



۱ اگر داده‌های آماری ۱۱, ۱۵, ۱۷, ۱۴, ۱۶, ۱۲, ۱۳, ۱۱, ۹, ۱۴, ۱۸, ۱۵ را با نمودار جعبه‌ای نشان دهیم، انحراف معيار داده‌های داخل جعبه کدام است؟

۱,۳

۱,۲۵

۱,۲

۱,۱

۲ در تابع خطی $f(x) = 2x + b$ اگر $f(5) = 4$ و $f(3x - 1) + 3f(1 - x) = 4$ باشد، کدام است؟

۶

۵

۴

۳

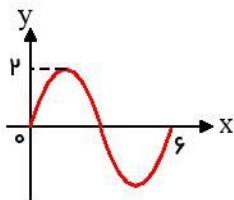
۳ در نمودار تابع $f(x) = x^3$ به ترتیب چهار عمل انجام می‌دهیم؛ انتقال ۴ واحد به طرف x های منفی - قرینه نسبت به محور x ها - دو برابر کردن برد - انتقال ۳ واحد به طرف y های منفی - معادله نمودار حاصل کدام است؟

$$y = -2x^3 + 16x - 35$$

$$y = -2x^3 - 16x - 35$$

$$y = 2x^3 - 16x - 29$$

$$y = 2x^3 - 8x - 11$$



۴ شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟

$\frac{5}{3}$

$\frac{8}{3}$

$\frac{4}{3}$

$\frac{7}{3}$

۵ دو ناس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداقل در سه پرتاب نتیجه حاصل می‌شود؟

$\frac{39}{64}$

$\frac{19}{32}$

$\frac{37}{64}$

$\frac{27}{64}$

۶ هشت داده‌ی آماری با میانگین ۱۵ و واریانس ۴ مفروض است. اگر دو داده‌ی ۱۲ و ۱۸ به آنها افزوده شود، واریانس ۱۰ داده‌ی حاصل کدام است؟

۵

۴,۸

۴,۵

۴

۷ در جدول فراوانی زیر، اگر میانگین داده‌ها ۱۸,۲۵ باشد، در نمودار دایره‌ای زاویه مربوط به بازه [۲۱, ۲۵] چند درجه است؟

حدود دسته	۹ - ۱۳	۱۳ - ۱۷	۱۷ - ۲۱	۲۱ - ۲۵	۲۵ - ۲۹
فراوانی	۳	۴	۷	x	۱

۶۰

۸۰

۷۵

۹۰

$$\left(\sqrt[3]{5\sqrt{5}}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\right) = x^{\sqrt{2}}$$

$\sqrt{2}$

۱

$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$

$(2)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

۸ در مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع قائم ۶ و ۸ واحد فاصله نقطه تلاقی میانه‌ها از بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟

۲

۱,۸

۱,۶

۱,۵

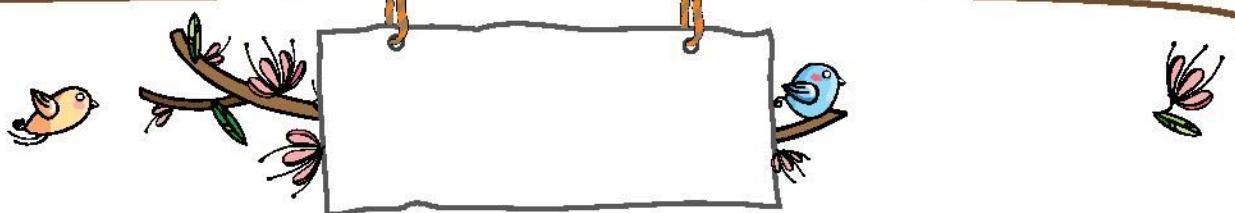
$$۹ اگر f یک تابع خطی باشد به طوری که $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 - 12x + 1}{2x}$ مقدار $f(-4)$ کدام است؟$$

-۵

-۳

-۱

۱



۱۱. اگر $f(x + \frac{1}{x}) = x^3 + \frac{1}{x^3}$ کدام است؟

$$4\sqrt{5}$$

$$2\sqrt{5}$$

$$3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{5}$$

۱۲. اگر $\log_A^{\sqrt[7]{-1}} = \frac{(4)^{0.75}}{1 + \sqrt[2]{1 + \sqrt[3]{1}} + 9^{0.25}}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{2}$$

$$-1$$

$$\frac{1}{2}$$

$$1$$

۱۳. در نمودار جعبه‌ای ۲۳ داده‌ی آماری، میانگین دنباله‌های سمت چپ و سمت راست به ترتیب ۶, ۲۱ و ۳۳ و میانگین داده‌های داخل و روی جعبه ۲۵ می‌باشد. میانگین کل این داده‌ها کدام است؟

$$26,2$$

$$26,1$$

$$26$$

$$25,8$$

۱۴. به ازای کدام مقادیر a ، معادله $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟

$$a > 4$$

$$a < 4$$

$$a > -4$$

$$a < -4$$

۱۵. اگر یکی از ریشه‌های معادله $2x^3 - x - 5 = 0$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

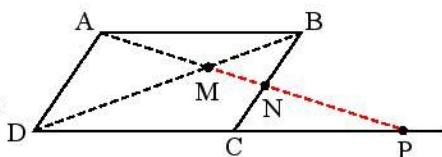
$$\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{2}$$

$$-2$$

۱۶. در شکل روبرو، $ABCD$ متوازی الاضلاع است. حاصل $MP \times MN$ برابر کدام است؟

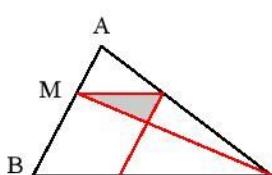


$$AD^r$$

$$AB^r$$

$$MA^r$$

$$MD^r$$



۱۷. در شکل مقابل، مساحت مثلث سایه زده چند درصد مساحت متوازی الاضلاع است؟

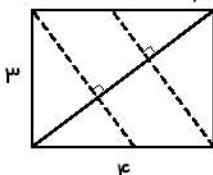
$$20$$

$$25$$

$$24$$

$$30$$

۱۸. در مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۴ واحد، از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی الاضلاع حاصل، کدام است؟



$$5,75$$

$$5,25$$

$$7,5$$

$$6$$

۱۹. در مثلث AH مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. مساحت مثلث اصلی ۷۶ برابر مساحت مثلث کوچکتر است. نسبت فواصل H از دو ضلع قائم کدام است؟

$$\frac{3}{8}$$

$$\frac{7}{12}$$

$$\frac{2}{8}$$

$$\frac{5}{12}$$

۲۰. حد عبارت $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ وقی x کدام است؟

$$-\infty$$

$$1$$

$$2$$

$$+\infty$$



۲۱ در نمودار جعبه‌ای ۲۰ داده‌ی آماری، میانگین داده‌های دنباله‌ی سمت چپ برابر میانگین داده‌های دنباله‌ی سمت راست است. انحراف معیار کدام است؟

جذر میانه ۳

۱ ۲

۰,۰۵ ۷

صفر ۱

۲۲ هشتاد داده‌ی آماری در ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. اگر ۲۰ داده‌ی جدید به این جدول افزوده شود فراوانی نسبی دسته‌ی وسط تغییر نمی‌کند. نسبت افزایش داده‌های دسته‌ی مذکور به فراوانی مطلق قبلی آن کدام است؟

$\frac{1}{6}$ ۳

$\frac{1}{4}$ ۲

$\frac{1}{5}$ ۷

$\frac{1}{8}$ ۱

۲۳ داده‌های آماری ۱۸, ۱۷, ۱۶, ۲۰, ۷, ۱۸, ۱۷, ۱۲, ۲۱, ۱۷, ۱۲, ۱۱, ۱۰, ۹, ۱۷, ۱۶, ۲۰, ۷, ۱۸, ۱۳ را با نمودار جعبه‌ای نشان می‌دهیم. واریانس داده‌های داخل جعبه نظریاً کدام است؟

