

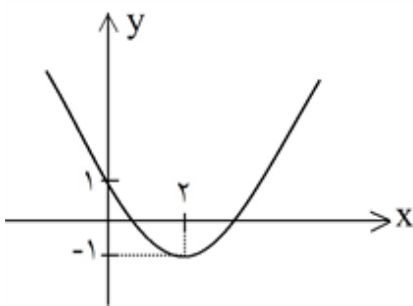


۱ اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

(۱) $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ (۲) $\frac{a}{b} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$ (۳) $\frac{a}{a+b} = \frac{f}{e+f}$ (۴) $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$

۲ برای اثبات گزاره‌ی «مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.» از استفاده می‌کنیم.
(۱) درستی، برهان خلف (۲) نادرستی، برهان خلف (۳) درستی، مثال نقض (۴) نادرستی، مثال نقض

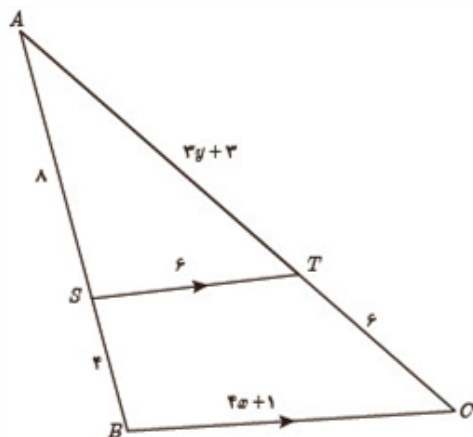
۳ در معادله‌ی $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب‌ها دو واحد از جواب دیگر بزرگ‌تر باشد، m و هر دو جواب را پیدا کنید.



۴ در شکل مقابل نمودار سهمی به معادله $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است، ضرایب a, b, c را تعیین کنید.

۵ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $f(x) = 2x^2 - 4x - 8$ باشند بدون حل معادله، مقدار عبارت $\alpha^3\beta + \beta^3\alpha$ را بدست آورید.

۶ با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، حکم زیر را ثابت کنید:
اگر n عددی صحیح و n^2 فرد باشد، نشان دهید n نیز فرد است.



۷ در شکل مقابل $ST \parallel BC$ است. مقادیر x و y را به دست آورید.

$$y = x - [x]$$

۸ نمودار تابع با ضابطه‌ی زیر را در بازه‌ی $[-1, 1]$ رسم کنید.

۹ دو تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x+4}$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار $(f+g)(0)$ را به دست آورید.

ب) دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.

۱۰ در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$ ب) $f(x) = x - 2$, $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

۱۱ ثابت کنید تابع $y = \frac{1-2x}{1+x}$ یک به یک است. سپس ضابطه‌ی تابع معکوس آن را به دست آورید.

۱۲ جای خالی را با عبارت ریاضی مناسب پر کنید.

مجموعه جواب معادله‌ی $x + \sqrt{x} = 6$ برابر است با

۱۳ اگر نقاط $A(-1, 4)$ و $B(3, 2)$ انتهای دو سر قطر یک دایره باشند مطلوب است:

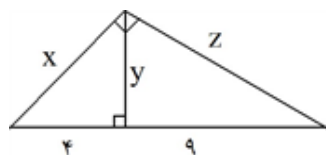
الف) شعاع و مرکز این دایره

ب) مساحت و محیط دایره

۱۴ در مثلث ABC به رئوس $A(-3, 5)$, $B(2, 4)$ و $C(-1, -4)$ ، طول میانه‌ی وارد بر ضلع AC چه قدر است؟

۱۵ دو فرد A و B کاری را با هم در ۱۲ ساعت انجام می‌دهند، ولی اگر تک‌تک، این کار را انجام دهند. فرد A کار را

۱۰ ساعت زودتر از فرد B به اتمام می‌رساند. ساعت کار A و B را به دست آورید.



۱۶ در شکل زیر، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

پاسخنامه تشریحی

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

گزینه‌ی ۱ درست می‌باشد زیرا صورت‌ها به مخرج اضافه شده‌اند. (ترکیب صورت با مخرج)
گزینه‌های ۲ و ۴ درست می‌باشند زیرا صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم جمع شده‌اند که یکی از ویژگی‌های تناسب می‌باشد.

گزینه‌ی ۳ نادرست است. زیرا در قسمت دوم تساوی مخرج به صورت آورده شده که این درست نیست.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. گزاره‌ی مورد نظر نادرست است. یعنی مجموع دو عدد گنگ، می‌تواند گنگ نباشد، به عنوان مثال نقض:

$$x = \sqrt{2}$$

$$y = 3 - \sqrt{2} \Rightarrow x + y = 3 \in \mathbb{Q}$$

$$\alpha = 2 + \beta, \quad S = 4 \quad (0/25)$$

$$S = \alpha + \beta = 2 + 2\beta \quad (0/25) \Rightarrow 4 = 2 + 2\beta \Rightarrow \beta = 1 \quad (0/25) \Rightarrow \alpha = 3 \quad (0/25), \quad m = 6 \quad (0/25)$$

$$(0, 1) \Rightarrow P(0) = 0 + 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1 \quad (0/25)$$

$$(2, -1) \Rightarrow P(2) = 4a + 2b + 1 = -1 \Rightarrow 4a + 2b = -2 \quad (0/25)$$

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow -b - 4a = 0 \quad (0/25)$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ -b - 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow b = -2 \quad (0/25), \quad a = \frac{1}{2} \quad (0/25)$$

