



بسمه تعالی

حسابان ۱ فصل ۲ (تابع)

تساوی دو تابع

دو تابع f و g با هم مساوی هستند اگر و فقط اگر:
دامنه آنها با هم مساوی باشند، یعنی $D_f = D_g$
به ازای هر مقدار از این دامنه یکسان، $f(x) = g(x)$

دو تابع برابر همواره نمودارشان بر هم منطبق هستند. 

مثال: دو تابع f و g با هم برابر نیستند زیرا مقدار خروجی اعداد
منفی‌شان متفاوت است.

$$f(x) = x$$

$$g(x) = |x|$$

تابع $\|x\| - 2x$ با کدام یک از توابع زیر برابر است؟ 

$$f(x) = -x^2 \quad g(x) = -x|x| \quad 1$$

$$f(x) = 2x - 3 \quad g(x) = 4x - 6 \quad 2$$

$$f(x) = x|x| \quad g(x) = x|-x| \quad 3$$

$$f(x) = \|-x\| \quad g(x) = -|x| \quad 4$$

چون دامنه همه گزینه ها یکسان است، برای حل سریع اعدادی انتخاب می کنیم
که خروجی های متفاوتی دهد:

$$f(-1) = -1 \quad g(-1) = 1$$

رد گزینه یک:

$$f(0) = -3 \quad g(0) = -6$$

رد گزینه دو:

$$f(1) = 1 \quad g(1) = -1$$

رد گزینه چهار:

بنابراین پاسخ گزینه ۳

📖 تابع رادیکالی (ریشه دوم)

تابعی که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت می دهد تابع رادیکالی (ریشه دوم) می نامند و به شکل $\sqrt{ax + b}$ نمایش می دهند:

$$\sqrt{3x + 1}$$

$$1 - \sqrt{-x + 5}$$

★ برای تعیین دامنه این نوع تابع کافی است رابطه زیر را بزرگتر از صفر در نظر بگیریم.

جواب معادله $2\sqrt{x-1} = 3x - 4$ کدام می باشد؟ 

یک جواب بزرگتر یک دارد.

۱

دو جواب دارد.

۲

جواب ندارد.

۳

یک جواب کوچکتر از یک دارد.

۴

برای حل چنین معادلاتی می توانیم طرفین را به توان ۲ برسانیم، سپس معادله را حل می کنیم و ریشه ها را به دست می آوریم:

دقت کنید: چون هر جوابی درست نیست، و همواره پاسخ ها را باید از نظر تعریف شدن، و برقراری تساوی امتحان کرد.



$$2\sqrt{x-1} = 3x - 4 \rightarrow 4(x-1) = 9x^2 + 16 - 24x \rightarrow$$

$$9x^2 - 28x + 20 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{10}{9} \times \end{array} \right.$$

تنها عدد ۲ قابل قبول است و عدد دیگر قابل قبول نیست، زیرا تساوی برقرار نیست، بنابراین پاسخ گزینه ۱ می باشد.

آشنایی با تابع پله ای و جزء صحیح

تابع پله ای: هر تابع را که بتوان دامنه آن را به تعدادی بازه تقسیم کرد و تابع روی هر کدام از این بازه ها، ثابت باشد، یک تابع پله ای می نامند. به عبارت دیگر، تابع پله ای روی بازه ها ثابت است.

مثال: تابع رو به رو یک تابع پله ای است.

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

تابع جزء صحیح: تابعی که به هر عدد حقیقی x جزء صحیح آن را نسبت دهد و به صورت $f(x) = [x]$ نمایش داده می شود و دامنه و برد آن اعداد حقیقی هستند.

مثال:

$$f(x) = [x] \longrightarrow f(1/3) = 1$$

اگر مجموعه جواب معادله ی $2[X] = 1 - [-X]$ به صورت $(a, b) \cup \{c\}$ باشد ، $a + b + c$ کدام است؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است) 

۴ ۲

۳ ۱

۶ ۴

۵ ۳

$$2[x] = 1 - [-x] \rightarrow [x] + [x] = 1 - [-x] \rightarrow [x] = 1 - [x] - [-x] = 1 - ([x] + [-x])$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{Z} \xrightarrow{[x] + [-x] = 0} [x] = 1 - 0 = 1 \rightarrow 1 \leq x < 2 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = 1 \\ x \notin \mathbb{Z} \xrightarrow{[x] + [-x] = -1} [x] = 1 - (-1) = 2 \rightarrow 2 \leq x < 3 \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} 2 < x < 3 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow (2, 3) \cup \{1\} \rightarrow a + b + c = 2 + 3 + 1 = 6$$

پاسخ گزینه ۴

وارون تابع

در نمایش زوج مرتبی یک تابع، اگر جای مولفه های اول و دوم را عوض کنیم، رابطه جدیدی به دست می آید که آن را وارون تابع می گویند و آن را با f^{-1} نشان می دهند.

مثال: وارون تابع $f = \{(-1, 1), (1, 1), (2, 4)\}$ به صورت زیر است:

$$f^{-1} = \{(1, -1), (1, 1), (4, 2)\}$$



دقت کنید: مانند تابع معکوس رو به رو هر معکوس تابعی، تابع نیست.



شرط آن که معکوس تابعی تعریف شده باشد، یک به یک بودن تابع است که در بخش بعد با آن آشنا می شویم.



شرط آن که وارون رابطه $f = \{(a - b, 5), (1, 3), (a + b, 5)\}$ همواره یک تابع باشد، کدام است؟ 

$$b = 0 \quad 1$$

$$a + b = 5 \quad 2$$

$$a = 0 \quad 3$$

$$a - b = 5 \quad 4$$

ابتدا معکوس تابع را می نویسیم:

$$f^{-1} = \{(5, a-b), (3, 1), (5, a+b)\}$$

برای تابع بودن رابطه لازم است که:

$$a-b = a+b \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0$$

پاسخ گزینه ۱

نوشتن رابطه معکوس تابع

برای نوشتن تابع ابتدا جای x و y را عوض می کنیم، سپس y جدید را بر حسب x می نویسیم.

مثال: $y = x^2 + 1 \rightarrow x = y^2 + 1 \rightarrow x - 1 = y^2 \rightarrow \sqrt{x - 1} = y$

همواره دامنه معکوس تابع با برد تابع اصلی جا به جا می شود، یعنی برد تابع اصلی دامنه تابع معکوس و دامنه تابع اصلی برد تابع معکوس می شود:

$$R_f \rightarrow D_{f^{-1}} \quad D_f \rightarrow R_{f^{-1}}$$

معکوس تابع $y = \sqrt{x - 1} \xrightarrow{\text{معکوس تابع}} x = \sqrt{y - 1} \rightarrow x^2 = y - 1 \rightarrow y = x^2 + 1$

$$D_f = [1, +\infty) \quad R_f = [\cdot, +\infty) \xrightarrow{\quad} D_{f^{-1}} = [\cdot, +\infty) \quad R_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$

نمودار تابع $y = \sqrt{1-2x}$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به بالا منتقل می کنیم . ضابطه ی معکوسی تابع بدست آمده کدام است؟



$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{-1-2x} \quad , \quad x \leq -\frac{1}{2}$$

۱

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1 \quad , \quad x \geq 1$$

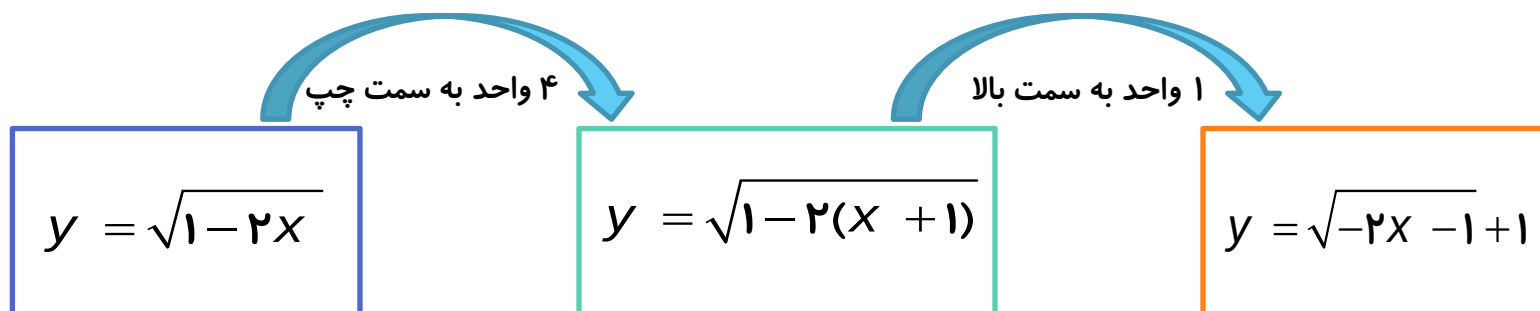
۲

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1 \quad , \quad x \geq 1$$

۳

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1 \quad , \quad x \leq \frac{1}{2}$$

۴



$$D : -2x - 1 \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{1}{2} \rightarrow R : (1, \infty] \quad y = \sqrt{\underbrace{-2x - 1}} + 1 \rightarrow D^{-1} : (1, \infty]$$

زیر رادیکال باید نامنفی باشد

$$y = \sqrt{-2x - 1} + 1 \rightarrow y - 1 = \sqrt{-2x - 1} \rightarrow$$

$$(y - 1)^2 = (\sqrt{-2x - 1})^2 \rightarrow (y - 1)^2 = -2x - 1 \rightarrow$$

$$\frac{(y - 1)^2}{-2} + \frac{1}{-2} = x \rightarrow \frac{(x - 1)^2}{-2} + \frac{1}{-2} = y \rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

📖 نکات تابع یک به یک و تشخیص آن

اگر در یک تابع مانند f ، هر دو عضو متمایز در دامنه به دو عضو متمایز در برد نظیر شوند، آنگاه تابع f را یک به یک می نامیم.

تعریف ساده: اصلاً نباید تابع ما عضو تکراری در برد داشته باشد.

تشخیص تابع یک به یک

۱ برای حل آسان و ساده تست های مربوط به تشخیص تابع کفایست y را عددی در نظر بگیریم که به ازای آن دو x متفاوت داشته باشیم.

مثال: تابع روبه رو یک به یک است.

$$y = |x| \xrightarrow{y=1} \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

۲ اگر از روش بالا نتوانستیم برای حل استفاده کنیم می توانیم از تکنیک صعودی و نزولی بودن تابع استفاده کرد یعنی تابع هر گاه صعودی یا نزولی باشد آن تابع یک به یک است.

کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟ 

$$x - \sqrt{x}$$

۱

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

۲

$$2x + \frac{1}{x}$$

۳

$$\frac{x}{x^2 + 1}$$

۴

همانطور که از گزینه ها مشخص می شود روش اول کمی دشوار به نظر می آید. پس از روش دوم برای حل استفاده می کنیم.

★ همانطور که می دانیم جمع دو عبارت صعودی، صعودی است.

با مشاهده گزینه ها در می یابیم که گزینه دوم یک عبارت صعودی است زیرا $\sqrt{X}$ و X هر دو صعودی هستند.

پاسخ گزینه ۲

اعمال جبری روی توابع

تفریق

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

جمع

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

تقسيم

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$$

ضرب

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = x - \sqrt{x}$ آنگاه برد تابع $f + g$ کدام است؟ 

R

۱

$R - \{0\}$

۲

$[2, +\infty)$

۳

$[0, +\infty)$

۴

۱ $D_f = [\cdot, +\infty) \quad D_g = [\cdot, +\infty) \rightarrow D_f \cap D_g = [\cdot, +\infty)$

۲ $f(x) + g(x) = x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} = 2x$

$R_{f+g} = [\cdot, +\infty)$ 

پاسخ گزینه ۴

نمایش ماشینی ترکیب توابع



تفہیم: در این رابطه ابتدا $g(x)$ را حساب می کنیم سپس $f(g(x))$ را حساب می کنیم.

مثال: اگر $f(x) = x^2$ ، $g(x) = x$ باشد، $f(g(2))$ چه مقدار است؟



اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow 2x$ باشند
 و $g(x) = 3x + 4$ مقدار $f(5)$ کدام است؟ 

۲

۲

۱

۱

۴

۴

۳

۳

می دانیم:



$$g(f(5)) = 1.$$

ابتدا $x = 5$ را در نظر می گیریم:

$$g(x) = 3x + 4 \longrightarrow g(f(5)) = 3f(5) + 4 = 1. \longrightarrow$$

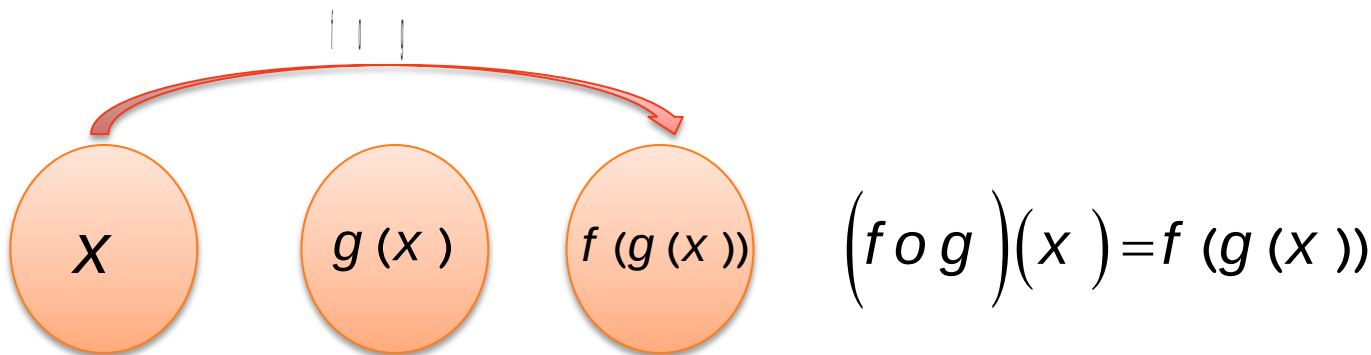
$$3f(5) = 6 \rightarrow f(5) = 2$$

پاسخ گزینه ۴

تابع $f \circ g$



فرض کنیم f و g دو تابع باشند، آنگاه ترکیب دو تابع f و g به صورت زیر تعریف می شود:



$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\}$$



$f \circ g(x) = g \circ f(x)$ **اگر** $g(x) = x + 4$ **و** $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$ **باشند، جواب معادله** **کدام است؟**


۱، -۷

۲

-۱، -۷

۱

۱، ۷

۴

-۱، ۷

۳

$$(f \circ g)(x) = \frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$(g \circ f)(x) = \left(\frac{2x-1}{x+2} \right) + 4 = \frac{6x+7}{x+2}$$

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \rightarrow \frac{2x+7}{x+6} = \frac{6x+7}{x+2} \rightarrow$$

$$2x^2 + 4x + 7x + 14 = 6x^2 + 7x + 36x + 42 \rightarrow$$

$$4x^2 + 32x + 28 = 0 \rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ x = -7 \end{array} \right.$$

گزینه ۱

اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشد، آنگاه دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟ 

$\{0\}$ ۲

$[0,1)$ ۱

$R - \{1, -1\}$ ۴

$(-1,1)$ ۳

$$g(x) = \sqrt{x(1-x)} \rightarrow 0 \leq x \leq 1 \rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 \rightarrow$$

$$0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1$$

برای حل آسان $x = \frac{1}{2}$ را قرار می دهیم که در نا معادله صدق نمی کند

و گزینه های ۱ و ۳ و ۴ حذف می شود.

پاسخ گزینه ۲

اگر  $f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$ و $g = \{(2,3), (4,2), (5,6), (3,1)\}$

باشد، تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ کدام است؟

$\{(4,2), (3,5)\}$ ۲

$\{(4,2), (5,2)\}$ ۱

$\{(3,5), (2,4)\}$ ۴

$\{(5,2), (2,4)\}$ ۳

ابتدا معکوس تابع f را به دست می آوریم:

$$f^{-1} = \{(2,1), (5,2), (4,3), (6,4)\}$$

حال باید اعدادی را از دامنه معکوس تابع انتخاب کنیم که برد آن در دامنه ~~قرار~~ داشته باشد و همچنین خود عدد در دامنه ~~قرار~~ داشته باشد:

$$f^{-1} = \{(\cancel{2},1), (5,2), (4,3), (\cancel{6},4)\}$$

$$\frac{g}{g \circ f^{-1}}(5) = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{g}{g \circ f^{-1}}(4) = \frac{2}{1} = 2$$