۵,۷۱ ۳

۵,۲۴ ۲

۴,۹۵ ۷

۴,۵۹ ۱

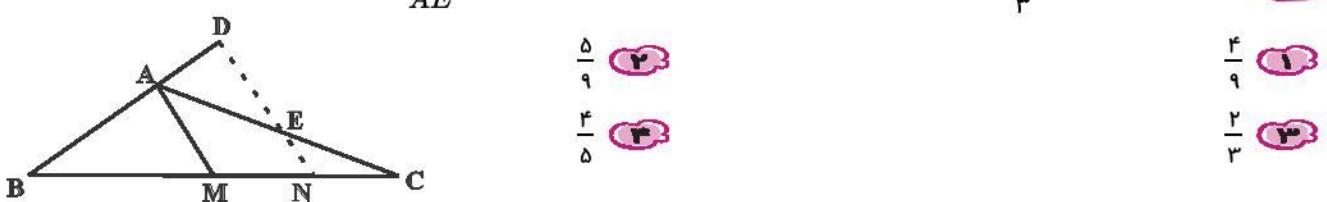
مرکز دسته	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	ضریب تغییرات، در داده‌های آماری زیر، با فراوانی تجمعی داده شده کدام است؟
فراوانی تجمعی	۷	۱۶	۳۳	۴۴	۵۰	۰,۱۸ ۲ ۰,۱۶ ۱ ۰,۲۸ ۳

$$\sqrt{x + \sqrt{-x^3 + 4x^2 + 25x - 100}} + \sqrt{x^2 + \sqrt{-x^3 + 6x - 8}} = x + 2 \quad \text{معادله‌ی ۲۵}$$

۰ ۳

۲ ۷

۱ ۱



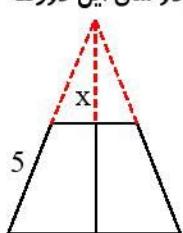
$\frac{5}{9}$ ۲

$\frac{4}{5}$ ۳

$\frac{4}{9}$ ۱

$\frac{2}{3}$ ۷

۲۷ در یک ذوزنقه متساوی الساقین، طول قاعده‌ها ۱۵ و ۹ واحد و اندازه‌ی ساق‌ها ۵ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو ساق این ذوزنقه از قاعده‌ی کوچک‌تر چند واحد است؟



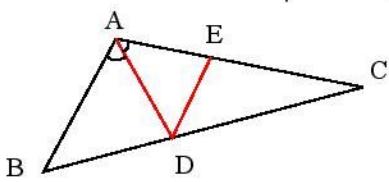
۶ ۲

۸ ۳

۵ ۱

۷ ۷

۲۸ در شکل مقابل $AD = 5AB$ و $DE = 3AC$ است. اندازه‌ی $\angle A$ نیمساز زاویه‌ی ECD کدام است؟



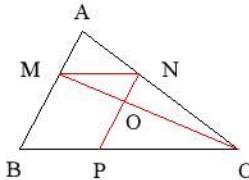
۱۲,۵ ۲

۱۵ ۳

۱۲ ۱

۱۳,۵ ۷

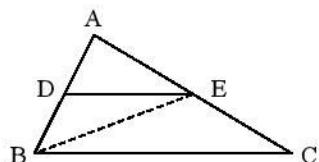
در شکل مقابل، OMN و چهار ضلعی $MNPB$ متوالی الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟



- ۶۰ ۲
۸۴ ۳

- ۶۳ ۱
۷۰ ۳

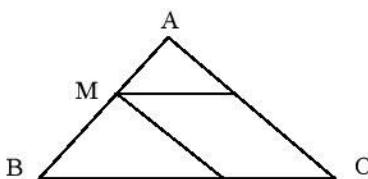
در مثلث ABC ، پاره خط DE موازی ضلع BC و $AD = \frac{4}{5}BD$ است. مساحت مثلث EBC چند برابر مساحت مثلث EBD است؟



- ۲,۲۵ ۲
۲,۷۵ ۳

- ۲ ۱
۲,۵ ۳

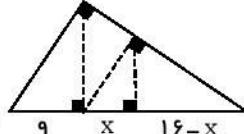
در شکل مقابل، $AM = \frac{2}{3}MB$ و چهار ضلعی متوالی الاضلاع است. مساحت متوالی الاضلاع چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



- ۵۰ ۲
۶۰ ۳

- ۴۸ ۱
۵۴ ۳

در شکل مقابل، ارتفاع هر سه مثلث قائم الزاویه رسم شده است. اندازه x کدام است؟

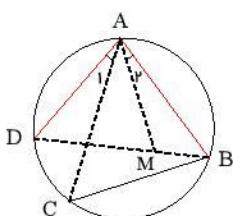


- ۵,۳۶ ۲
۶,۷۵ ۳

- ۴,۵۴ ۱
۵,۷۶ ۳

در مثلث ABC ، داریم $\hat{A} = 2\hat{B}$ و $BC = 6$ و $AC = 4$. اندازه x ضلع AB کدام است؟

- ۶ ۲
۵,۵ ۳
۵ ۱
۴,۵ ۳



در شکل مقابل، $AD \cdot BC = \hat{A}_1 = \hat{A}_2$ حاصل برابر کدام است؟

- $BM \cdot AC$ ۲
 $BD \cdot BM$ ۳

- $DM \cdot AC$ ۱
 $AB \cdot CD$ ۳

اگر انتهای کمان α در ناحیه 1 باشد عبارت $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ برابر کدام است؟

- $\cot \alpha$ ۲
 $\tan \alpha$ ۳
 $-\cot \alpha$ ۱
 $-\tan \alpha$ ۳

از دو معادله y از $x^3 - y^3 = 32$ و $\log_y^x = 1 + \log_y^{y+1}$ در پایه y کدام است؟

- ۲ ۲
 $\frac{3}{2}$ ۳
 $\frac{3}{4}$ ۱
 $\frac{1}{2}$ ۳

اگر $1 < 2^{-x}$ و $\log 2 = 0,3010$ با دورق اعشاری کدام است؟

- ۱۹,۹۷ ۲
۱۹,۹۴ ۳
۱۹,۹۱ ۱
۱۹,۸۹ ۳

۳۸ حاصل کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}}$$

۴ ۳

۲ ۲

-۲ ۲

-۴ ۱

۳۹ بر روی هر یک از چند کارت یکسان اعداد سه رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه اعداد $\{2, 4, 5, 6, 7\}$ را نوشه، به تصادف یک کارت از بین آنها بیرون می آوریم. با کدام احتمال دو رقم از اعداد این کارت ها فرد می باشد؟

۰,۴ ۳

۰,۳ ۲

۰,۲۵ ۲

۰,۲ ۱

۴۰ در ۲۵ داده‌ی آماری میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می باشد. اگر داده‌های ناجور ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰، از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده، کدام است؟

۱۶,۶۶ ۳

۱۵,۳۳ ۲

۱۴,۸۱ ۲

۱۴,۷۲ ۱

۴۱ در دسته‌بندی ۱۲۰ داده‌ی آماری در ۹ طبقه، دسته‌ی اول به صورت $25 - 22$ می باشد. می‌دانیم ۴۵ درصد داده‌ها کمتر از ۳۴ و فراوانی نسبی دسته‌ی وسط 20 است. تعداد داده‌های کمتر از 37 کدام است؟

۸۷ ۳

۷۸ ۲

۷۶ ۲

۶۷ ۱

۴۲ کوچکترین و بزرگترین داده‌های آماری ۳۱ و ۵۲ می باشند این داده‌ها در ۷ دسته، دسته‌بندی شده‌اند. ۳۷ درصد داده‌ها کمتر از ۴۰ و ۴۸ درصد آن‌ها بیشتر یا مساوی ۴۳ می باشند. اگر فراوانی کل ۸۰ باشد فراوانی دسته‌ی وسط کدام است؟

۱۶ ۳

۱۵ ۲

۱۲ ۲

۹ ۱

۴۳ داده‌های آماری در ۸ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. بازه‌ی دسته چهارم به صورت $(26, 29]$ می باشد. اگر این داده‌ها در ۶ طبقه دسته‌بندی شوند، مرکز دسته‌ی پنجم کدام است؟

۳۵,۵ ۳

۳۵ ۲

۳۴,۵ ۲

۳۴ ۱

۴۴ در داده‌های آماری $13, 12, 11, 12, 6, 6, 8, 8, 9, 11, 12, 3$ داده‌های کمتر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف کنید. ضریب تغییرات داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

۰,۲۵ ۳

۰,۲۱ ۲

۰,۱۷ ۲

۰,۱۵ ۱

۴۵ در نمودار جعبه‌ای ۳۱ داده‌ی آماری، میانگین داده‌های دنباله‌ی سمت چپ ۱۲ و سمت راست ۲۱ می باشد. اگر میانگین داده‌های داخل وروی جعبه ۱۵ باشد، میانگین کل این داده‌ها، تقریباً کدام است؟