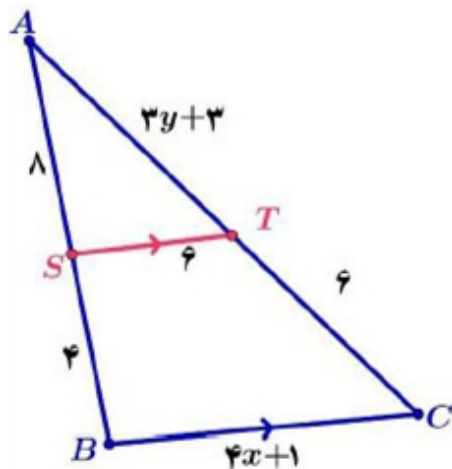
$$S = \alpha + \beta = 2 \quad (0/25)$$

$$P = \alpha \cdot \beta = -4 \quad (0/25)$$

$$\alpha^3 \beta + \beta^3 \alpha = \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) = P(S^2 - 2P) = -4(4 + 1) = -48 \quad (0/25)$$

زوج $n^2 = 4k^2 = 2q \Rightarrow n = 2k \Rightarrow n = 2 \Rightarrow n = 2$ فرد نباشد $n = 2$: فرض خلف

که متناقض با فرد بودن n^2 ، پس فرض خلف غلط است.



طبق قضیه تالس $ST \parallel BC \Rightarrow \frac{AS}{AB} = \frac{AT}{AC} = \frac{ST}{BC}$

$$\frac{AS}{AB} = \frac{AT}{AC} \Rightarrow \frac{3y+3}{12} = \frac{6}{36} \Rightarrow 24y + 72 = 36y + 36$$

$$\Rightarrow 36y - 24y = 72 - 36$$

$$y = \frac{36}{12} \Rightarrow y = 3$$

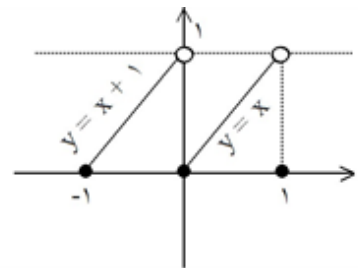
$$\frac{AS}{AB} = \frac{ST}{BC} \Rightarrow \frac{3y+3}{12} = \frac{6}{4x+1} \Rightarrow 32x + 8 = 72$$

$$\Rightarrow 32x = 72 - 8 \Rightarrow 32x = 64 \Rightarrow x = \frac{64}{32} \Rightarrow x = 2$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow y = x + 1$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow y = x - 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 0$$



الف) $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ (۰/۲۵)

ب) $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ (۰/۲۵), $D_g = [-2, +\infty)$ (۰/۲۵) $\Rightarrow D_{f+g} = (-2, +\infty) - \{2\}$ (۰/۲۵)

الف) دامنه‌ی این دو تابع با هم برابر است. $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ (۱۰)

پس از ساده کردن تابع g مشاهده می‌کنیم که ضابطه‌ی این دو تابع نیز با هم برابر است:

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow g(x) = \frac{x}{x} = 1 \\ x < 0 \Rightarrow g(x) = \frac{-x}{x} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

ب) می‌دانیم دامنه‌ی این دو تابع عبارت است از: $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$

با وجود این که اگر $g(x)$ را ساده کنیم ضابطه‌ی آن با ضابطه‌ی $f(x)$ برابر می‌شود اما چون دامنه‌ها برابر نیستند نمی‌توانیم بگوییم که دو تابع برابر هستند.

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = x - 2$$

f یک به یک است و از آنجا معکوس پذیر است. (۱۱)

$$y_1 = \frac{1 - 2x_1}{1 + x_1}, y_2 = \frac{1 - 2x_2}{1 + x_2} \Rightarrow \frac{1 - 2x_1}{1 + x_1} = \frac{1 - 2x_2}{1 + x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$y = \frac{1 - 2x}{1 + x} \Rightarrow y + yx + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 - y}{2 + y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 - x}{2 + x}$$

۱۲ {۴} = مجموعه جواب ۰/۵

۱۳

$$\text{الف } O = \frac{A+B}{2} = (1, 3)$$

$$OA = R = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\text{ب) محیط دایره} = 2\pi R = 2\pi(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}\pi$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi R^2 = \pi(\sqrt{5})^2 = 5\pi$$

۱۴

$$\text{AC وسط M: } \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3-1}{2} = -2 \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$BM = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + \left(\frac{1}{2}-4\right)^2} = \frac{\sqrt{113}}{2}$$

۱۵

اگر زمان فرد A را x در نظر بگیریم، زمان فرد B برابر (x + ۱۰) خواهد بود، لذا:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12} \xrightarrow{\text{ضرب جملات در } 12x(x+10)} 12x(x+10) + 12x = x(x+10)$$

$$\Rightarrow 12x + 120 + 12x = x^2 + 10x \Rightarrow x^2 - 14x - 120 = 0 \Rightarrow (x-20)(x+6) = 0$$

تجزیه

$$\Rightarrow \begin{cases} x-20=0 \Rightarrow x=20 & (\text{ق ق}) \\ x+6=0 \Rightarrow x=-6 & (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

$$x+10=20+10=30 \text{ (ساعت)}$$

پس زمان شخص B هم برابر است با:

تذکر: در ابتدای حل مسئله، می‌توانستید زمان فرد B را x و زمان فرد A را (x - ۱۰) فرض کنید.

۱۶

در مثلث ABC می‌توان نوشت:

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow y^2 = 4 \times 9 \Rightarrow y = 2 \times 3 = 6$$

حال با به کار بردن قضیه فیثاغورس در هر دو مثلث قائم‌الزاویه ABH و ACH داریم:

$$ABH: AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow x^2 = 6^2 + 4^2 \Rightarrow x = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}$$

$$ACH: AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow z^2 = 6^2 + 9^2 \Rightarrow z = \sqrt{117}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