



بسمه تعالی

جزوه کامل دنباله حسابان ۱

دنباله های مهم:



دنباله مربعی

۱, ۴, ۹, ۱۶, ...

فرمول عمومی $\longrightarrow n^2$

دنباله مثلثی

۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ...

فرمول عمومی $\longrightarrow \frac{n(n+1)}{2}$

دنباله حسابی و هندسی

دنباله حسابی

$$a_1 + (n-1)d$$

دنباله هندسی

$$a_1 \times r^{n-1}$$

مجموع n جمله دنباله حسابی

۱ $\frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = S_n$

۲ $\frac{n}{2} [a_1 + a_n] = S_n$

مجموع n جمله دنباله هندسی

۱ $\frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = S_n$

۲ $\frac{r(a_1 - a_n)}{1-r} = S_n$

اعداد طبیعی را طوری دسته بندی می کنیم که تعداد جملات
هر دسته برابر با شماره آن باشد. **مجموع** جملات در دسته
بیستم کدام است؟



$(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), \dots$

۴۰۴۰ ۴ ۴۰۳۰ ۳ ۴۰۲۰ ۲ ۴۰۱۰ ۱

گام
اول

ابتدا با کمی دقت در می یابیم که آخرین جمله هر دسته یک دنباله مثلثی تشکیل می دهد، پس طبق رابطه آخرین جمله دسته بیستم را می یابیم

$$\frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \frac{20 \cdot (1+20)}{2} = 210$$

گام
دوم

با به دست آوردن جمله اول دسته بیستم که برابر با ۱۹۱ است به وسیله رابطه جمع دنباله حسابی مجموع جملات دسته بیستم را به دست می آوریم:

$$\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 20 \times \frac{(191 + 210)}{2} = 4010$$

پاسخ گزینه ۱

حاصل عبارت 
$$\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t^1 + 1}{t^6 - t^3 + 1}$$

به ازای $t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ کدام می باشد؟

- ۱  ۳  ۴  ۵  ۶

$$\star S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

می دانیم که:

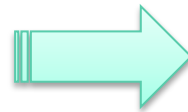
در صورت کسر دنباله هندسی با قدر نسبت $-t$ و جمله اول 1 دیده می شود و در مخرج کسر قدر نسبت t^3 و جمله اول 1 دیده می شود.

حال رابطه مجموع جملات هندسی را می نویسیم:

$$\frac{\cancel{1(1-(-t)^9)}}{1-(-t)} = \frac{1+t^3}{1+t} = \frac{(1+t)(1-t+t^2)}{1+t} = 1-t+t^2$$

$$\frac{\cancel{1(1-(-t^3)^3)}}{1-(-t^3)} \quad \text{حال } t = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \text{ قرار می دهیم:}$$

$$1 - \frac{1+\sqrt{17}}{2} + \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 = 5$$



گزینه ۳

ویژگی دو دنباله حسابی



هرگاه دو دنباله حسابی جدا از هم داشتیم، جملات مشترک آنها دنباله ای حسابی تشکیل می دهند که قدر نسبت آن **ک.م.م** قدرنسبت دو جمله است.

در دو دنباله حسابی $۲, ۷, ۱۲, \dots$ و $۸, ۱۱, ۱۴, \dots$ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟



۶۱ ۴ ۶۰ ۳ ۵۹ ۲ ۵۸ ۱

پاسخ

ابتدا اولین جمله مشترک دو دنباله را پیدا می کنیم که برابر با ۱۷ می باشد.

۱

با کمک از نکته ای که آموختیم قدر نسبت دنباله جدید را می یابیم که برابر با ۱۵ می باشد.