۱۵,۷۶ ۳

۱۵,۶۷ ۲

۱۵,۵۴ ۲

۱۵,۴۵ ۱

۴۶ ضریب تغییرات داده‌ها در جدول فراوانی مقابل، کدام است؟

x_i	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
F_i	۳	۲	۱۲	۶	۱

۰,۲۵ ۳

۰,۲ ۲

۰,۱ ۲

۰,۰۸ ۱

۴۷ با توجه به جدول آماری دسته‌بندی شده زیر، مقدار ضریب تغییرات داده‌های x کدام است؟

$x - 44$	-۳	-۱	۱	۳	۵
فراوانی	۴	۷	۵	۳	۱

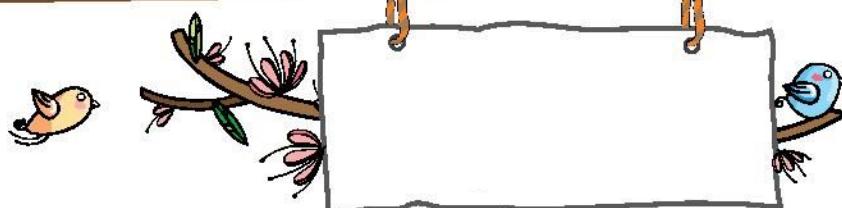
۰,۲ ۳

۰,۱ ۲

۰,۰۸ ۲

۰,۰۵ ۱





اگر واریانس برابر ۶ باشد، فراوانی

حدود دسته	۵ - ۷	۷ - ۹	۹ - ۱۱	۱۱ - ۱۳	۱۳ - ۱۵
فراوانی	۳	۲	a	۶	۱

در داده‌هایی با جدول فراوانی ۴۸

دسته‌ی سوم، کدام است؟

۷ ۳

۶ ۳

۵ ۲

۴ ۱

جدول زیر فراوانی نسبی داده‌های دسته‌بندی شده است، با تعیین α ، مقدار واریانس کدام است؟ ۴۹

مرکز دسته	۸	۱۲	۱۶	۲۰
فراوانی دسته	۰,۱	۰,۲۵	۰,۲	α

۱۶,۸ ۳

۱۶,۵ ۱

۱۷,۶ ۳

۱۷,۲ ۳

اگر میانگین داده‌های دسته‌بندی شده، برابر ۱۶ باشد، با تعیین فراوانی دسته‌ی چهارم مقدار واریانس کدام است؟ ۵۰

نماینده دسته	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۵	۷	۱۰	a	۳

۴,۹۲ ۳

۴,۸۵ ۱

۵,۷۴ ۳

۵,۵۵ ۳

پاسخنامه تشریحی

گزینه ۱ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$\underbrace{9, 11, 11, 12, 14}_{\text{میانه}}, \underbrace{14, 15, 15, 16, 17, 18}_{\rightarrow} \rightarrow 16 = \text{چارک سوم} \quad 11 = \text{چارک اول}$$

داده‌های داخل جعبه عبارتند از: ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸ و می‌توانیم برای راحتی کار از همه داده‌ها ۱۱ واحد کم کنیم (انحراف معیار تغییر نمی‌کند) و داده‌های جدید عبارتند از: ۱, ۳, ۳, ۴, ۴

$$\bar{x} = \frac{1+3+3+4+4}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{5} ((1-3)^2 + (3-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (4-3)^2)$$

$$= \frac{6}{5} = 1,2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{1,2} \approx 1,1$$

تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ نشان داده می‌شود.

$$f(3x-1) + 3f(1-x) = 4 \rightarrow a(3x-1) + b + 3(a(1-x) + b) = 4$$

$$\rightarrow 3ax - a + b + 3a - 3ax + 3b = 4 \rightarrow 2a + 4b = 4 \rightarrow a + 2b = 2$$

$$f(5) = 2 \rightarrow 5a + b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 2 \\ 5a + b = 2 \end{cases} \rightarrow a = \frac{2}{9}, b = \frac{8}{9} \rightarrow f(x) = \frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$$

$$\rightarrow f(14) = \frac{28}{9} + \frac{8}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

گزینه ۲

به ترتیب اعمال مورد نظر را انجام می‌دهیم:

$$f(x) = x^3 \xrightarrow{\text{انتقال ۴ واحد به طرف } x \text{ های منفی}} f_1(x) = (x+4)^3 \xrightarrow{\text{فرموده نسبت به محور } x \text{ ها}} f_2(x) = -(x+4)^3$$

$$\xrightarrow{\text{دو برابر کردن بر}} f_3(x) = -2(x+4)^3 \xrightarrow{\text{انتقال ۳ واحد به طرف } y \text{ های منفی}} f_4(x) = -2(x+4)^3 - 3$$

$$f_4(x) = -2(x^3 + 8x^2 + 16x + 16) - 3 \rightarrow y = -2x^3 - 16x^2 - 32x - 35$$

گزینه ۳ دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ برای $\frac{2\pi}{|k|}$ می‌باشد.

$$y = a \sin(b\pi x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

باتوجه به شکل داده شده a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند و چون همه گزینه‌ها مثبت می‌باشند پس $b = \frac{1}{3}$ قابل قبول است. بیشترین مقدار این تابع از روی شکل ۲ می‌باشد و

بیشترین مقدار $y = a \sin(b\pi x)$ زمانی رخ می‌دهد که سینوس برابر ۱ باشد

$$\text{بنابراین } 2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ است پس } a = \frac{7}{3}$$

گزینه ۴ در هر پرتاب احتمال آنکه هر دو تاس زوج باشند، برابر با $\frac{1}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ است ولذا احتمال آنکه هر دو تاس زوج نباشند، A_1 است. اگر i پیشامد

این باشد که در پرتاب n آم تیجه حاصل شده باشد، یعنی در $(1 - i)$ پرتاب قبلی هر دو تاس زوج نبوده و در پرتاب n آم هر دو تاس زوج ظاهر شده است، پس $P(A_i) = \left(\frac{1}{4}\right)^{i-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$

بنابراین احتمال آنکه حداقل در ۳ پرتاب تیجه حاصل شود، برابر است با:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} = \frac{37}{64}$$

یا به زبان ساده تر:

$\frac{1}{4}$: پرتاب اول هر دو زوج باشد

$\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$: پرتاب اول هر دو زوج نباشد و پرتاب دوم هر دو زوج باشد

$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$: پرتاب اول و پرتاب دوم هر دو زوج نباشند و پرتاب سوم هر دو زوج باشد.

$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} = \frac{37}{64}$ پس گزینه ۳ صحیح است.

$$\bar{x} = 15 \Rightarrow \frac{x_1 + x_r + \dots + x_\lambda}{\lambda} = 15 \Rightarrow x_1 + x_r + \dots + x_\lambda = 120.$$

$$\begin{aligned}\sigma^r &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^r = r \Rightarrow \frac{1}{\lambda} ((x_1 - 15)^r + (x_r - 15)^r + \dots + (x_\lambda - 15)^r) = r \\ &\Rightarrow (x_1 - 15)^r + (x_r - 15)^r + \dots + (x_\lambda - 15)^r = 32\end{aligned}$$

چون میانگین دو عدد ۱۲ و ۱۸ برابر ۱۵ است پس در ده داده‌ی حاصل میانگین تغییر نمی‌کند.

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{میانگین}}^r &= \frac{1}{10} \underbrace{((x_1 - 15)^r + (x_r - 15)^r + \dots + (x_\lambda - 15)^r)}_{32} + (12 - 15)^r + (18 - 15)^r \\ &= \frac{1}{10} (32 + 9 + 9) = \frac{50}{10} = 5\end{aligned}$$

گزینه ۱ مراکز دسته‌ها به ترتیب ۱۱، ۱۵، ۱۶، ۱۹، ۲۳، ۲۷، ۳۳ برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱۹ واحد کم می‌کنیم.

$$\bar{x} - 19 = \frac{1}{15+x} ((3 \times (-8)) + (4 \times (-4)) + (2 \times 0) + (x \times 4) + (1 \times 8))$$

$$\rightarrow -9 = \frac{1}{15+x} (-24 - 16 + 4x + 8) \rightarrow -9 = \frac{4x - 32}{x + 15}$$

$$\rightarrow -9x - 135 = 4x - 32 \rightarrow 13x = 103 \rightarrow x = 5$$

$$d_i = \frac{360}{N} \times F_i = \frac{360}{15+5} \times 5 = 90^\circ$$

گزینه ۳ هر یک از پرانتزها را جداگانه ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[4]{\delta \sqrt[3]{\delta}} \right)^{\frac{r}{r}} &= \left(\sqrt[4]{\delta \times \delta^{\frac{1}{r}}} \right)^{\frac{r}{r}} = \left(\sqrt[4]{\delta^{\frac{1}{r}}} \right)^{\frac{r}{r}} = \left(\delta^{\frac{1}{4r}} \right)^{\frac{r}{r}} = \delta^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\delta} \\ \sqrt{\delta - 2\sqrt{\delta}} &= \sqrt{(\sqrt{\delta} - 1)^2} = \underbrace{|\sqrt{\delta} - 1|}_{+} = \sqrt{\delta} - 1 \\ \sqrt{\delta} - (\sqrt{\delta} - 1) &= x^{\frac{r}{r}} \rightarrow 1 = x^{\frac{r}{r}} \rightarrow x = 1\end{aligned}$$

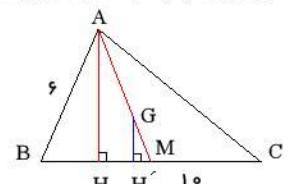
$$BC^r = AB^r + AC^r = r^r + \lambda^r \rightarrow BC = 10$$

گزینه ۴ طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

حال اگر G مرکز تقلیل مثلث باشد و از G عمود GH' را بر BC وارد کنیم، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}S &= \frac{r \times \lambda}{r} \\ S &= \frac{AH \times 10}{r} \end{aligned} \Rightarrow AH = \frac{r \times \lambda}{10} = 4, \lambda$$

$$\frac{GM}{AM} = \frac{GH'}{AH} = \frac{1}{r} \Rightarrow GH' = \frac{1}{r} AH = \frac{1}{r} \times 4, \lambda = 1, 6$$



بنابراین می‌توانیم نکته‌ی زیر را به خاطر بسپاریم:

فاصله‌ی محل تلاقی میانه‌های یک مثلث قائم الزاویه از وتر برابر است با $\frac{1}{3}$ ارتفاع وارد بر وتر.

گزینه ۴ تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ نشان داده می‌شود.



$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^r - 12x + 1}{2x} \rightarrow ax + b + \frac{a}{x} + b = \frac{ax^r + bx + a + bx}{x}$$

$$= \frac{ax^r + bx + a}{x} = \frac{2ax^r + 2bx + 2a}{2x} = \frac{x^r - 12x + 1}{2x} \xrightarrow{\text{نمایه}} a = \frac{1}{r}, 2b = -12, b = -6$$

بنابراین $f(x) = \frac{1}{r}x - 6 \rightarrow f(-r) = -2 - 6 = -8$

گزینه ۳ می‌دانیم: ۱۱

$$a^r + b^r = (a+b)^r - 2ab(a+b)$$

$$f(x + \frac{1}{x}) = x^r + \frac{1}{x^r} \rightarrow f(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})^r - 2x(\frac{1}{x})(x + \frac{1}{x})$$

$$\rightarrow f(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})^r - 2(x + \frac{1}{x})$$

$$\xrightarrow{x + \frac{1}{x} = t} f(t) = t^r - 2t \rightarrow f(\sqrt{8}) = (\sqrt{8})^r - 2\sqrt{8} = 8\sqrt{8} - 2\sqrt{8} = 6\sqrt{8}$$

گزینه ۳ می‌دانیم: ۱۲
ابتدا عبارت A را خلاصه می‌کنیم.

$$A = \frac{(r^r)^{\frac{1}{r}}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + (r^r)^{\frac{1}{r}} = \frac{\sqrt[2]{r}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt[2]{r}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt[2]{r} + 2 - 2\sqrt{6}}{(1 + \sqrt{2})^r - (\sqrt{3})^r} + \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt[2]{r} + 2 - 2\sqrt{6}}{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt[2]{r} + 2 - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt[2]{r} + 2 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2} + 2)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\log_A^{r-1} = \log_{1+\sqrt{r}}^{\frac{1}{r+1}} = \log_{1+\sqrt{r}}^{(\sqrt{r+1})^{-1}} = -1$$

توجه کنید که $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ است.

گزینه ۲ داده‌ی دوازدهم؛ میانه است. داده‌ی ششم؛ چارک اول و داده‌ی هجدهم؛ چارک سوم می‌باشند. بنابراین ۱۳ داده داخل و روی جعبه هستند و دنباله‌ی سمت چپ و سمت راست هر کدام شامل ۵ داده می‌باشند.

$$5 \times 21,6 = 108 = \text{مجموع داده‌های سمت چپ}$$

$$5 \times 33 = 165 = \text{مجموع داده‌های سمت راست} \rightarrow 33 = \text{میانگین داده‌های سمت راست}$$

$$13 \times 25 = 325 = \text{مجموع داده‌های داخل و روی جعبه} \rightarrow 25 = \text{میانگین داده‌های داخل و روی جعبه}$$

$$\frac{108 + 165 + 325}{33} = \frac{598}{33} = 26 = \text{میانگین کل داده‌ها}$$

گزینه ۱ ۱۴

$$x^r + (a-1)x^r + (r-a)x - r = 0$$

چون جمع ضرایب این معادله صفر است پس حتماً یک ریشه‌ی معادله $x = 1$ است و معادله بر $x - 1$ بخشیده است.

$$\begin{array}{r} x^r + (a-1)x^r + (r-a)x - r \\ -x^r + x^r \\ \hline ax^r + (r-a)x - r \\ -ax^r + ax \\ \hline rx - r \\ -rx + r \\ \hline \end{array}$$

صفر

بنابراین عبارت درجه‌ی سوم به صورت $(x-1)(x^r + ax + r) = 0$ تجزیه می‌شود یک ریشه‌ی این معادله $x = 1$ است پس معادله‌ی درجه‌ی دوم در پرانتز دوم باید دارای ۲ ریشه

ی متمایز مثبت باشد (چون سوال گفته معادله دارای ۳ ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد)

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow a^2 - 16 > 0 \rightarrow a^2 > 16 \rightarrow a > 4 \text{ یا } a < -4 \quad (I)$$

$$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow -a > 0 \rightarrow a < 0 \quad (II)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow c > 0 \quad (III)$$

از اشتراک I, II, III به جواب $a < -4$ می‌رسیم.

گزینه ۲ ابتدا با قرار دادن $x = 2$ در معادله‌ی داده شده، a را می‌باشیم:

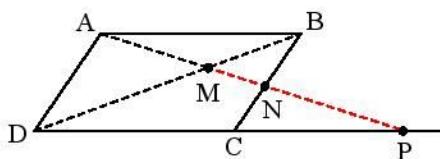
$$x(ax^2 - x - 5) = 2 \xrightarrow{x=2} 2(4a - 2 - 5) = 2 \Rightarrow 4a - 4 = 1 \Rightarrow a = 2$$

پس معادله به صورت $2x^2 - x - 5 = 0$ می‌شود. حال با تقسیم معادله بر ۲ آن را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$2x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow (x - 2)(2x + 3) = 0$$

می‌دانیم مجموع دو ریشه‌ی دیگر که ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داخل براتز می‌باشند، برابر با $-\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$ می‌شود.

گزینه ۳ از قضیه تالس به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

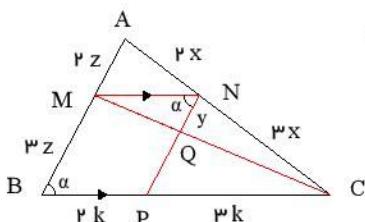


$$\left. \begin{array}{l} BN \parallel AD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{AM} = \frac{BM}{MD} \\ AB \parallel DP \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BM}{MD} = \frac{AM}{MP} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{MN}{AM} = \frac{AM}{MP}$$

$$\Rightarrow AM^2 = MN \times MP$$

گزینه ۴ از قضیه تالس به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم $MB = 3z$ و $AM = 2z$ باشد، حال طبق قضیه‌ی تالس $NC = 3x$ و $AN = 2x$ خواهد بود. (چون $BMNP$ متوازی الاضلاع است و $MN \parallel BC$). از طرفی در مثلث AMC ضلع NQ هم با AM موازی است، پس اگر فرض کنیم



داریم: $NQ = y$

$$\frac{y}{2} = \frac{3x}{2x+3x} \Rightarrow y = \frac{6}{5}$$

هم چین باز بر طبق تالس:

$$\frac{NC}{NA} = \frac{CP}{BP} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{PC}{BP} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} PC = 3k \\ BP = 2k = MN \end{array} \right.$$

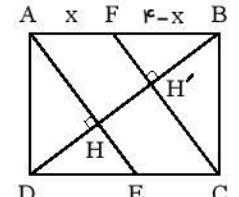
$$\frac{S_{\Delta MNQ}}{S_{BMNP}} = \frac{\frac{1}{2} \times MN \times NQ \times \sin \alpha}{MB \times BP \times \sin \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \times 2k \times \frac{6}{5} \times \sin \alpha}{3 \times 2k \times \sin \alpha} = \frac{1}{5} = 20\%$$

حال خواهیم داشت:

$$\triangle ABD : AB^2 + AD^2 = BD^2 \rightarrow 4^2 + 4^2 = BD^2 \rightarrow BD = 4\sqrt{2}$$

$$\triangle ABD : AD^2 = DH \times BD \rightarrow 4 = DH \times 4\sqrt{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} DH = \frac{4}{\sqrt{2}} \\ BH' = \frac{4}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

گزینه ۵ از قضیه تالس:

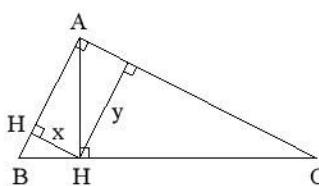


$$\rightarrow HH' = BD - DH - BH' = 4\sqrt{2} - \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\triangle ABH : FH' \parallel AH \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BF}{AB} = \frac{BH'}{BH} \rightarrow \frac{4-x}{4} = \frac{\frac{4}{\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{16} \rightarrow 16 - 4x = 1 \rightarrow x = \frac{15}{4}$$

$$S_{AFCE} = AD \times AF = 4 \times x = 4 \times \frac{15}{4} = 15 = 15$$

گزینه ۱ ۱۹

مساحت مثلث ABC را S و مساحت مثلث ABH را S' و مساحت مثلث ACH را S'' می‌نامیم.

$$\frac{S}{S'} = 6,76 \rightarrow \frac{S' + S''}{S'} = 6,76 \xrightarrow{\text{تفکیک}} 1 + \frac{S''}{S'} = 6,76 \rightarrow \frac{S''}{S'} = 5,76$$

چون دو مثلث ACH و ABH متشابه هستند، بنابراین نسبت مساحت‌های آنها برابر مجدد نسبت تشابه است. لذا داریم:

$$\frac{S''}{S'} = 5,76 = k^2 \rightarrow k = 2,4$$

طرح سوال نسبت ارتفاع‌های دو مثلث متشابه را خواسته است که همان برابر نسبت تشابه است.

$$\frac{y}{x} = 2,4 = \frac{24}{10} = \frac{12}{5} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{12}$$

گزینه ۲ ۲۰

می‌توان برای رفع ابهام از روابط مثلثاتی استفاده نمود. بدین منظور مخرج کسر را در مزدوج ضرب کنید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x(1 + \sin x)}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

گزینه ۱ ۲۱

$$\text{میانه} = \frac{x_{10} + x_1}{2}$$

در ۲۰ داده‌ی آماری، میانه برابر با میانگین داده‌های دهم و یازدهم است:

$$Q_1 = \frac{x_5 + x_7}{2}$$

$$Q_3 = \frac{x_{15} + x_{17}}{2}$$

و چارک سوم، میانه‌ی ۱۵ داده‌ی آخر است، یعنی برابر با میانگین داده‌های پانزدهم و شانزدهم:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{دنده‌ی چپ} & & & \text{دنده‌ی راست} & & & \\ \overbrace{x_1, \dots, x_5}^{\downarrow}, & x_6, \dots, x_{10}, & x_{11}, \dots, x_{15}, & \overbrace{x_{16}, \dots, x_{20}}^{\downarrow} & Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{array}$$

بنا به فرض، میانگین دنباله‌ی سمت چپ و دنباله‌ی سمت راست با هم برابر است پس:

$$\frac{x_1 + \dots + x_5}{5} = \frac{x_{16} + \dots + x_{20}}{5} \Rightarrow x_1 + \dots + x_5 = x_{16} + \dots + x_{20}.$$

اما می‌دانیم داده‌های دنباله‌ی چپ همواره کوچک‌تر یا مساوی داده‌های دنباله‌ی راست‌اند. پس:

$$x_1 + \dots + x_5 \leq x_{16} + \dots + x_{20}.$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{10} = x_{11} = \dots = x_{20}.$$

پس حالت نتساوی تنها زمانی رخ می‌دهد که همه‌ی داده‌ها با هم برابر باشند، یعنی:

بنابراین در این داده‌ها، شخص‌های پراکندگی از جمله انحراف معیار، برابر صفر است.

گزینه ۳ ۲۲

$$\left. \begin{array}{l} \text{فراوانی مطلق دسته‌ی وسط قلی از تغییر} \\ N = N = 80 \\ \text{تعداد کل داده‌های جامعه قلی از تغییر} \\ a = a = 20 \\ \text{تعداد داده‌های افزایش یافته در دسته‌ی وسط} \\ N + 20 = 100 \end{array} \right\} \xrightarrow{\substack{\text{فراوانی مطلق} \\ \text{تعداد کل داده‌ها}}} \left. \begin{array}{l} \frac{x}{80} = \text{فراوانی نسبی دسته‌ی وسط قلی از تغییر} \\ \frac{x+a}{100} = \text{فراوانی نسبی دسته‌ی وسط بعد از تغییر} \end{array} \right\}$$

در سوال گفته شده است که فراوانی نسبی دسته‌ی وسط تغییر نکرده است و باید $\frac{a}{x}$ را پیدا کیم

$$\frac{x}{80} = \frac{x+a}{100} \rightarrow 100x = 80x + 80a \rightarrow 20x = 80a \rightarrow \frac{a}{x} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$$

گزینه ۴ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

گزینه ۲ ۲۳

۷, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۲۰, ۲۱
میانه

چارک اول برابر $\frac{۱۰+۱۱}{۲} = ۱۰,۵$ و چارک سوم برابر $\frac{۱۷+۱۸}{۲} = ۱۷,۵$ است. بنابراین داده‌های بین ۱۰,۵ و ۱۷,۵ داخل جعبه قرار می‌گیرند. یعنی:

۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۶, ۱۷, ۱۸

$$\bar{x} = \frac{۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸}{۶} = \frac{۹۸}{۶} = ۱۶$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{6} \left((۱۱ - ۱۶)^2 + (۱۲ - ۱۶)^2 + (۱۳ - ۱۶)^2 + (۱۶ - ۱۶)^2 + (۱۷ - ۱۶)^2 + (۱۸ - ۱۶)^2 \right) \\ &= \frac{1}{6} (۹ + ۴ + ۹ + ۱ + ۹ + ۴) = \frac{۴۰}{6} \approx ۶,۶7\end{aligned}$$

گزینه ۳ ابتدا جدول داده شده را براساس فراوانی مطلق می‌نویسیم (اختلاف فراوانی تجمعی دو دسته‌ی i و $i+1$ ، فراوانی مطلق دسته‌ی i را می‌دهد).

