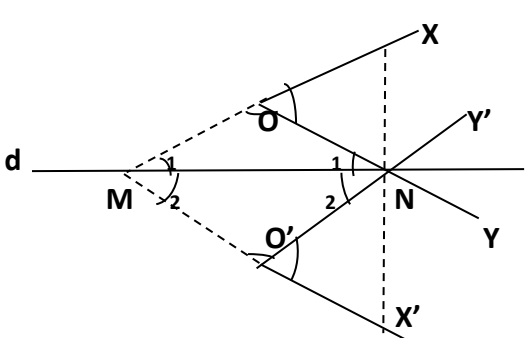
۱۲	ثابت کنید تصویر هر خط راست تحت اثر تبدیل طولیا، خطی راست است.	۱/۵
۱۳	ثابت کنید بازتاب یک زاویه نسبت به یک محور، زاویه ای برابر با آن است.	۱/۵
۱۴	اگر طول خط المرکزین دو دایره ۸ و شعاع های آنها $a+3$ و $2a-5$ باشد، مقدار a را طوری تعیین کنید که این دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند.	۱
صفحه ی ۴ از ۴		



کلید سؤالات پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	الف (طولی ب) مکمل ج (یک - خط بر دایره مماس است	
۲	فرض: $AH=HB$  حکم $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ \text{ (یا } CD \perp AB) \\ \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{array} \right.$ $AH = HB$ $OA = OB = r$ $OH = OH$ $\xRightarrow{\text{(ض ض ض)}} \Delta AOH \cong \Delta BOH \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BD} \\ \widehat{H_1} = \widehat{H_2} \rightarrow \widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 180 \\ \rightarrow \widehat{H_1} = 90 \rightarrow CD \perp AB \end{array} \right.$	
۳	از B به نقطه O، (مرکز دایره) وصل می‌کنیم: $BO = OD = R \Rightarrow \Delta BOD \Rightarrow \widehat{OBD} = \widehat{ODB}$ حال با توجه به اینکه زاویه AOB، زاویه خارجی مثلث BOD می‌باشد، داریم: $\widehat{AOB} = 2\widehat{ODB}$ $\Rightarrow \widehat{ODB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ $\widehat{AOB} = \widehat{AB}$: زاویه مرکزی 	
۴	 $70^\circ = \frac{(\widehat{QM} + \widehat{PQ} + \widehat{PN}) - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow \widehat{QM} + \widehat{PQ} + \widehat{PN} - \widehat{MN} = 140^\circ$ $60^\circ = \frac{(\widehat{QM} + \widehat{MN} + \widehat{PN}) - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow \widehat{QM} + \widehat{MN} + \widehat{PN} - \widehat{PQ} = 120^\circ$ از جمع دو تساوی بالا داریم: $2\widehat{QM} + 2\widehat{PN} = 260^\circ \Rightarrow \widehat{QM} + \widehat{PN} = 130^\circ$ از طرفی مطابق با زاویه بین وترهای متقاطع درون دایره داریم: $\widehat{A} = \frac{\widehat{QM} + \widehat{PN}}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$	
۵	 $50^\circ = \widehat{AFC} = \frac{\widehat{FE}}{2} \Rightarrow \widehat{FE} = 100$ $AB \parallel CD$: زاویه ظلّی $\widehat{A} = \widehat{AFC} = 50^\circ$: زاویه امتداد وتر $50^\circ = \widehat{A} = \frac{x-y}{2} \rightarrow x - y = 100^\circ$ $x + y = 360 - 100 \rightarrow x + y = 260$ $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 180^\circ \\ y = 80^\circ \end{array} \right.$	