۲

حال خواسته مسئله را می یابیم:

۳

$$15n - 15$$

$$100 \leq 17 + 15(n-1) \leq 999 \rightarrow$$

$$98 \leq 15n \leq 997 \rightarrow 7 \leq n \leq 66$$

$$66 - 7 + 1 = 60$$

پاسخ: گزینه ۳

📖 در یک دنباله هندسی همواره رابطه زیر برقرار است:

$$\star \frac{\text{مجموع } n \text{ جمله اول}}{\text{مجموع } n \text{ جمله اول}} = r^n + 1$$

در تصاعد هندسی
چند برابر مجموع هفت جمله اول آن است؟
مجموع چهارده جمله اول

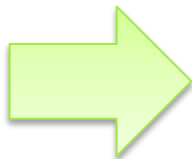


۱۲۹ ۴ ۱۲۷ ۳ ۶۳ ۲ ۶۵ ۱

پاسخ تست

برای پاسخ تست کافیت رابطه ای را که یاد گرفتیم بنویسیم:

$$\begin{array}{l} \text{مجموع } 14 \text{ جمله اول} \\ \hline \text{مجموع } 7 \text{ جمله اول} \end{array} = \frac{2^7}{r^7} + 1 = 129$$



بنابراین پاسخ گزینه ۴ می باشد.

رابطه جملات زوج و فرد



★ در یک دنباله هندسی همواره رابطه زیر برقرار است:

$$r = \frac{\text{مجموع جملات زوج}}{\text{مجموع جملات فرد}}$$

اگر در یک دنباله هندسی مجموع تمام جملات آن سه برابر
مجموع جملات فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟ 

$$۳ \quad \textcircled{۴}$$

$$۲ \quad \textcircled{۳}$$

$$\frac{۱}{۲} \quad \textcircled{۲}$$

$$\frac{۱}{۳} \quad \textcircled{۱}$$

برای حل آسان ابتدا مجموع جملات زوج X را و مجموع جملات فرد را y در نظر میگیریم و طبق سوال روابط زیر را می نویسیم:

$$\frac{x + y}{y} = 3 \rightarrow x = 2y$$

حال طبق رابطه ای که آموختیم:

$$r = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{2y}{y} \rightarrow 2$$

بنابراین پاسخ برابر گزینه ۳ می باشد.

رابطه دنباله حسابی و هندسی

اگر جملات n اُم و m اُم و p اُم دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی با قدر نسبت r باشد، آنگاه:

$$r = \frac{p - m}{m - n}$$

جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی غیر ثابت
میتوانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند. قدرنسبت
هندسی کدام است؟



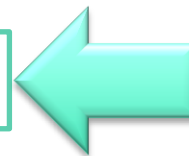
$$\frac{9}{14} \quad \textcircled{4} \quad \frac{7}{13} \quad \textcircled{3} \quad \frac{7}{14} \quad \textcircled{2} \quad \frac{5}{13} \quad \textcircled{1}$$

پاسخ تست

برای پاسخ تست کافیت رابطه ای را که یاد گرفتیم بنویسیم:

$$r = \frac{p - m}{m - n} \rightarrow \frac{12 - 5}{5 - 2} = \frac{7}{3}$$

بنابراین پاسخ گزینه ۳ می باشد.



درج m واسطه هندسی



اگر بخواهیم بین دو عدد B و A ، m واسطه هندسی قرار دهیم که جملات متوالی یک دنباله هندسی با قدرنسبت r باشد از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$r^{m+1} = \frac{B}{A}$$

طبق رابطه ای که آموختیم، واسطه های هندسی را می یابیم:

$$\sqrt[3+1]{\frac{۳۲۴}{۴}} = \sqrt[۴]{۸۱} = ۳$$

حال واسطه ها را می نویسیم:

۴، ۱۲، ۳۶، ۱۰۸، ۳۲۴

با جمع پنج عدد دنباله به عدد ۴۸۴ یعنی گزینه ۴ می رسیم.

📖 واسطه هندسی

اگر a, b, c به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشد:

$$b^2 = a \cdot c$$

به ازای یک مقدار X اعداد $X^2 - 2$, $2X$, $X^2 + 4$ به ترتیب سه
 جمله اول یک دنباله هندسی نزولی می باشد. مجموع هفت جمله اول این
 دنباله کدام است؟



$$\frac{127}{8} \quad 4$$

$$\frac{63}{4} \quad 3$$

$$\frac{125}{16} \quad 2$$

$$\frac{117}{16} \quad 1$$

$$b^2 = a.c \rightarrow 4x^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 2)$$

$$4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8 \rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 2) = \begin{cases} x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 = -2 \rightarrow \text{غ} \end{cases}$$

$$8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{8}$$



در نتیجه پاسخ برابر $\frac{127}{8}$ یعنی گزینه ۴ است.