فرافانی	مرکز دسته	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
		۷	۹	۱۲	۱۱	۶

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱ واحد کم می‌کنیم و می‌دانیم اگر از تمام داده‌ها مقداری ثابت کم کنیم انحراف معیار تغییر نمی‌کند.

$$\bar{x} - ۱۰ = \frac{1}{۶} ((۷ \times (-۴)) + (۹ \times (-۲)) + (۱۲ \times ۰) + (۱۱ \times ۲) + (۶ \times ۴))$$

$$\rightarrow \bar{x} - ۱۰ = \frac{1}{۶} (-۲۸ - ۱۸ + ۲۴ + ۲۴) \rightarrow \bar{x} - ۱۰ = ۰ \rightarrow \bar{x} = ۱۰$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{6} \left(۷(-۴-۱۰)^2 + ۹(-۲-۱۰)^2 + ۱۲(۰-۱۰)^2 + ۱۱(۲-۱۰)^2 + ۶(۴-۱۰)^2 \right) \\ &= \frac{1}{6} (۱۱۲ + ۳۶ + ۰ + ۴۴ + ۹۶) = \frac{۲۸۸}{6} = ۶,۴7 \rightarrow \sigma = ۲,۶\end{aligned}$$

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۲,۶}{۱۰} = ۰,۶۷$$

گزینه ۱ شرط اولیه‌ی جواب آن است که زیر رادیکال‌ها بزرگتر مساوی صفر باشد.

$$-x^2 + ۴x^2 + ۲\Delta x - ۱۰۰ \geq ۰ \rightarrow x^2 - ۴x^2 - ۲\Delta x + ۱۰۰ \leq ۰$$

$$\rightarrow x^2(x - ۴) - ۲\Delta(x - ۴) \leq ۰ \rightarrow (x - ۴)(x^2 - ۲\Delta) \leq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\text{عبارت}} \leq ۰ \quad | \quad -\infty \quad -۴ \quad ۰ \quad ۰ \quad +\infty \Rightarrow x \leq -۴ \text{ یا } ۰ \leq x \leq ۴ \quad (I)$$

$$-x^2 + ۴x - \Delta \geq ۰ \rightarrow x^2 - ۴x + \Delta \leq ۰ \rightarrow (x - ۲)(x - ۲) \leq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\text{عبارت}} \leq ۰ \quad | \quad -\infty \quad ۰ \quad ۲ \quad +\infty \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۲ \quad (II)$$

نتها اشتراک بین I و II عدد $x = ۲$ است که در معادله هم صدق می‌کند (امتحان کنید) پس معادله فقط یک جواب دارد.

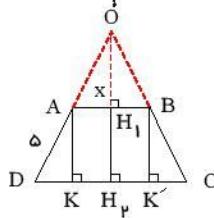
گزینه ۳

۲۶

$$\left. \begin{array}{l} AM \parallel DN \xrightarrow{\text{قضیه زوایه}} \frac{AB}{AD} = \frac{BM}{MN} \\ AM \parallel EN \xrightarrow{\text{قضیه زوایه}} \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{MC} \end{array} \right\} \xrightarrow{BM=MC} \frac{AB}{AD} \times \frac{AE}{AC} = \frac{BM}{MN} \times \frac{MN}{MC} = 1 \Rightarrow AB \times AE = AD \times AC$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\frac{AB}{AC} = \frac{۲}{۳}} \frac{AD}{AE} = \frac{۲}{۳}$$

گزینه ۲ اگر ارتفاع‌های AK و BK' را رسم کنیم آنگاه دو مثلث قائم الزاویه ADK و $BK'C$ همنهشت می‌شوند پس $DK = K'C$ داریم:



$$DK = \frac{CD - AB}{2} = \frac{15 - 9}{2} = 3$$

فیثاغورس: $AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \Rightarrow H_1 H_2 = 4$

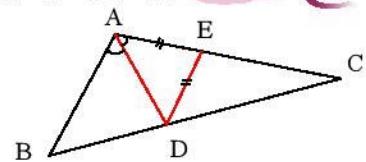
در مثلث قائم الزاویه DAK داریم:

از طرفی $AB \parallel DC$ است پس در مثلث تالس می‌نویسیم:

$$\text{و } \triangle D H_2 : \frac{O H_1}{O H_2} = \frac{A H_1}{D H_2} \Rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}} \Rightarrow 5x = 3x + 12 \Rightarrow x = 6$$

بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌گیریم $AD = AE$, $\hat{D}_1 = \hat{A}_1$, $\hat{D}_2 = \hat{A}_2$. بنابراین $DE = AE$ داریم:

$$\Delta AB = 3AC = 60 \Rightarrow \begin{cases} AC = 20 \\ AB = 12 \end{cases}$$



قضیه تالس

$$DE \parallel AB \longrightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

$$\frac{DE}{12} = \frac{EC}{20} \xrightarrow{DE=AE} \frac{AE}{12} = \frac{EC}{20}$$

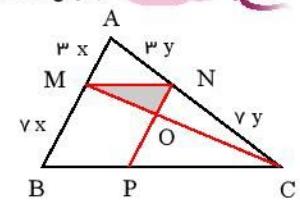
ترکیب در صورت

$$\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{12}{20} \longrightarrow \frac{AC}{EC} = \frac{32}{20} \Rightarrow \frac{20}{EC} = \frac{32}{20} \Rightarrow EC = 12.5$$

از فرض تست و قضیه‌ی تالس شکل زیر را نتیجه می‌گیریم.

$$ON \parallel AM \Rightarrow \frac{CN}{CA} = \frac{ON}{AM} \Rightarrow \frac{y}{10y} = \frac{ON}{3x} \Rightarrow ON = \frac{21}{10}x$$

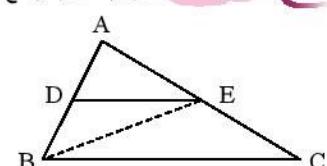
$$\frac{S_{OMN}}{S_{AMN}} = \frac{\frac{1}{2}ON \times MN \sin \hat{N}}{\frac{1}{2}AM \times MN \sin \hat{M}} \xrightarrow{\hat{N}=\hat{M}} \frac{S_{OMN}}{S_{AMN}} = \frac{ON}{AM} = \frac{\frac{21}{10}x}{3x} = \frac{7}{10} = 70\%$$



در دو مثلث با ارتفاع‌های بسانان نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌هایست.

$$\frac{S_{EBC}}{S_{AEB}} = \frac{EC}{AE} = \frac{BD}{AD} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{S_{EBD}}{S_{AEB}} = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{9}$$



دو رابطه‌ی فوق را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{S_{EBC}}{S_{AEB}} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{S_{EBC}}{S_{EBD}} = \frac{9}{4} = 2.25$$

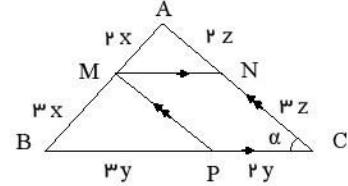
با توجه به فرض تست داریم:

گزینه ۱

$$AM = \frac{2}{3} MB \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$$

$$MP \parallel AC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BM}{MA} = \frac{BP}{PC} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{S_{MNPC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{2y \times 3z \times \sin \alpha}{2}}{\frac{1}{2} \times 3y \times 2z \times \sin \alpha} = \frac{6}{12} = \frac{12}{24} = \frac{48}{100}$$

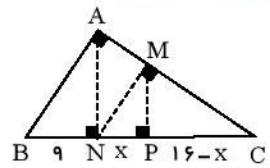


پس مساحت متوازی الاضلاع ۴۸ درصد مساحت مثلث ABC است. توجه کنید که مساحت مثلث برابر نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین دو ضلع می باشد.

گزینه ۳۲: AN و MN و AB و MP موازی هم و AN نیز موازی هم می باشند.

$$\triangle ABC : MN \parallel AB \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NP} = \frac{16}{9} \quad (I)$$

$$\triangle ACN : MP \parallel AN \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CP}{PN} = \frac{16-x}{x} \quad (II)$$



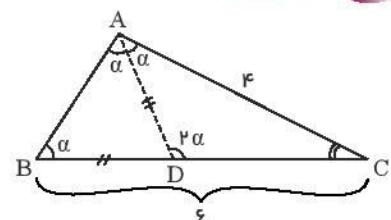
$$I, II \xrightarrow{\substack{\text{نسبت در فرود تناسب وجود دارد} \\ \frac{CM}{MA} = \frac{16}{9}}} \frac{16}{9} = \frac{16-x}{x} \rightarrow 16x = 144 - 9x \rightarrow 25x = 144$$

$$\rightarrow x = \frac{144}{25} = \frac{576}{100} = 5,76$$

گزینه ۳۳: در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه رأس A را رسم می کنیم. دو مثلث ACD و ABC به علت برابری دو زاویه، متشابه هستند.

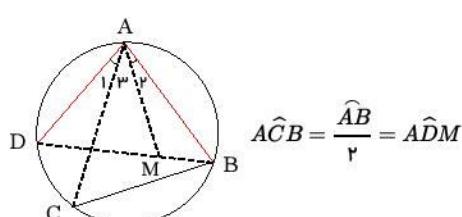
$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC} \rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{4}{CD} = \frac{6}{4}$$

$$\rightarrow CD = \frac{8}{3}, \quad BD = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$



چون مثلث ABD متساوی الساقین است پس $AD = BD = \frac{10}{3}$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC} \xrightarrow{\text{نسبت تشابه}} \frac{AB}{\frac{10}{3}} = \frac{8}{\frac{8}{3}} = \frac{6}{4} \rightarrow AB = 6$$



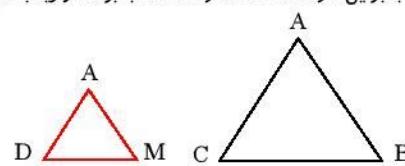
$$A\hat{C}B = \frac{\widehat{AB}}{2} = A\hat{D}M$$

چون $\widehat{CAB} = \widehat{MAD}$ و در نتیجه $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2$ ، پس $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ گزینه ۳۴:

هم جنین:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{DM}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot DM$$

بنابراین، دو مثلث ADM و ACB بنا بر سه زاویه با هم متشابه‌اند. در نتیجه:



گزینه ۳۵: $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ می دانیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} &= \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \left| \frac{1}{\sin \alpha} \right| = \frac{1}{|\sin \alpha|} \\ \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} &\stackrel{\text{در مخرج ضرب و تقسیم می کنیم}}{=} \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}} \\ &= \left| \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right| = \frac{1 - \cos \alpha}{|\sin \alpha|} \\ \text{پس: } \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} &= \frac{1}{|\sin \alpha|} - \frac{1 - \cos \alpha}{|\sin \alpha|} = \frac{\cos \alpha}{|\sin \alpha|} = \cot \alpha \end{aligned}$$

گزینه ۳

۳۶

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log_k^n = \frac{n}{m} \log_k^a$$

می دانیم

$$\log_r^x = 1 + \log_r^{y+1} \Rightarrow \log_r^x = \log_r^r + \log_r^{y+1} \Rightarrow \log_r^x = \log_r^{ry+1} \Rightarrow x = ry + 1$$

$$x^r - y^r = 32 \Rightarrow (ry + 1)^r - y^r = 32 \Rightarrow (ry^r + ry + r) - y^r = 32 \Rightarrow ry^r + ry - 2y = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 32r}}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 2 \Rightarrow x = 6 \\ y = -\frac{14}{3} \Rightarrow \text{غیر قابل قبول است} \end{array} \right.$$

چون جلوی لگاریتم را منفی می کند، غیر قابل قبول است

$$\log_r^{x+y} \frac{x=y}{y=2} \log_r^{x+r} = \log_r^{r^2} = \frac{3}{2}$$

گزینه ۳

۳۷

$$2^{-x} < 0,000001 \rightarrow 2^{-x} < 10^{-6}$$

از طرفین رابطه‌ی داده شده در مبنای ۱۰، لگاریتم می گیریم.

$$\begin{aligned} \log 2^{-x} < \log 10^{-6} \rightarrow -x \log 2 < -6 &\stackrel{\text{در منفی ضرب می کنیم}}{\longrightarrow} x \log 2 > 6 \rightarrow x \left(\frac{301}{1000} \right) > 6 \\ \rightarrow x > \frac{6000}{301} &\rightarrow x > 19,934 \end{aligned}$$

پس کوچکترین عدد x با دور قم اعشار، ۱۹,۹۳۴ است.

گزینه ۲

۳۸

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام باید هم صورت هم مخرج را گویا نماییم:

$$\begin{aligned} \lim \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}} \times \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \times \frac{2 + \sqrt{5-x}}{2 + \sqrt{5-x}} \\ \lim \frac{(1-x)(2+\sqrt{5-x})}{(2-\sqrt{5-x})(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\cancel{(x-1)}(2+\sqrt{5-x})}{\cancel{(x-1)}(1+\sqrt{x})} = \frac{-2}{2} = -2 \end{aligned}$$

گزینه ۳

۳۹

ابتدا ۳ رقم از ۵ رقم را انتخاب، سپس به ۳! حالت با آن ها عدد سه رقمی می سازیم.

$$n(S) = \binom{5}{3} \times 3!$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{2}{2}}_{\text{انتخاب دو رقم فرد}} \times \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{انتخاب یک رقم زوج}} \times \underbrace{3!}_{\text{جلجلی سه رقم انتخابی}}$$

$$P(A) = \frac{\binom{2}{2} \times \binom{3}{1} \times 3!}{\binom{5}{3} \times 3!} = 0,3 \quad \text{پس است.}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{21} + 10 + 15 + 45 + 50}{25} = 30$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{21} + 120 = 750 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{21} = 630$$

$$\bar{x}_{جذب} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{21}}{21} = \frac{630}{21} = 30$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow 64 = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 = 1600$$

اما مجموع مربعات انحراف از میانگین ۴ داده‌ی ناجور برابر است با:

$$(10 - 30)^2 + (15 - 30)^2 + (45 - 30)^2 + (50 - 30)^2 = 1250$$

$$1250 + \sum_{i=1}^{21} (x_i - \bar{x})^2 = 1600 \Rightarrow \sum_{i=1}^{21} (x_i - \bar{x})^2 = 350$$

حال به راحتی می‌توانیم واریانس ۲۱ داده‌ی باقیمانده را حساب کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{21} (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{350}{21} = 16,66$$

چون داده‌ها در ۹ دسته طبقه‌بندی شده‌اند، دسته‌ی پنجم دسته‌ی وسط است و طول دسته‌ها ۳ می‌باشد، بنابراین می‌توان دسته‌ی پنجم را نوشت.

دسته‌ی پنجم
۲۲ - ۲۵ ۲۵ - ۲۸ ۲۸ - ۳۱ ۳۱ - ۳۴ ۳۴ - ۳۷

$$\text{فراوانی مطلق دسته‌ی وسط: } \frac{2}{10} = \frac{F_i}{120} \rightarrow F_i = 24 \quad \text{فراوانی نسبی دسته‌ی وسط}$$

$$\text{چون ۴۵ درصد داده‌ها کمتر از ۳۴ هستند یعنی } 54\% = 54 = 120 \times \frac{45}{100} \text{ می‌باشد.}$$

$$C = \frac{R}{n} \Rightarrow C = \frac{52 - 31}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

طول دسته‌ها ۳ می‌باشد بنابراین می‌توان کران پایین دسته‌ی وسط یعنی دسته‌ی چهارم را پیدا کرد.

$$\text{کران پایین دسته‌ی چهارم} = Min + 3C = 31 + 9 = 40$$

پس دسته‌ی وسط (۴۰, ۴۳) است می‌دانیم مجموع درصد فراوانی‌های نسبی برابر ۱۰۰ است بنابراین می‌توان درصد داده‌هایی که در این بازه قرار می‌گیرند را بدست آورد.

$$37 + x + 48 = 100 \Rightarrow x = 15$$

$$\text{بنابراین ۱۵ درصد کل داده‌ها در دسته وسط قرار می‌گیرند یعنی: } 12 = \frac{15}{100} \times 80 = 12$$

$$\text{اگر داده‌ها در ۶ طبقه دسته‌بندی شوند آن‌گاه طول دسته‌ها تغییر خواهد کرد ولی اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها یعنی دامنه، تغییر نمی‌کند.}$$

$$C_{جذب} = \frac{R}{n'} = \frac{24}{6} = 4$$

در حالت اولیه کران پایین دسته‌ی اول ۱۷ بوده است زیرا:

$$\text{کران پایین دسته‌ی اول} = \text{کران پایین دسته‌ی چهارم} + 3C$$

$$\text{کران پایین دسته‌ی اول} = 26 + 3(3) \Rightarrow 26 = x + 9 \Rightarrow x = 26 - 9 = 17 = 17$$

پس دسته‌بندی جدید (با طول دسته‌ی $C = 4$) به صورت زیر خواهد بود:

$$[17 - 21), [21 - 25), [25 - 29), [29 - 33), [33 - 37), \dots$$

مرکز دسته‌ی پنجم برابر است با:

داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب شده داده شده‌اند.

$$\begin{array}{c} ۳, ۳, ۴, ۶, ۸, ۸, ۹, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳ \\ \text{نیمه‌ی اول داده‌ها} \\ \text{نیمه‌ی دوم داده‌ها} \end{array}$$

تعداد داده‌ها ۱۲ است. در هر سری شش داده برابر با نصف مجموع دو داده‌ی وسط است. پس داریم:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{۴+۶}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵ & \text{چارک اول} &= \text{میانه‌ی اول} \\ Q_3 &= \frac{۱۱+۱۲}{۲} = \frac{۲۳}{۲} = ۱۱,۵ & \text{چارک سوم} &= \text{میانه‌ی نیمه‌ی دوم داده‌ها} \end{aligned}$$