$\left[\begin{array}{l} OM = OM \\ \widehat{T} = \widehat{T}' = 90 \xrightarrow{\text{وتر یک ضلع}} \Delta OTM \cong \Delta OT'M \Rightarrow \\ OT = OT' = R \end{array} \right.$	الف $MT = MT'$ $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \rightarrow$ OM نیمساز $\widehat{MTT'}$ زاویه است. ب $\sin 30^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{R}{OM} = \frac{1}{2}$ ج (مساحت چهارضلعی MTOT' را به دو روش می نویسیم: 1) $S(MTOT') = \frac{1}{2} OM \times TT'$ 2) $S(MTOT') = 2S(MTO) = 2 \times \frac{1}{2} \times OT \times MT \Rightarrow \frac{1}{2} OM \times TT' = OT \times MT \rightarrow TT' = \frac{2R \times MT}{OM}$	۶
$\left[\begin{array}{l} TT'^2 = d^2 - (R - R')^2 \\ TT'^2 = d^2 - (R + R')^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 63 = 64 - (R - R')^2 \\ 15 = 64 - (R + R')^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} R - R' = 1 \\ R + R' = 7 \end{array} \right. \Rightarrow 2R = 8 \Rightarrow R = 4 \Rightarrow R' = 3$	۷	
 با توجه به رابطه طولی وترهای متقاطع درون دایره، داریم : $NA \times NB = NC \times ND \Rightarrow x \times 4 = 10 \times 2 \Rightarrow x = 5$ اکنون از رابطه طولی قاطع و مماس استفاده می کنیم : $MT^2 = MA \times MB \Rightarrow 6^2 = y(y + 9)$$\Rightarrow y^2 + 9y - 36 = 0 \Rightarrow (y - 3)(y + 12) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = -12 \end{array} \right. \text{ غ ق}$	۸	
$S = rp \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{p}{S}$$r_a = \frac{S}{p-a} \Rightarrow \frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{S}$$r_b = \frac{S}{p-b} \Rightarrow \frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{S}$$r_c = \frac{S}{p-c} \Rightarrow \frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{S}$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p-(a+b+c)}{S} = \frac{3p-2p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$	۹	
 $\left. \begin{array}{l} \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 100^\circ + \widehat{C} = 180^\circ \\ 50^\circ + \widehat{D} = 180^\circ \end{array} \right.$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{C} = 80^\circ \\ \widehat{D} = 130^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \widehat{C} - \widehat{D} = 80^\circ - 130^\circ = 50^\circ$	۱۰	
الف (فرض می کنیم محل تماس دایره محاطی این چهارضلعی با اضلاع آن ، نقاط K,L,M,N باشند. حال با توجه به اینکه طول مماس های مرسوم بر یک دایره از یک نقطه خارج از آن ، با یکدیگر برابرند، داریم :  $\left. \begin{array}{l} AK = AN \\ BK = BL \\ CL = CM \\ DM = DN \end{array} \right\} \Rightarrow AK + KB + CM + MD = AN + BL + CL + DN \Rightarrow AB + CD = BC + AD$ ب (می دانیم طول مماس های مرسوم بر دایره از آن، باهم برابرند، پس داریم: $\left. \begin{array}{l} AK = AN = 5 \\ DN = DM = 3 \\ CM = CL = 2 \\ BL = BK = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow AK + KB + BL + LC + CM + MD + DN + NA = AB + BC + CD + DA = 34$	۱۱	

فرض: T تبدیلی ایزومتري و d خطی راست است. حکم: تصویر خط راست، خطی راست است. برهان: فرض می‌کنیم A و B و C سه نقطه‌ی دلخواه روی خط d باشند و A بین B و C قرار داشته باشد. باید ثابت کنیم $T(A)$ و $T(B)$ و $T(C)$ روی یک خط راست می‌باشند. فرض می‌کنیم: $T(A)=A'$, $T(B)=B'$, $T(C)=C'$ و چون $AB+BC=AC$ و چون T تبدیلی طولیا است، پس: $AB=A'B'$ و $BC=B'C'$ و $AC=A'C'$ پس: $A'B'+B'C'=A'C'$ یعنی A' و B' و C' روی یک خط راست قرار دارند. 	۱۲
فرض می‌کنیم در شکل زیر بازتاب زاویه XOY تحت بازتاب نسبت به خط d زاویه‌ی $X'O'Y'$ است. باید ثابت کنیم: $\widehat{O} = \widehat{O'}$. امتداد OX و OX' محور بازتاب را در نقطه‌ی M قطع می‌کند. همچنین نقطه N محل برخورد OY و $O'Y'$ با محور بازتاب است. چون $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ و $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$ و زاویه‌های XOY و $X'O'Y'$ به ترتیب زاویه‌های خارجی مثلث‌های $\triangle OMN$ و $\triangle O'MN$ هستند، پس $XOY = X'O'Y'$. 	۱۳
فرض کنیم $R = a + 3$ و $R' = 2a - 5$ و $OO' = 8$ و با توجه به اینکه در مسئله گفته شده فقط یک مماس مشترک داشته باشد. پس دو دایره مماس داخل اند. یعنی باید: $OO' = R - R'$ لذا: $8 = a + 3 - 2a + 5 \rightarrow 8 = -a + 8 \rightarrow \begin{cases} 8 = -a + 8 \Rightarrow a = 0 \rightarrow R' = -5 \\ 8 = -(a + 8) = a - 8 \Rightarrow a = 16 \end{cases}$ غ ق ۵	۱۴
نام و نام خانوادگی مصحح:	جمع بارم: ۲۰ نمره

امضاء: