



نام و نام خانوادگی:	پایه و رشته: یازدهم ریاضی	کلاس:	درس: حسابان ۱	دبیر:
---------------------	---------------------------	-------	---------------	-------

بارم	سوال	ردیف
------	------	------

۲/۵	<p>جاهای خالی را پر کنید و راه حل محاسبه جواب را به صورت خلاصه بنویسید.</p> <p>(۱) مساحت مثلثی با سه راس به مختصات $A(2, 5), B(3, 0), C(0, 2)$ برابر می باشد.</p> <p>(۲) اگر x, y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $5\sqrt{2}$ باشند، بیشترین مقدار $3x + 4y$ مساوی است.</p> <p>(۳) مجموعه جواب معادله $x^4 + 2x^2 - 15 = x^4 - 20 - 2x^2 + 5$ به صورت $[a, b]$ است، ab برابر است.</p> <p>(۴) اگر در تابع $f(x) = \sqrt{\frac{\sin x - 3}{-3x^2 + bx + 2c}}$ داشته باشیم: $D_f = R - \{\frac{1}{2}\}$، مقادیر b, c به ترتیب برابر و می باشد.</p> <p>(۵) اگر $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}, f(x) = 3x - 4, g(x) = f(3x - 4)$ باشند، حاصل $g^{-1}(16)$ برابر می باشد.</p>	۱
-----	--	---

۱	<p>سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3, AC: y - 2x = 5, BC: 2y + 3x = 6$ هستند، معادله ارتفاع AH از این مثلث مفروض را بنویسید.</p>	۲
---	--	---

بارم	سوال	ردیف
۱	<p>دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $x = 6 + 2y$ و $2x - y = 7$ و یک راس آن نقطه $A(8, 5)$ می باشد، مساحت این مستطیل چقدر است؟</p>	۳
۱	<p>در یک دنباله حسابی که تعداد جملات آن زوج است، مجموع جملات فرد ۲۴، مجموع جملات زوج ۳۰ و تفاضل جمله اول از آخر ۱۰/۵ می باشد، تعداد جملات این دنباله را بدست آورید.</p>	۴
۱	<p>در مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع واحد، وسط های اضلاع را بطور متوالی به هم وصل می کنیم تا مثلث متساوی الاضلاع جدیدی بوجود آید و این کار را ادامه می دهیم. حداکثر تا مرحله چندم می توانیم این عمل را تکرار کنیم تا مجموع محیط های مثلث های بوجود آمده از ۵/۹۸ تجاوز نکند.</p>	۵
۱	<p>معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن از سه برابر عکس ریشه های معادله $x^2 + 6x + 2 = 0$ دو واحد بیشتر باشد.</p>	۶

بارم	سوال	ردیف
۱	<p>فاصله دو شهر واقع در کنار رودخانه ای ۱۴۴ کیلو متر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را بر می گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد، سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.</p>	۷
۱	<p>معادله گنگ مقابل را حل کنید.</p> $\sqrt{x+8} + 2\sqrt{x+7} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+7} = 4$	۸
۱/۵	<p>در کدام بازه از مقادیر x نمودار تابع $y = \sqrt{5+4x-x^2}$ در بالای نمودار تابع $y = x-3 + 2$ قرار دارد؟</p>	۹

بارم	سوال	ردیف
۱	دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{x[-\frac{2x}{15}]}$ را بدست آورید.	۱۰
۱	اگر دو تابع $f(x) = \frac{7}{x-3}$, $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ با هم برابر باشند، مقادیر d, c, b, a را محاسبه کنید.	۱۱
۱	برای دو تابع $f = \{(-4,1), (-2,5), (1,3), (1,4), (3,2)\}$ و $g(x) = \frac{2}{\sqrt{9-x^2}}$ ، تابع $\frac{f \cdot g}{3-f}$ را بیابید.	۱۲
۱	اگر $f(x) = 4x^2 - 1$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ را بدون تشکیل ضابطه آن بدست آورید.	۱۳

بارم	سوال	ردیف
۱	<p>اگر $g(x) = x^2 - 6x - 10$، تابع $f(x)$ را چنان بیابید که $gof(x) = x^2 + 10x + 6$ باشد.</p>	۱۴
۱	<p>نمودار تابع $y = \left \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x} \right$ را رسم نمایید.</p>	۱۵
۱	<p>ضابطه تابع وارون تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^3 x }{x^4 + 1}$ را بدست آورید.</p>	۱۶

بارم	سوال	ردیف
۱	فاصله محل برخورد تابع $f(x) = x^5 + x + 1$ با معکوس خود از مبدا مختصات چقدر است؟	۱۷
۱	نمودار تابع $y = x - \left[\frac{x}{3} + 1 \right] + 2$ را در فاصله $(-3, 3)$ رسم نمایید.	۱۸



جاهای خالی را پر کنید و راه حل محاسبه جواب را به صورت خلاصه بنویسید.

(۱) مساحت مثلثی با سه راس به مختصات $A(2, 5), B(3, 0), C(0, 2)$ برابر می باشد.

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |0 + 6 + 0 - 15 - 0 - 4| = \frac{13}{2} = 6.5$$

(۲) اگر x, y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $5\sqrt{2}$ باشند، بیشترین مقدار $3x + 4y$ مساوی است.

مطابق نامساوی کوشی: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

$$(9 + 16)(x^2 + y^2) \geq (3x + 4y)^2 \Rightarrow (3x + 4y)^2 \leq 25 \times 50 \Rightarrow 3x + 4y \leq 25\sqrt{2}$$

۲/۵

(۳) مجموعه جواب معادله $|x^4 + 2x^2 - 15| = |x^4 - 20| - |2x^2 + 5|$ به صورت $[a, b]$ است، ab برابر است.

$$|x^4 + 2x^2 - 15| + |-2x^2 - 5| = |x^4 - 20| \Rightarrow (x^4 + 2x^2 - 15)(-2x^2 - 5) \geq 0 \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 15 \leq 0 \Rightarrow$$

$$(x^2 + 5)(x^2 - 3) \leq 0 \Rightarrow (x^2 - 3) \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \Rightarrow ab = -3$$

(۴) اگر در تابع $f(x) = \sqrt{\frac{\sin x - 3}{-3x^2 + bx + 2c}}$ داشته باشیم: $D_f = R - \{\frac{1}{4}\}$ ، مقادیر b, c به ترتیب برابر و می باشد.

$$-3x^2 + bx + 2c = -3(x - \frac{1}{4})^2 = -3x^2 + 3x - \frac{3}{4} \Rightarrow b = 3, c = -\frac{3}{8}$$

(۵) اگر $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ ، $f(x) = f(3x - 4)$ ، $g(x)$ باشد، حاصل $g^{-1}(16)$ برابر می باشد.

$$f^{-1}(16) = 16 + 4 = 20 \Rightarrow 3x - 4 = 20 \Rightarrow x = 8$$

سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3, AC: y - 2x = 5, BC: 2y + 3x = 6$ هستند، معادله ارتفاع AH از این مثلث مفروض را بنویسید.

$$\begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y + 2x = -6 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{-7}{3} \Rightarrow A(\frac{-7}{3}, \frac{1}{3}) \quad (0.15)$$

۱

$$2y + 3x = 6 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow m_{BC} = -\frac{3}{2} \Rightarrow m_{AH} = \frac{2}{3} \quad (0.25)$$

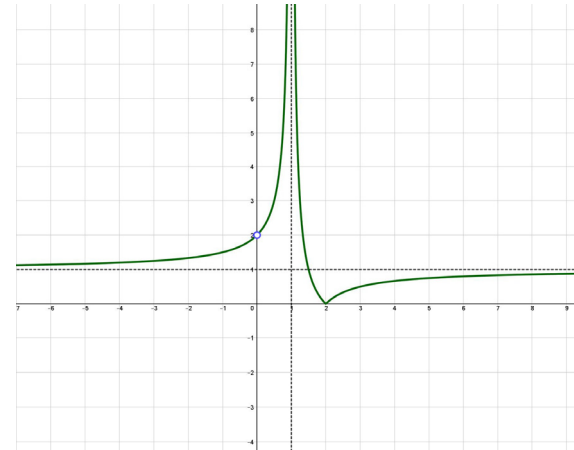
$$AH: y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(x + \frac{7}{3}) \Rightarrow 9y - 6x = 17 \quad (0.25)$$

۲

بارم	سوال	ردیف
۱	<p>دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2x - y = 7$, $2y + x = 6$ و یک راس آن نقطه $A(8, 5)$ می باشد، مساحت این مستطیل چقدر است؟</p> $\begin{cases} BC : 2y + x = 6 \\ CD : 2x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow AB = \frac{ ax_0 + by_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (0.25)$ $AB = \frac{ 8 + 10 - 6 }{\sqrt{1+4}} = \frac{12}{\sqrt{5}}, AD = \frac{ 16 - 5 - 7 }{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = \frac{12}{\sqrt{5}} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{48}{5} = 9.6 \quad (0.25)$ <p style="text-align: center;">(0.25) (0.25)</p>	۳
۱	<p>در یک دنباله حسابی که تعداد جملات آن زوج است، مجموع جملات فرد ۲۴، مجموع جملات زوج ۳۰ و تفاضل جمله اول از آخر $10/5$ می باشد، تعداد جملات این دنباله را بدست آورید.</p> $\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_n = 30 \\ a_1 + a_3 + \dots + a_{n-1} = 24 \end{cases} \Rightarrow (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = 6 \Rightarrow \frac{n}{2}d = 6 \Rightarrow nd = 12 \quad (0.5)$ $a_n - a_1 = 10/5 \Rightarrow a_1 + (n-1)d - a_1 = 10/5 \Rightarrow nd - d = 10/5 \Rightarrow 12 - d = 10/5 \Rightarrow d = 1/5 \quad (0.25)$ $1/5n = 12 \Rightarrow n = 8 \quad (0.25)$	۴
۱	<p>در مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع واحد، وسط های اضلاع را بطور متوالی به هم وصل می کنیم تا مثلث متساوی الاضلاع جدیدی بوجود آید و این کار را ادامه می دهیم. حداکثر تا مرحله چندم می توانیم این عمل را تکرار کنیم تا مجموع محیط های مثلث های بوجود آمده از $5/98$ تجاوز نکند.</p> $S_n \leq 5/98 \Rightarrow \frac{3(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} \leq 5/98 \Rightarrow 6 - 6(\frac{1}{2})^n \leq 5/98 \Rightarrow 6(\frac{1}{2})^n \geq \frac{2}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{300} \Rightarrow (0.25)$ <p style="text-align: center;">(0.5)</p> $2^n \leq 300 \Rightarrow n \leq 8 \quad (0.25)$	۵
۱	<p>معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن از سه برابر عکس ریشه های معادله $x^2 + 6x + 2 = 0$ دو واحد بیشتر باشد.</p> $y = \frac{3}{x} + 2 \Rightarrow y - 2 = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{1}{y-2} \Rightarrow x = \frac{3}{y-2} \quad (0.5)$ $\frac{9}{(y-2)^2} + \frac{18}{y-2} + 2 = 0 \Rightarrow 2(y-2)^2 + 18(y-2) + 9 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 8y + 8 + 18y - 36 + 9 = 0$ $2y^2 + 10y - 19 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 10x - 19 = 0 \quad (0.5)$	۶

بارم	سوال	ردیف
۱	<p>فاصله دو شهر واقع در کنار رودخانه ای ۱۴۴ کیلو متر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را بر می گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد، سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.</p> $\frac{144}{x} + \frac{144}{x-8} = 17 \Rightarrow \frac{48}{x} + \frac{48}{x-8} = 5 \xrightarrow{\times x(x-8)} 48x - 48 \times 8 + 48x = 5x^2 - 40x \Rightarrow$ $5x^2 - 136x + 48 \times 8 = 0 \Rightarrow 25x^2 - 136(5x) + 16 \times 120 = 0 \Rightarrow (5x - 120)(5x - 16) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ x = \frac{16}{5} \end{cases} \quad \text{غ ق ق} \quad \text{۰/۱۵}$	۷
۱	<p>معادله گنگ مقابل را حل کنید.</p> $\sqrt{x+8} + 2\sqrt{x+7} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+7} = 4$ $\sqrt{x+7} = t \Rightarrow x = t^2 - 7 \quad \text{۰/۲۵}$ $\sqrt{t^2+1} + 2t + \sqrt{t^2-6-t} = 4 \Rightarrow \sqrt{t^2-t-6} = 3-t \Rightarrow t^2-t-6 = t^2-6t+9 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow \text{۰/۱۵}$ $\sqrt{x+7} = 3 \Rightarrow x+7=9 \Rightarrow x=2 \quad \text{۰/۲۵}$	۸
۱/۵	<p>در کدام بازه از مقادیر x نمودار تابع $y = \sqrt{5+4x-x^2}$ در بالای نمودار تابع $y = x-3 +2$ قرار دارد؟</p> $\sqrt{5+4x-x^2} > x-3 +2 \Rightarrow 5+4x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2-4x-5 \leq 0 \Rightarrow D = [-1, 5] \quad \text{۰/۲۵}$ $x \geq 3 \Rightarrow \sqrt{5+4x-x^2} > x-1 \Rightarrow 5+4x-x^2 > x^2-2x+1 \Rightarrow x^2-3x-2 < 0 \Rightarrow$ $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow \frac{3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{17}}{2} \cap x \geq 3 \rightarrow A_1 = \left[3, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \quad \text{۰/۱۵}$ $x < 3 \Rightarrow \sqrt{5+4x-x^2} > 5-x \Rightarrow 5+4x-x^2 > x^2-10x+25 \Rightarrow x^2-14x+20 < 0 \Rightarrow$ $x = 2, 5 \Rightarrow 2 < x < 5 \cap x < 3 \rightarrow A_2 = (2, 3) \quad \text{۰/۱۵}$ $A_1 \cup A_2 = \left(2, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \quad \text{۰/۲۵}$	۹

بارم	سوال	ردیف
۱	<p>دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{x[-\frac{2x}{15}]}$ را بدست آورید.</p> $x[-\frac{2x}{15}] \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ [-\frac{2x}{15}] = 0 \Rightarrow 0 \leq -\frac{2x}{15} < 1 \Rightarrow 0 \leq -2x < 15 \Rightarrow -\frac{15}{2} < x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow D = (-\frac{15}{2}, 0]$ <p style="text-align: right;">(۰/۱۵)</p> <p style="text-align: center;">(۰/۱۵)</p>	۱۰
۱	<p>اگر دو تابع $f(x) = \frac{v}{x-3}$, $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ با هم برابر باشند، مقادیر a, b, c, d را محاسبه کنید.</p> $x^2+cx+d = (x-3)^2 = x^2-6x+9 \Rightarrow \begin{cases} c = -6 \\ d = 9 \end{cases}$ <p style="text-align: right;">(۰/۱۵)</p> $ax+b = v(x-3) = vx-21 \Rightarrow \begin{cases} a = v \\ b = -21 \end{cases}$ <p style="text-align: right;">(۰/۱۵)</p>	۱۱
۱	<p>برای دو تابع $f = \{(-4,1), (-2,5), (0,3), (1,4), (3,2)\}$ و $g(x) = \frac{2}{\sqrt{9-x^2}}$ تابع $\frac{f \cdot g}{3-f}$ را بیابید.</p> $g = \{(-2, \frac{2}{\sqrt{5}}), (0, \frac{2}{3}), (1, \frac{2}{\sqrt{8}}), \dots\} = \{(-2, \frac{2\sqrt{5}}{5}), (0, \frac{2}{3}), (1, \frac{\sqrt{2}}{2}), \dots\}$ <p style="text-align: right;">(۰/۲۵)</p> $f \cdot g = \{(-2, 2\sqrt{2}), (0, 2), (1, 2\sqrt{2})\}, 3-f = \{(-2, -2), (0, 0), (1, -1), \dots\}$ <p style="text-align: right;">(۰/۱۵)</p> $\frac{f \cdot g}{3-f} = \{(-2, -\sqrt{5}), (1, -2\sqrt{2})\}$ <p style="text-align: right;">(۰/۲۵)</p>	۱۲
۱	<p>اگر $f(x) = 4x^2 - 1$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ را بدون تشکیل ضابطه آن بدست آورید.</p> $D_{g \circ f} = \{x \in D_f ; f(x) \in D_g\} = \{x \in R ; 4x^2 - 1 \in [-1, 1]\}$ <p style="text-align: right;">(۰/۱۵)</p> $-1 \leq 4x^2 - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 4x^2 \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ <p style="text-align: right;">(۰/۲۵)</p> $D_{g \circ f} = \{x \in R ; -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\} = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ <p style="text-align: right;">(۰/۲۵)</p>	۱۳

بارم	سوال	ردیف
۱	<p>اگر $g(x) = x^2 - 6x - 10$، تابع $f(x)$ را چنان بیابید که $gof(x) = x^2 + 10x + 6$ باشد.</p> <p>$g(f(x)) = f^2(x) - 6f(x) - 10 = x^2 + 10x + 6 \xrightarrow{+19} f^2(x) - 6f(x) + 9 = x^2 + 10x + 25 \Rightarrow$ $(f(x) - 3)^2 = (x + 5)^2 \Rightarrow f(x) - 3 = x + 5 \Rightarrow$</p> $\begin{cases} f(x) - 3 = x + 5 \Rightarrow f(x) = x + 8 & \text{.۲۵} \\ f(x) - 3 = -x - 5 \Rightarrow f(x) = -x - 2 & \text{.۲۵} \end{cases}$ <p style="text-align: center;">.۲۵</p>	۱۴
۱	<p>نمودار تابع $y = \left \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x} \right$ را رسم نمایید.</p> <p>$y = \left \frac{x(x-2)}{x(x-1)} \right = \left \frac{x-2}{x-1} \right , x \neq 0 \Rightarrow y \neq 2$</p> <p>مجانب افقی: $y = 1$ مجانب قائم: $x = 1$</p> <p>صعودی (ناحیه دو و چهار مجانب ها): $ad - bc = -1 + 2 > 0$</p> <p style="text-align: center;">.۱۵</p>  <p style="text-align: center;">.۱۵</p>	۱۵
۱	<p>ضابطه تابع وارون تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^3 x }{x^4+1}$ را بدست آورید.</p> <p>می دانیم حاصل تقسیم یک نامنفی بر یک واحد بیشتر از خوش از صفر تا یک می باشد:</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^4+1} & x \geq 0 \\ \frac{-x^4}{x^4+1} & x < 0 \end{cases} \quad R_1 = [0, 1) \quad , \quad R_2 = (-1, 0)$ <p>$y = \frac{x^4}{x^4+1} \Rightarrow \frac{y}{1-y} = x^4 \Rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{y}{1-y}} \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt[4]{\frac{y}{1-y}}$</p> <p>$y = \frac{-x^4}{x^4+1} \Rightarrow \frac{y}{1+y} = -x^4 \Rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{-y}{1+y}} \xrightarrow{x < 0} x = -\sqrt[4]{\frac{-y}{1+y}}$</p> $\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{x}{1-x}} & 0 \leq x < 1 \\ -\sqrt[4]{\frac{-x}{1+x}} & -1 < x < 0 \end{cases}$ <p style="text-align: center;">.۱۵</p> <p style="text-align: center;">.۱۵</p>	۱۶

بارم	سوال	ردیف
۱	<p>فاصله محل برخورد تابع $f(x) = x^5 + x + 1$ با معکوس خود از مبدا مختصات چقدر است؟</p> <p>$x^5 + x + 1 = x \Rightarrow x^5 = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(-1, -1) \Rightarrow OA = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$</p> <p>(۰/۲۵) (۰/۵) (۰/۲۵)</p>	۱۷
۱	<p>نمودار تابع $y = x - \left[\frac{x}{3} + 1 \right] + 2$ را در فاصله $[-3, 3]$ رسم نمایید.</p> <p>$y = x - \left[\frac{x}{3} + 1 \right] + 2 = x - \left[\frac{x}{3} \right] + 1$</p> <p>$-3 \leq x < 3 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{3} < 1$</p> <p>$-1 \leq \frac{x}{3} < 0 \Rightarrow -3 \leq x < 0 \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۰/۲۵)</p> <p>$0 \leq \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 3 \Rightarrow y = x + 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (۰/۲۵)</p> <p>(۰/۵)</p>	۱۸