طبق گفته‌ی مسئله از بین داده‌ها، اعداد کمتر از ۵ و بیشتر از ۱۱,۵ را حذف می‌کنیم که اعداد باقی‌مانده عبارتند از:

۶, ۶, ۸, ۸, ۹, ۱۱

حالا ضریب تغییرات آن‌ها را می‌خواهیم. ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

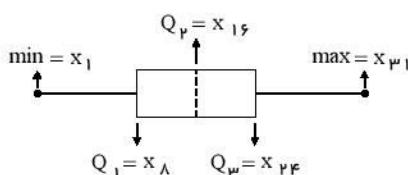
$$\bar{x} = \frac{۲(۶) + ۲(۸) + ۹ + ۱۱}{۶} = \frac{۴۸}{۶} = ۸$$

حال، واریانس و سپس انحراف معیار را حساب می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{۲(۶ - ۸)^2 + ۲(۸ - ۸)^2 + (۹ - ۸)^2 + (۱۱ - ۸)^2}{۶} = \frac{۸ + ۰ + ۱ + ۹}{۶} = \frac{۱۸}{۶} = ۳$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sigma = \sqrt{۳}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{۳}}{۸} \cong \frac{۱,۷}{۸} \cong ۰,۲۱$$



اگر ۱۳ داده‌ی آماری مرتب شده را با $x_1, x_2, \dots, x_{۱۳}$ نمایش دهیم، آن‌گاه میانه‌ی داده‌ها برابر با داده‌ی شانزدهم ($x_{۱۶}$) و چارک اول برابر با میانه‌ی ۱۵ داده‌ی اول، یعنی x_8 و چارک سوم برابر با میانه‌ی ۱۵ داده‌ی آخر، یعنی $x_{۲۴}$ می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min = x_1 &\quad Q_1 = x_8 & \bar{x} &= \frac{x_1 + \dots + x_8}{8} = \frac{۸ \times ۱۲}{۸} = ۱۲ \\ \max = x_{۱۳} &\quad Q_3 = x_{۲۴} & \rightarrow x_1 + \dots + x_8 = ۸ \times ۱۲ = ۸۴ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1 = ۷, \bar{x}_1 = ۱۵ &\quad N_۱ = ۱۴, \bar{x}_{۱۴} = ۱۵ \\ x_1, \dots, x_7 \longrightarrow x_1 + \dots + x_{۱۴} = ۷ \times ۱۵ = ۱۰۵ &\quad : \text{دنباله‌ی چپ} \\ x_۱, \dots, x_{۱۴} \longrightarrow x_۱ + \dots + x_{۱۴} = ۱۴ \times ۱۵ = ۲۱۰ &\quad : \text{داخل و روی جعبه} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_۲ = ۷, \bar{x}_{۲۱} = ۲۱ &\quad N_۲ = ۱۴, \bar{x}_{۲۱} = ۲۱ \\ x_{۲۱}, \dots, x_{۲۸} \longrightarrow x_{۲۱} + \dots + x_{۲۸} = ۷ \times ۲۱ = ۱۴۷ &\quad : \text{دنباله‌ی راست} \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{(x_1 + \dots + x_7) + (x_۱ + \dots + x_{۱۴}) + (x_{۲۱} + \dots + x_{۲۸})}{۳۱} = \frac{۸۴ + ۱۰۵ + ۱۴۷}{۳۱} = \frac{۴۳۶}{۳۱} \cong ۱۴,۶۷$$

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱۰ واحد کم می‌کنیم (دقت کنید که واریانس و انحراف معیار، تغییری نمی‌کنند).

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i \rightarrow \bar{x} - ۱۰ = \frac{1}{۲۴} ((۳ \times (-۲۱)) + (۲ \times (-۱)) + (۱۲ \times ۰) + (۶ \times ۱) + (۱ \times ۲))$$

$$\rightarrow \bar{x} - ۱۰ = \frac{1}{۲۴} (-۶ - ۲ + ۶ + ۲) \rightarrow \bar{x} - ۱۰ = ۰ \rightarrow \bar{x}_{\text{اویل}} = ۱۰$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{۲۴} ((۳(-۲ - ۰))^2 + ۲(-۱ - ۰)^2 + ۱۲(۰ - ۰)^2 + ۶(۱ - ۰)^2 + ۱(۲ - ۰)^2) = \frac{1}{۲۴} (۱۲ + ۲ + ۶ + ۶) = \frac{۲۴}{۲۴} = 1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \sigma_{\text{اویل}} = 1 \rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1}{۱۰} = ۰,۱$$

وقی از داده ها ۴۴ واحد کم می کنیم از میانگین نیز ۴۴ واحد کم می شود ولی انحراف معیار تغییر نمی کند.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n F_i x_i \rightarrow \bar{x} - 44 = \frac{1}{20} ((4 \times (-3)) + (7 \times (-1)) + (5 \times 1) + (3 \times 3) + (1 \times 5))$$

$$\rightarrow \bar{x} - 44 = 0 \rightarrow \bar{x} = 44$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n F_i (x_i - \bar{x})^2 \rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{20} (4(-3)^2 + 7(-1)^2 + 5(1)^2 + 3(3)^2 + 1(5)^2)$$

$$= \frac{1}{20} (36 + 7 + 5 + 27 + 25) = \frac{100}{20} = 5 \rightarrow \sigma = \sqrt{5}$$

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{44} \sim \frac{2.2}{44} = 0.05$$

مراکز دسته ها به ترتیب برابر ۶ و ۸ و ۱۰ و ۱۲ و ۱۴ می باشند.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i = \frac{1}{12+a} ((3 \times 5) + (2 \times 8) + (a \times 10) + (5 \times 12) + (1 \times 14)) = \frac{120 + 10a}{12+a} = \frac{10(12+a)}{12+a} = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{12+a} (3(5-10)^2 + 2(8-10)^2 + a(10-10)^2 + 5(12-10)^2 + 1(14-10)^2)$$

$$= \frac{1}{12+a} (48 + 8 + 0 + 24 + 16) = \frac{96}{12+a} = 6 \rightarrow 72 + 6a = 96 \rightarrow 6a = 24 \rightarrow a = 4$$

$$0.1 + 0.25 + 0.2 + \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 0.45$$

میانگین داده ها را می توان از مجموع حاصلضرب فراوانی نسبی هر دسته در مرکز آن دسته بدست آورد.

$$\bar{x} = (0.1 \times 8) + (0.25 \times 12) + (0.2 \times 16) + (0.45 \times 20) = 16$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N F_i (x_i - \bar{x})^2 = 0.1(8-16)^2 + 0.25(12-16)^2 + 0.2(16-16)^2 + 0.45(20-16)^2$$

$$= 6.4 + 4 + 0 + 17.6 = 38$$

توجه کنید که واریانس را بر حسب فراوانی نسبی بدین گونه بدست می آورند.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{F_1}{N} (x_1 - \bar{x})^2 + \frac{F_2}{N} (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_1 (x_1 - \bar{x})^2 + f_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots$$

x_i	12	14	16	18	20
$x_i - \bar{x}$	-4	-2	0	2	4
فراوانی مطلق	5	7	10	a	3

مجموع اختلاف داده ها از میانگین برابر صفر می باشد پس:

$$(5 \times (-4)) + (7 \times (-2)) + (10 \times 0) + (a \times 2) + (3 \times 4) = 0 \rightarrow -20 - 14 + 2a + 12 = 0 \rightarrow a = 11$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{5+7+10+11+3} ((5 \times 16) + (7 \times 14) + (10 \times 10) + (11 \times 8) + (3 \times 12)) = \frac{1}{36} (200) = 5.55$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲۱	۱	۳۱	۱	۴۱	۲
۲	۲	۲۲	۲	۳۲	۲	۴۲	۲
۳	۲	۲۳	۴	۳۳	۲	۴۳	۲
۴	۲	۲۴	۳	۳۴	۱	۴۴	۲
۵	۲	۲۵	۱	۳۵	۴	۴۵	۲
۶	۴	۲۶	۳	۳۶	۳	۴۶	۲
۷	۱	۲۷	۲	۳۷	۳	۴۷	۱
۸	۳	۲۸	۲	۳۸	۲	۴۸	۱
۹	۲	۲۹	۳	۳۹	۳	۴۹	۴
۱۰	۴	۳۰	۴	۴۰	۴	۵۰	۲