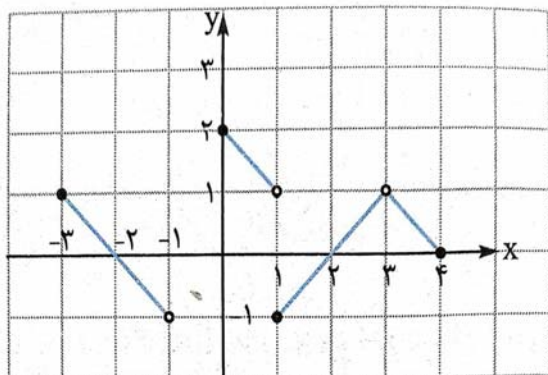




۶ فصل ششم (حد و پیوستگی)

۱۷۶ - نمودار تابع f رسم شده است هر کدام از موارد زیر را پیدا کنید.



الف) $f(-3)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

پ) $f(-1)$

ت) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ث) $f(1)$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

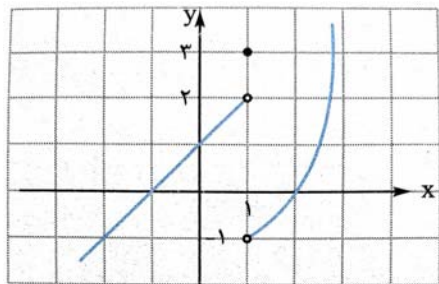
چ) $f(4)$

ح) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

خ) $f(3)$

د) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

۱۷۷ - نمودار تابع f رسم شده است حاصل $f(1) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ را پیدا کنید.



۱۷۸ - نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ x + 1 & x > -1 \end{cases}$ را رسم کنید و سپس موارد زیر را پیدا کنید.

الف) $f(-1)$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

۱۷۹- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ 2x - 1 & x > -1 \end{cases}$ را رسم کنید و سپس موارد زیر را پیدا کنید.

- | | | | |
|--------------|---------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|
| الف) $f(-1)$ | ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ | پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ | ت) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ |
| ث) $f(1)$ | ج) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ | چ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ | ح) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ |

۱۸۰- نمودار تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ را رسم کنید و سپس مقدار حد تابع f را وقتی $x \rightarrow a$ و $a \in R$ مشخص کنید.

۱۸۱- نمودار تابع $f(x) = [x]$ را در بازه $[0, 3]$ رسم کنید و سپس موارد زیر را پیدا کنید.

- | | | |
|--|--|--|
| الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ | ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ | پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ |
| ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x)$ | ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x)$ | چ) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x)$ |

۱۸۲- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & x < 0 \\ -x + 4 & 0 < x < 2 \\ x - 1 & x \geq 2 \end{cases}$ را رسم و تعیین کنید تابع در چه نقاطی حد ندارد؟

۱۸۳- تابعی مثال بنزید که حدش در نقطه ۱- برابر ۱ باشد و نمودار تابع را رسم کنید.

۱۸۴- تابعی مثال بنزید که حدش در نقطه ۱- برابر ۱ باشد ولی مقدار نداشته باشد و نمودار تابع را رسم کنید.

۱۸۵- تابعی مانند f مثال بنزید که $f(2) = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ و نمودار تابع را رسم کنید.

۱۸۶- تابعی با دامنه R مثال بنزید که فقط در نقاط ۰ و ۱ حد نداشته باشد.

۱۸۷- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ در شکل روبرو داده شده است. موارد زیر را بنویسید.

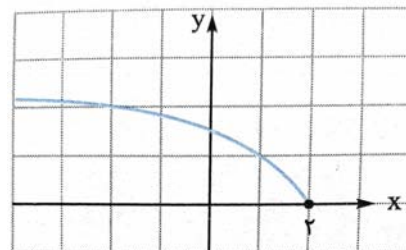
الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$



۱۸۸- اگر $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 0$ باشد حاصل حد های زیر را پیدا کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} (2f(x) - 3g(x))$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x) + g(x)}{f(x) - 3g(x)}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3} (2(f(x))^4)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} ((g(x))^5 + \sqrt[3]{f(x)})$

ث) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{h(x)}$

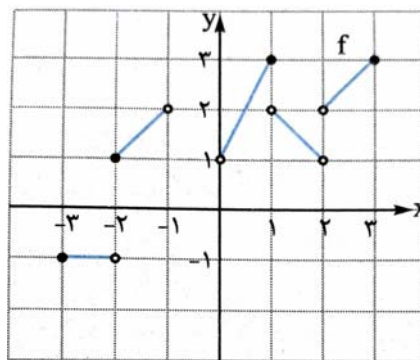
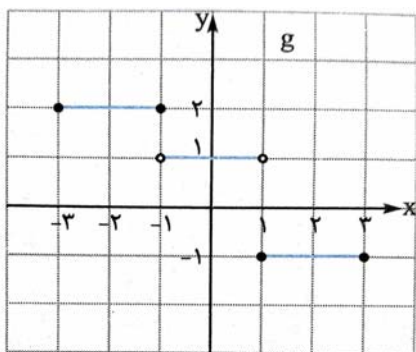
چ) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{h(x) + 4}$

ح) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{h(x)}$

خ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + 5}{4g(x) - 2}$

د) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + h(x)}{2f(x) - g(x)}$

۱۸۹- با توجه به نمودار f و g حاصل موارد خواسته شده را پیدا کنید.



الف) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + 2g(x))$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x)^2 + g(x))$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) - g(x))$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$

۱۹۰- نمودار تابع $f(x) = \frac{|x+1|}{x+1}$ را رسم کنید و بگویید تابع در چه نقاطی حد ندارد.

۱۹۱- نمودار تابع های $f(x) = \frac{|x-2|}{2-x}$ و $g(x) = -1$ را رسم کنید. حد $f(x)$ و $g(x)$ را وقتی $x \rightarrow 2$ پیدا کنید و بگویید در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابر و در چه نقاطی با هم متفاوت اند.

۱۹۲- نمودار تابع $f(x) = \frac{|x^2-2x|}{x-2}$ را رسم کنید و بگویید تابع در چه نقاطی حد ندارد.

۱۹۳- حد های زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} 2 - \sqrt{2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \sqrt{2}x - 1$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x^2 + 2x$

ت) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x + 3}{x + 1}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 + x + 4}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - x}{\sqrt{x-3} + x}$

۱۹۴- حاصل حد های زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2-4}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2-4x+4}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{4x-x^2-4}$

۱۹۵- نمودار هر کدام از تابع های زیر را رسم کنید و حد تابع را در نقطه خواسته شده به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 1}$, $x \rightarrow 3$

ب) $g(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x - 4}$, $x \rightarrow 4$

پ) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$, $x \rightarrow 2$

ت) $g(x) = \frac{x^3 + x + 2}{x + 1}$, $x \rightarrow -1$

۱۹۶- حاصل حد های زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x - 6}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{x}{x+6}}{x^2 - 9}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x - 1}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x - 10}{x^3 - 8}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^3 + x^2 + x - 3}$

۱۹۷- حاصل حد مقابل را به دست آورید.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$

۱۹۸- حاصل حد های زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x)(x^2 - x - 2)}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

۱۹۹- حاصل حد های زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} 2[x] - 1$

ب) $\lim_{x \rightarrow -2} [x] - 1$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} x[x] - 2[x]$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x] + 2}{x - 1}$

۲۰۰- حاصل حد های زیر را به دست آورید.

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x[x] - 1}{x^2 - 1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - [x]}{x - [x]}$

۲۰۱- حاصل حد های زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} [2x] - [x]$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} [x] - [x^2]$

۲۰۲- حاصل حد های زیر را پیدا کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos 2x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos x \cos 2x)$

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)$ - ۲۸

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\cos x + \cos 2x + \cos 3x)$

۲۰۳ - حاصل حد های زیر پیدا کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$

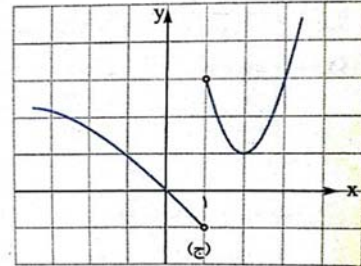
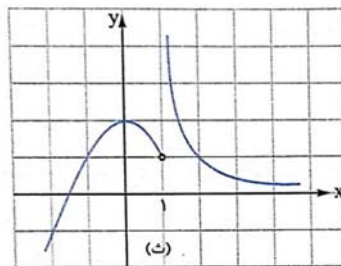
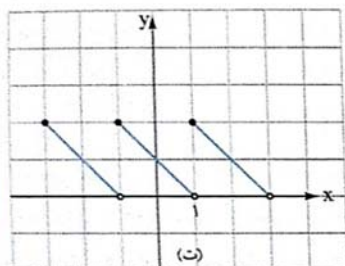
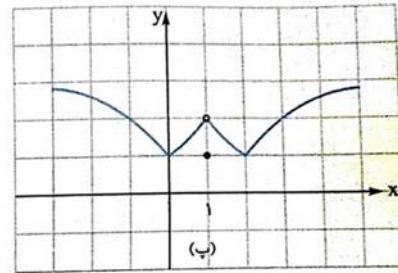
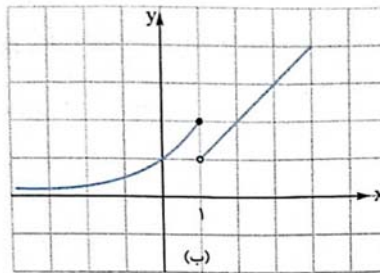
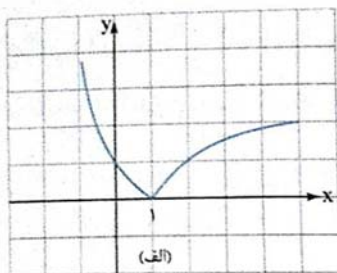
ب) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos^3 x}{\sin^2 x}$

ت) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin x \cos x}{\sin x - \cos x}$

۲۰۴ - کدام یک از تابع های زیر در نقطه $x = 1$ پیوسته است؟ بگویید هر کدام از تابع ها از راست پیوسته است یا

چپ؟ کدام تابع ها در نقطه $x = 1$ تعریف شده اند؟



۲۰۵- نمودار هر کدام از تابع های زیر را رسم کنید. بگویید هر تابع در چه نقاطی ناپیوسته است؟ بزرگ ترین بازه هایی را که تابع در آن پیوسته است مشخص کنید.

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{ب) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x > 1 \\ -1 & x = 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$$

$$\text{پ) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{ت) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$$

۲۰۶- نمودار دو تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$ و $g(x) = x - 1$ را رسم کنید و بگویید دو تابع از نظر پیوستگی چه تفاوتی با هم دارند؟

۲۰۷- نمودار تابع های زیر را رسم کنید. سپس تعیین کنید هر کدام یک از بازه های داده شده پیوسته است؟

$$\text{الف) } f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x} \quad (0, +\infty), (-1, 1), [1, 3], (-\infty, 0], (-2, 0)$$

$$\text{ب) } f(x) = \begin{cases} |x| & x < -1 \\ x - 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 1 & 0 < x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases} \quad (-2, -1), [-1, 0], [1, 2), (0, 1]$$

$$\text{پ) } f(x) = |x - 2| - 1 \quad (0, 2), (0, 3], [0, +\infty), (-\infty, 1), [1, 2]$$

$$\text{ت) } f(x) = [x] \quad (-1, 0), (-1, 1), [1, 2), [1, 2], [0, +\infty)$$

۲۰۸- نمودار دو تابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = [-x]$ را رسم کنید. تعیین کنید بازه های پیوستگی این دو تابع چه تفاوتی با هم دارند؟

۲۰۹- تابعی مثال بزنید که :

الف) در نقطه $x = 1$ حدش برابر ۲ و پیوسته باشد.

ب) در نقطه $x = 1$ حدش برابر ۲ و ناپیوسته باشد.

پ) در نقطه $x = 1$ حدش راستش برابر ۲ و حد چپش برابر ۱ و از راست پیوسته باشد.

ت) در نقطه $x = 1$ حدش راستش برابر ۲ و حد چپش برابر ۱ و از چپ پیوسته باشد.

ث) در نقطه $x = 1$ حدش راستش برابر ۲ و حد چپش برابر ۱ و نه از راست پیوسته باشد و نه از چپ.

۲۰۹- در تابع $x \neq 1$ و $f(x) = \frac{x^3 + x - 2}{x - 1}$ مقدار تابع را در نقطه $x = 1$ طوری تعریف کنید که تابع در تمام R پیوسته باشد.

۲۱۰- مقدار a و b را طوری تعیین کنید که تابع های زیر در R پیوسته باشد.

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < -1 \\ ax + & x \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{ب) } f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x < -1 \\ x + b & -1 \leq x \leq 0 \\ ax^2 - x + 3 & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{پ) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & x < 1 \\ ax + b & x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1} + b & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{ت) } f(x) = \begin{cases} |x - a| & x < 1 \\ 2x - 1 & x = 1 \\ ax^2 + b & x > 1 \end{cases}$$

۲۱۱- تعیین کنید تابع $f(x) = [x]$ در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۲۱۲- تعیین کنید تابع $f(x) = [x]$ در چه بازه هایی پیوسته است؟

۲۱۳- پیوستگی هر کدام از تابع های زیر را در بازه های داده شده بررسی کنید.

$$\text{الف) } f(x) = x[x] - 2[x], \quad x \in [1, 2] \quad \text{ب) } g(x) = \frac{[x] + x}{x - 1}, \quad x \in [2, 3]$$

۲۱۴- مقدار a و b را طوری تعیین کنید که هر کدام از تابع های زیر در R باشد.

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} a + \cos x & x < 0 \\ 2 \sin x - a & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{ب) } f(x) = \begin{cases} \cos x + a & x < 0 \\ a \sin x + b \cos x & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \cos^2 x - b & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۲۱۵- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} [x] + a & x < 0 \\ x^2 - [x] & 0 \leq x < 1 \\ [2x] + b & x \geq 1 \end{cases}$ در نقاط $x = 0$ و $x = 1$ پیوسته باشد، مقدار a و b را تعیین کنید.